This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 000 648 183

LIBRARY OF THE
Leland Stanford Junior University

A613

A613

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND X.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND X.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT SECHSUNDVIERZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST VIER FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1880.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

A. 14408

Inhalt.

Neue Folge. Band X.

Fünftes Heft.

Seite

I. W. Kohlrausch. Ueber Töne, die durch eine begrenzte Anzahl von Impulsen erzeugt werden 1

II. E. Warburg. Ueber die Torsion 13

III. G. Kirchhoff. Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit 34

IV. E. Dorn. Ueber die Fortführung der Electricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen 46

V. W. C. Röntgen. Ueber die von Herrn Kerr gefundene neue Beziehung zwischen Licht und Electricität 77

VI. R. Clausius. Ueber einige neue Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Gasmolecüle 92

VII. H. F. Weber. Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten 103

VIII. A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper 130

IX. J. L. Schönn. Ueber ultraviolette Strahlen 143

X. A. Matern. Ueber ein neues einfaches Condensationshygrometer 149

XI. G. J. Legebeke. Ueber einen allgemeinen Satz von Hrn. R. Clausius in Bezug auf electrische Influenz 154

Seite

XII. W. Holtz. Ueber eine Augentäuschung beim Anblick geometrischer Figuren 158

XIII. F. Lippich. Reflexion und Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen unter Voraussetzung endlicher Einfallswinkel 160

Geschlossen am 1. Mai 1880.

Sechstes Heft.

I. G. Quincke. Ueber electrische Ausdehnung 161

II. E. Wiedemann. Ueber das thermische und optische Verhalten von Gasen unter dem Einflusse electrischer Entladungen 202

III. A. Kundt und W. C. Röntgen. Ueber die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in den Gasen 257

IV. Fr. Exner. Zur Theorie der inconstanten galvanischen Elemente 265

V. A. Wüllner. Ueber die specifische Wärme des Wassers 284

VI. M. A. von Reiss. Ueber die specifische Wärme der Gemische von Essigsäure und Wasser 291

VII. O. E. Meyer. Ueber eine veränderte Form meines Beweises für das Maxwell'sche Gesetz der Energievertheilung . . 296

VIII. H. F. Weber. Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten 304

IX. A. Kundt. Ueber anomale Dispersion im glühenden Natriumdampf 321

X. V. Strouhal und C. Barus. Ueber eine einfache Methode der galvanischen Calibrirung eines Drahtes 326

XI. Ed. Hagenbach. Sprengwirkungen durch Eis 330

XII. W. Holtz. Ueber das Trichterventil in evacuirten Röhren 336

Geschlossen am 1. Juni 1880.

Siebentes Heft.

I. G. Kirchhoff u. G. Hansemann. Versuche über stehende Schwingungen des Wassers 337

II. W. Beetz. Ueber die Natur der galvanischen Polarisation 348

Seite

III. W. Beetz. Schlüssel für electrische Leitungen 371

IV. G. Quincke. Ueber electrische Ausdehnung 374

V. H. R. Hertz. Versuche zur Feststellung einer obern Grenze für die kinetische Energie der electrischen Strömung . . . 414

VI. E. Lommel. Ueber Fluorescenz 449

VII. H. F. Weber. Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten 472

VIII. G. Kirchhoff. Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt 501

Geschlossen am 15. Juni 1880.

Achtes Heft.

I. G. Quincke. Ueber electrische Ausdehnung 513

II. E. Budde. Das Clausius'sche Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume 553

III. W. Siemens. Ueber die Abhängigkeit der electrischen Leitungsfähigkeit der Kohle von der Temperatur 560

IV. E. Reitlinger u. A. v. Urbanitzky. Ueber die Erscheinungen in Geissler'schen Röhren unter äusserer Einwirkung 574

V. H. Wild. Vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers und neue Methoden zur Bestimmung der absoluten Horizontalintensität des Erdmagnetismus sowie der Temperatur- und Inductionscoëfficienten der Magnete 597

VI. R. Clausius. Ueber die Vergleichung der electrodynamischen Grundgesetze mit der Erfahrung 608

VII. W. Hankel. Ueber eine directe Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme in Electricität 618

VIII. E. Lommel. Ueber Fluorescenz 631

IX. H. Knoblauch. Ueber das Verhalten verschiedener Wärmefarben bei der Reflexion polarisirter Strahlen von Metallen 654

X. H. Herwig. Bemerkung über das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers 662

Seite

XI. A. Winkelmann. Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. H. F. Weber „Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten 668

XII. G. Recknagel. Ueber Luftwiderstand 677

XIII. W. Holtz. Ueber die Wirkung hohler Stahlmagnete im Vergleich zu derjenigen massiver 694

Geschlossen am 15. Juli 1879.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. W. Kohlrausch, Fig. 1—3. — Warburg, Fig. 4—5. — Röntgen, Fig. 6—11. — Matern, Fig. 12.

Taf. II. Quincke, Fig. 1-23.

Taf. III. E. Wiedemann, A. Fig. 1—13. — E. Hagenbach, B. Fig. 1—4.

Taf. IV. G. Kirchhoff u. G. Hansemann, Fig. 1. — W. Beetz, Fig. 2—7. — H. R. Hertz, Fig. 8—12. — G. Recknagel, Fig. 13.

1880. ANNALEN № 5.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND X.

I. *Ueber Töne, die durch eine begrenzte Anzahl von Impulsen erzeugt werden; von W. Kohlrausch.*[1])

Die Frage nach der Tonwirkung einer begrenzten Anzahl von Wellen wurde schon von Seebeck[2]) gelegentlich berührt und ist in neuerer Zeit von Pfaundler[3]), S. Exner[4]) und Auerbach[5]) eingehender behandelt worden. Die zwei erstgenannten Arbeiten fragen nach der Minimalzahl der Schwingungen, die überhaupt einen wahrnehmbaren Ton erzeugt, während die letzten diejenige Schwingungszahl suchen, die dem Tone seine volle Charakteristik bezüglich der Tonhöhe gibt.

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, diese beiden Fragen durch Erweiterung einer jeden miteinander zu verknüpfen.

Ein bestimmtes Ohr möge im Stande sein, die Töne zweier Tonquellen von gegebener Klangfarbe bei einem gewissen Intervalle derselben eben noch als verschieden zu erkennen. Wir wollen die Frage stellen, wie gross dieses Intervall sei, wenn die eine Tonquelle eine beschränkte Anzahl von Schwingungen macht, während die andere andauernde, also völlig scharf definirte Töne gibt, und ob sich dieses für eine bestimmte Anzahl von Schwingungen der einen Tonquelle charakteristische Intervall mit der Tonhöhe

1) Ueber die Resultate dieser Untersuchung wurde auf der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Baden-Baden im September 1879 berichtet.

2) Seebeck, Pogg. Ann. **58.** p. 417. 1841.

3) Pfaundler, Wien. Ber. **76.** p. 561. 1877.

4) S. Exner, Pflüger's Archiv. **18.** p. 228. 1876.

5) Auerbach, Wied. Ann. **6.** p. 591. 1879. u. a. a. O.

ändere. Für unsere Zwecke muss also zunächst ein Apparat hergestellt werden, der einen Ton von beliebiger Tonhöhe und von beliebiger Schwingungsanzahl liefert. Der nächstliegende Gedanke, Tonquellen plötzlich zu erregen und nach der gewünschten Anzahl von Schwingungen zu dämpfen — s. S. Exner's oben citirte Arbeit — ist wegen der Unsicherheit der Dämpfung schwierig ausführbar. Andererseits würde ein Zahnrad — von Seebeck und Pfaundler wurden ähnliche Vorrichtungen verwendet — mit einer bestimmten Anzahl von Zähnen an einer Stelle des Umfangs den Ton zu oft wiederholen und dadurch die Beurtheilung beeinflussen, abgesehen von der Schwierigkeit, die die Herstellung einer beliebigen, aber constanten Rotationsgeschwindigkeit bietet.

Der einfachste und geeignetste Weg scheint darin zu bestehen, dass man ein Pendel mit einem Stück Zahnrad, dessen Radius gleich der Pendellänge ist, von bestimmter Höhe fallen und durch Anschlagen der Zähne an ein Kartenblatt die gewünschte Anzahl von Impulsen erzeugen lässt.

Der verwendete Apparat. Eine 3 m lange Stange aus Tannenholz von 30×50 mm Querschnitt ist an einem breiten Lederriemen[1]) *a* (Tafel I Fig. 1) an der Zimmerdecke aufgehängt und unten bei *e* mit 6 Kilo beschwert. Seitlich ist eine Nase *c* angeschraubt, über welche der am Brett *b* auf und ab verstellbare Haken *d* greift. Das Brett ist an einer mit ca. 120 Kilo beschwerten Kiste festgeschraubt, und der durch eine Feder emporgedrückte Haken *d* kann vom Platze des Beobachters aus leicht und ohne Geräusch herabgezogen und dadurch das aufgehakte Pendel ausgelöst werden. Unten am Pendel ist ein Blech *h* mit den Schrauben *f* und *gg* befestigt, welche, auf ein Stück hartes Holz *i* drückend, durch dasselbe das Blech fest an die Pendelstange pressen. An dem mit dem Pendel concentrischen Rande des Blechs sind 31 Löcher im Abstande

1) Die Aufhängung an einem Riemen bewirkt allerdings eine starke Dämpfung, lässt aber das Pendel sehr ruhig schwingen, während es, an Stahlfedern aufgehängt, bei grossen Fallhöhen stets zitterte. Auch brachen die Federn nach kurzem Gebrauch.

von je 1 cm gebohrt. Ein anderes etwas längeres Blech, welches statt des ersten angeschraubt werden kann, trägt 24 Löcher im Abstande von 2 cm. Mit Schrauben und Muttern lassen sich Zähne *k* (Taf. I Fig. 2) auf das Blech festschrauben. Der Rand *l* der Zähne befindet sich unten senkrecht zur Schwingungsebene des Pendels.

Senkrecht unter dem Pendel ist die aus Holz gefertigte Vorrichtung (Taf. I Fig. 3) am Fussboden festgeschraubt. Der Schlitten *m* lässt sich in einem Schwalbenschwanz zwischen den Leisten *n* vor- und rückwärts schieben und schlägt bei o_1 und o_2 beiderseits an; die schleifenden Federn *p* geben ihm leichte, aber sichere Führung. Der Schlitten trägt auf einer vermittelst der Schraube *q* höher und tiefer stellbaren elastischen Holzleiste *r* zwei Holzwangen *s*, und zwischen diesen halten die Flügelschrauben *tt* ein Stück einer Karte *u*. Durch Keile *v* aus Kautschuck oder Kork, die unter die im Schlitten befestigten Kniestücke *w* gesteckt werden, nachdem die Holzleiste und mit ihr die Karte in die gewünschte Höhe gestellt ist, wird seitliches Wackeln oder Schwingen der Holzleiste beim Anschlagen der Zähne an die Karte vermieden.

Steht der Schlitten bei o_2 an, so streifen die Zähne des Pendels die Karte an deren oberem Rande, beim Anschlag an o_1 gehen die Zähne frei hinter der Karte vorbei. Eine ähnlich wie dieser Schlitten verschiebbare Vorrichtung mit zwei in bestimmter Entfernung voneinander feststellbaren Contacthebeln, die in Quecksilbernäpfe tauchen und von einem Fortsatz des fallenden Pendels ausgelöst werden, erlaubt, die Geschwindigkeit des Pendels in unmittelbarer Nähe seiner tiefsten Lage durch Zeitmessung mittelst des Hipp'schen Chronoskops zu bestimmen. Der constante Fehler des Chronoskops wird durch Combination von Messungen bei verschiedenen Abständen der Contacthebel eliminirt.

Versuchsanordnung. Die Zähne werden zunächst nach einer am untern Rande der Blechs angebrachten Centimetertheilung auf dem Blech so angeschraubt, dass sie alle gleich weit über den Rand des Blechs vorstehen. Die Löcher sind so weit gebohrt, dass die Schrauben in ihnen den zur Einstellung nöthigen Spielraum haben. Dann werden die

Zähne mittelst eines feinen Stellzirkels möglichst genau auf den gewünschten Abstand — 2, 3 oder 4 cm — eingestellt und controlirt, sodass ein Fehler von 0,1 mm in der Einstellung der Zähne keinenfalls überschritten wird.

Mit der Schraube f wird demnächst das Blech am Pendel mässig angezogen und um f durch Klopfen so gedreht, dass alle Zähne gleichzeitig bei allmählichem Heben der Schraube q die Karte eben zu berühren beginnen. In dieser Stellung wird das Blech festgeschraubt und endlich die Karte so gestellt, dass der Ton deutlich und mit möglichst wenig Nebengeräusch entsteht.

Den Hauptimpuls gibt die Karte, wenn sie von einem Zahne losgelassen wird, während das Anschlagen der Zähne kaum zu hören ist. Deshalb wirkt der vom ersten Zahn mitgetheilte Impuls nicht störend, was geschehen müsste, wenn beim Anschlagen der Hauptimpuls entstände; denn der erste Zahn trifft die ruhende, die folgenden die schon bewegte Karte.

Das Pendel gab die besten Töne, wenn es mit dem Rande der Zähne voran, also wie der Pfeil in Taf. I Fig. 1 läuft, die Karte streifte; dementsprechend sind also die Zähne gestellt.

Der Abstand je zweier Zähne wurde nicht kleiner als 2 cm genommen. Eine Aenderung der Tonhöhe bei einer und derselben Fallhöhe liess sich durch Vergrösserung dieses Abstandes auf 3, 4 und 5 cm erreichen, sodass also in gewissen Grenzen eine bestimmte Tonhöhe nicht an eine bestimmte Fallhöhe gebunden ist.

Um die Geschwindigkeit v_h der Zähne im tiefsten Punkte aus der Fallhöhe zu bestimmen, wird zunächst durch Vergleich mit einem Fadenpendel der Schwingungspunkt des Pendels ermittelt, an dem Brett b die Höhe der tiefsten Lage des Schwingungspunktes markirt und die Fallhöhe desselben bei aufgehaktem Pendel gemessen. Die letztere und das Verhältniss der Abstände des Schwingungspunktes und der Zahnränder vom Pendeldrehpunkt geben v_h.

Die mit dem Chronoskop bestimmten Geschwindigkeiten stimmten mit den v_h innerhalb der Genauigkeit des Chrono-

skops gut überein. Andererseits ergibt sich noch einmal aus der Tonhöhe des Pendeltones und dem Abstande der Zähne die Geschwindigkeit v_n der Zähne im tiefsten Punkt.

Man liess nun, um nach der Handbewegung beim Auslösen des Pendels die zum Sammeln der vollsten Aufmerksamkeit für die Beobachtung nöthige Zeit zu haben, das Pendel erst auf seinem ersten Rückgange an die Karte anschlagen. Infolge dessen wird v_n im Mittel um ca. 2,2 Proc. kleiner als v_h.

Als zweite Tonquelle, welche die Vergleichstöne lieferte, diente ein Monochord. Eine Messingsaite von 1500 mm Länge war so gestimmt, dass bei der Einstellung des Steges auf den Theilstrich 375 mm der Ton des kürzern Theils der Saite dem einer Stimmgabel von 261 Schwingungen in der Secunde möglichst gleich war. Die Länge der Saite, die diesen Ton wirklich gibt, wird sodann durch häufige Versuche bestimmt und aus dieser Länge unter Berücksichtigung des empirisch durch einer Reihe König'scher Stimmgabeln ermittelten Einflusses der Steifigkeit und Ungleichmässigkeit der Saite die Tonhöhe der bei den Versuchen benutzten Vergleichstöne berechnet.

Beobachtungsmethode. Für einen bestimmten Abstand α der Zähne sei ihre volle Zahl an dem Blech angesetzt, und auf dem Monochord, dessen Scala während der Einstellung dem Auge des Beobachters an der abzulesenden Stelle durch den Steg verdeckt ist, wird, unter Abdämpfung des zweiten Saitentheils mittelst eines leichten Tuches, der Ton gesucht, der noch eben von dem des Pendels als höher zu unterscheiden ist. Das Monochord erregt dabei ein leiser Anschlag mit einem leichten Lederhammer. Man vergleicht die Töne, indem man entweder das tönende Monochord kurz ehe der Ton des Pendels kommt, abdämpft oder es während desselben weiterklingen lässt, oder endlich indem man es unmittelbar nach ihm anschlägt, bis die richtige Stellung des Steges gefunden ist. Ebenso wird der eben als tiefer erkennbare Ton des Monochords bestimmt und beide Bestimmungen abwechselnd gewöhnlich dreimal wiederholt. Das Verhältniss der Schwingungszahlen des so beobachteten er-

kennbar tiefern zu der des erkennbar höhern Tones nennen wir das „charakteristische Intervall“ — kurz „ch. J.“ — für die betreffende Zahnzahl. Das was wir „ch. J.“ nennen, ist also das doppelte des Intervalls, welches zwei für das Ohr noch eben unterscheidbaren Töne bilden. Unter folgeweisem Abschrauben der äussersten Zähne wiederholte man für jede Zahnzahl dasselbe. Vor und nach jeder Beobachtungsreihe wurde die Saitenlänge, welche 261 Schwingungen gab (s. p. 5) bestimmt.

Fehlerquellen. Es liegt in der gestellten Aufgabe, dass eine gewisse Subjectivität der Beurtheilung des „ch. J.“, ganz abgesehen von der Versuchsanordnung, unvermeidlich ist. Diese zeigte sich zunächst dadurch, dass es vieler Versuchsreihen bedurfte, um zu einigermassen constanten Resultaten zu gelangen. Jedoch die Curven, die man sich mit der Anzahl der angewandten Zähne als Abscissen und dem beobachteten „ch. J.“ als Ordinaten construirt, haben bei der ersten Versuchsreihe schon dieselbe Form, wie bei den endgültigen; also nicht die Aenderung des „ch. J.“ mit der Zahnzahl, sondern nur sein absoluter Werth änderte sich mit zunehmender Uebung und Sicherheit der Beobachtung. Dabei muss ich erwähnen, dass das geringste Geräusch im Zimmer oder in der Umgebung eine normale Beobachtung unmöglich macht. Deshalb mussten alle Beobachtungen nachts angestellt werden. Schlagen von Stadtuhren, Sprechen auf der Strasse u. dgl. störte selbst bei geschlossenen Fenstern eine sichere Einstellung des Steges. Das zu Anfang störende schnarrende Geräusch der Zähne lernt man leicht überhören, wenn die Kante gut eingestellt ist.

Eine weitere Schwierigkeit bietet die Nothwendigkeit, alle Eigentöne der am Pendel befindlichen oder mit der Karte verbundenen Theile des Apparates abzudämpfen, die beim Anschlagen der Zähne an die Karte entstehen und gelegentlich den zu beobachtenden Ton verstärken oder modificiren könnten. Durch Anschlagen der einzelnen Theile mit dem Lederhammer suchte man diese Töne auf und machte die wenigen, die sich bei den mannichfachen Verschraubungen etc. der Theile des Apparates doch noch erkennen liessen,

durch Einstopfen von Zeug u. dgl. in Zwischenräume, Belasten der betreffenden Holztheile etc. möglichst unschädlich, bis man keine Eigentöne bei neuem Klopfen wiederfand. An dem Kartenstück, das ca. 20 mm breit war und 12—15 mm aus den es haltenden Holzwangen hervorragte, waren keine Eigentöne zu erkennen, die in den Bereich der beobachteten Tonhöhen gefallen wären. Der Eigenton des elastischen Holzstreifens, der die Wangen für die Karte trug, war, wie pag. 3 erwähnt, durch Kautschukeinlagen unterdrückt. Das Blech verlor durch Aufschrauben einer Holzleiste (s. Taf. I Fig. 1) seinen Eigenton vollständig. Die dann etwa noch vorhandenen Eigentöne können die Resultate bei Anwendung von vier und mehr Zähnen nur wenig beeinflussen, da sie an Stärke gegen die zu beobachtenden Töne verschwinden. Liess man das Pendel mit z. B. nur fünf Zähnen bei jedem Rückgang die Karte streifend ausschwingen, so ergab sich bei dem ganz allmählichen Sinken des Tones nie eine durch etwaige Resonnanz des Apparates erzeugte Verstärkung an einer Stelle der Tonreihe.

Die unvermeidlichen kleinen Fehler in der Einstellung einzelner Zähne werden das „ch. J." umsomehr beeinflussen, je kleiner das beobachtete „ch. J." ist; aber ihr Einfluss muss immer klein bleiben, da das „ch. J." im allgemeinen grösser als 0,992, d. h. die beobachteten Intervalle zwischen dem Tone des Pendels und dem des Monochords nicht kleiner als 0,996 werden.[1])

Eine weitere Fehlerquelle ist die, dass die Fallhöhe, also auch die Geschwindigkeit des Pendels eine andere ist, wenn die ersten und letzten Zähne, als wenn die mittelsten die Karte streifen, d. h. dass der Pendelton selbst vom Anfang zur Mitte sich erhöht und zum Schluss wieder vertieft. Das Intervall, das der zu Anfang des Blechs entstehende Ton mit dem von der Mitte erregten bildet, ist berechnet und wird in der Tabelle unter Δv_1 angegeben werden. Dasselbe wird bei der grössten Zahnzahl und der kleinsten Fallhöhe den grössten Einfluss haben.

1) Man vergleiche über diesen Punkt auch Seebeck's oben citirte Arbeit.

Ferner wird durch das Streifen der Zähne an der Karte die Geschwindigkeit der Pendelbewegung — abgesehen von der eben besprochenen Erhöhung und Vertiefung — abnehmen, während der Ton entsteht. Um das Intervall, durch welches infolge dieses Umstandes der Ton während seiner Dauer sinken wird, ungefähr schätzen zu können, liess man zunächst das Pendel bei jedem Rückgang anstreifend schwingen, bis es die tiefere Octave des Anfangstones erreichte. Dazu seien bei 16 Zähnen 40 Doppelschwingungen nöthig; liess man es jetzt 36mal frei hin- und hergehen, dann anstreifen, so kam man beim 42. Rückgange des Pendels zur Octave. 36maliges Anstreifen des Pendels hat hier also ein Intervall von 20:21 bewirkt.

Da es sich nun zeigte, dass mit abnehmender Geschwindigkeit der verzögernde Einfluss durch das Anstreifen sehr bedeutend zunahm, so muss das durch einmaliges Anstreifen verursachte Intervall hier jedenfalls viel kleiner als 721:720 sein. Da jedoch kein sicherer Anhaltspunkt für die Grösse des so gemachten Fehlers zu finden ist, so sind einfach die in dieser Weise überschlagenen Intervalle des Tones zu Anfang und zu Ende des Anstreifens für 16 Zähne in der Tabelle unter Δb_2 angegeben. Der Einfluss dieser letzten beiden Fehlerquellen macht sich bei einer der angeführten Beobachtungsreihen — s. die eingeklammerten Zahlen von Nr. 7 — der Tabelle bemerkbar.

Resultate. Ich lasse zunächst die Zusammenstellung der Resultate in einer Tabelle folgen. In der zweiten bis neunten Spalte (vertical) gibt die erste Reihe (horizontal) die Fallhöhe h, die zweite den Abstand α benachbarter Zähne, die dritte die Tonhöhe des Pendeltones, wie sie sich als Mittel aus den Mitten aller Grenzen des „ch. J." für die verschiedenen Zahnzahlen ergibt. Diese Mitten, ausgedrückt in Schwingungszahlen, sind bei sonst gleichen Umständen und bei fünf und mehr Zähnen niemals um mehr als 0,2 Proc. von ihrem Mittel verschieden. Ferner gibt die vierte Reihe die aus dem Zahnabstand und der Tonhöhe gefundene Geschwindigkeit v_n, die fünfte die aus der Fallhöhe berechnete

Geschwindigkeit $v_h \left(\frac{m}{sec}\right)$ im tiefsten Punkt, die sechste und siebente Δv_1 und Δv_2 (cf. p. 7. 8). Die achte Reihe enthält die Zahl, welche die zeitliche Aufeinanderfolge der Versuchsreihen bezeichnet, die 9. bis 23. Reihe endlich die „ch. J." für die in gleicher Reihe in der ersten Spalte angegebenen Zahnzahlen. Zu den „ch. J." jeder Versuchsreihe gehören die in denselben Spalten oben verzeichneten anderen Grössen. Die zehnte Spalte enthält die Mittel der „ch. J." je für dieselben Zahnzahlen — hier sind die eingeklammerten Zahlen aus dem oben p. 8 angeführten Grunde ausser Acht gelassen —, die elfte Spalte die nach später anzuführender Methode berechneten „ch. J." und die zwölfte die Fehler der beobachteten gegen die berechneten Werthe.

k	986	800	751	453	800	238	453	453	—	—	—
α	20	20	20	20	30	20	30	40	—	—	—
n	244,2	221,5	212,3	164,1	147,3	120,5	110,4	81,4	—	—	—
r_n	4,88	4,43	4,25	3,28	4,42	2,41	3,31	3,26	—	—	—
v_h	4,98	4,49	4,35	3,38	4,49	2,45	3,38	3,38	—	—	—
Δr_1	0,9983	0,9979	0,9977	0,9963	0,9979	0,9928	0,9963	0,9963	—	—	—
Δr_2	0,9990	0,9989	0,9988	0,9980	0,9989	0,9950	0,9980	0,9980	—	—	—

„Charakteristische Intervalle".

Nr.	6	1	8	3	2	7	5	4	Mittel	ber. ch. J.	Fehler
z = 2	0,9732	0,9639	0,9731	0,9726	0,9681	0,9737	0,9741	0,9727	0,9714	0,9582	+0,0132
3	—	0,9791	0,9788	0,9773	0,9778	0,9797	0,9803	0,9798	0,9790	0,9763	+0,0027
4	0,9811	0,9809	0,9836	0,9816	0,9826	0,9823	0,9836	0,9808	0,9821	0,9823	−0,0002
5	0,9843	0,9844	0,9846	0,9858	0,9855	0,9860	0,9871	0,9844	0,9853	0,9853	± 00
6	0,9860	0,9871	0,9858	0,9871	0,9876	0,9878	0,9882	0,9868	0,9871	0,9872	− 01
7	0,9874	0,9884	0,9867	0,9866	0,9887	0,9887	0,9899	0,9896	0,9883	0,9884	− 01
8	0,9899	0,9886	0,9876	0,9892	0,9915	0,9900	0,9904	0,9903	0,9897	0,9892	+ 05
9	0,9899	0,9888	0,9891	0,9907	0,9915	0,9906	0,9915	—	0,9903	0,9899	+ 04
10	0,9913	0,9893	0,9896	0,9912	0,9894	0,9898	0,9928	—	0,9906	0,9904	+ 02
11	0,9911	0,9900	0,9900	0,9913	0,9901	0,9899	0,9926	—	0,9909	0,9908	+ 01
12	0,9912	0,9894	0,9907	0,9910	—	(0,9889)	—	—	0,9906	0,9911	− 05
13	0,9914	0,9901	0,9910	0,9931	—	(0,9891)	—	—	0,9914	0,9914	± 00
14	0,9906	0,9903	0,9914	0,9927	—	(0,9893)	—	—	0,9913	0,9916	− 03
15	0,9898	0,9921	0,9922	0,9921	—	(0,9893)	—	—	0,9916	0,9918	− 02
16	0,9914	0,9931	0,9922	0,9920	—	(0,9896)	—	—	0,9922	0,9920	+ 02

In der Tabelle sind von etwa 25 überhaupt angestellten Versuchsreihen die acht letzten vollzählig gegeben. Die „ch. J." sind nur bis zu 16 Zähnen mitgetheilt, da mit dem

grössern Blech (s. p. 3) auch bei den bezüglich Δv_1 und Δv_2 möglichst günstigen Bedingungen ein weiteres Abnehmen der „ch. J." nicht zu erreichen war. Es sind demnach hier, wohl infolge der Unvollkommenheit des Pendeltones, die kleinsten beobachteten Intervalle $\frac{249}{250}$, während ich beim Vergleich von Monochord und Stimmgabel Tonhöhenunterschiede im Intervalle von $\frac{499}{500}$ noch sicher erkannte. Die mit mehr als 16 Zähnen erreichten Werthe schwankten unregelmässig um den zu 16 Zähnen gehörigen oder wurden, wie dies bei Nr. 7 schon von 12 Zähnen an sicher der Fall ist, infolge der Δv_1 und Δv_2 wieder grösser. Daraus folgt zunächst, dass hier im Einklang mit Hrn. Exners Beobachtung (derselbe fand 17, l. c.) von 16 Impulsen an die Charakteristik eines Tones bezüglich seiner Tonhöhe nicht mehr zunimmt.

Was die berechneten Werthe der „ch. J." anlangt, so geht aus Helmholtz „Lehre von den Tonempfindungen" folgendes für die vorliegenden Beobachtungen hervor. Denken wir uns den Eigenton einer aus der Reihe der Corti'schen Fasern angegeben, so wird infolge des Mitschwingens diese selbst die grösste Amplitude haben, die benachbarten um so kleinere, je weiter sie symmetrisch nach beiden Seiten in der Reihe von der stärkst schwingenden entfernt liegen. Wenn nun nach zwei Schwingungen des die Corti'schen Fasern zum Mitschwingen erregenden Tones die beiderseits $n$te Faser mit $\frac{1}{x}$ der Intensität der mittelsten stärkst erregten schwingt, so schwingt nach Helmholtz nach drei Schwingungen die $\frac{n}{2}$te mit derselben Intensität $\frac{1}{x}$, nach vier Schwingungen die $\frac{n}{3}$te, ... nach m Schwingungen die $\frac{n}{m-1}$te.

Demnach wird die Vertheilung der Amplituden der durch den dauernden Monochordton in den Corti'schen Fasern erregten Schwingungen stets die gleiche sein.

Unter der an sich wahrscheinlichen Annahme nun, dass ein und dasselbe Ohr im Stande ist, den Monochordton dann von demjenigen des Pendels zu unterscheiden, wenn die in-

folge des Monochordtones stärkst schwingende Faser durch den Pendelton zu einem bestimmten Bruchtheil der Amplitude erregt wird, mit der die durch den Pendelton am stärksten erregte Faser schwingt, so müssten auch unsere „ch. J." stets gleich sein dem „ch. J." für zwei Schwingungen dividirt durch die um 1 verminderte Zahnzahl.[1]) Dann hätte man jedoch bei einer beliebig grossen Zahnzahl ein beliebig kleines — beliebig der Einheit sich näherndes — „ch. J." zu erwarten, welches, wie oben erwähnt, hier nicht erreicht wird, auch bei gleicher Klangfarbe beider zu vergleichenden Töne nie erreicht werden kann. Aber es wird für ein bestimmtes Ohr und zwei Töne von gegebener Klangfarbe, folglich auch für unseren Pendelton und Monochordton, ein kleinstes „ch. J." geben, welchem man sich etwa auf Grund der Helmholtz'schen Formel mit wachsender Zahnzahl immer mehr nähern müsste. Wenn es also erlaubt ist, dieses „kleinste ch. J." für die Vergleichung zweier Töne von gegebener Klangfarbe als Einklang aufzufassen, so müssten die Ueberschüsse, wenn ich mich so ausdrücken darf, der beobachteten „ch. J." über das „kleinste ch. J." dem Helmholtz'schen Gesetze folgen. Mit anderen Worten, diese Ueberschüsse, multiplicirt je mit der ihnen zukommenden um 1 verminderten Impulszahl, müssten ein constantes Product geben. Da aber die Beobachtung infolge der p. 6—8 erörterten „Fehlerquellen" dieses „kleinste ch. J." nicht liefern kann, so ist es durch Rechnung oder auch graphisch zu ermitteln. Für den Werth 0,9944 des „kleinsten ch. J." — womit also das dem Ohre unerreichbare Grenzintervall zu 0,9972 wird — werden diese Producte wirklich sehr nahe constant, nur für $z = 3$ und $z = 2$ werden sie aus später zu erörternden Gründen zu klein. Die in der Tabelle in der elften Spalte angeführten Werthe der „ch. J." wurden nun so gefunden, dass man das Mittel der constanten Producte je durch die um 1 verminderte Zahnzahl dividirte und zu dem „kleinsten ch. J.", welches man

1) Wir nennen, dem gewöhnlichen Sprachgebrauch entsprechend, das Intervall 1:2 halb so gross als 1:4, und ebenso 0,996 halb so gross als 0,992.

gleich 0,9944 setzte, addirte. Durch die Schwierigkeit der Beobachtung sind wohl die geringen Abweichungen der beobachteten von den berechneten Werthen genügend gerechtfertigt. Den Grund für die schlechte Uebereinstimmung bei $z = 3$ und $z = 2$ glaube ich trotz aller Vorsicht in dem Pendeltone nahe liegenden schwachen Eigentönen des Apparates, die die selbst schwachen Pendeltöne von zwei und drei Zähnen verstärkten und verlängerten, um so mehr suchen zu dürfen, weil, während bei fünf und mehr Zähnen, wo die Pendeltöne noch stark sind, die Aenderung ihrer Schwingungszahlen, wie p. 9 erwähnt, 0,2 Proc. nie überstieg, sie bei drei Zähnen 1 Proc., bei zwei Zähnen gelegentlich 3 Proc. erreicht. Die Anwendbarkeit der Helmholtz'schen Formel vorausgesetzt, würde also für drei und 2 Zähne der berechnete Werth der „ch. J." der wahrscheinlichere sein.

Ein Blick auf die Tabelle veranlasst noch zu folgenden Bemerkungen. Man sieht, wie trotz der grossen Zahl der vorausgegangenen nicht mitgetheilten Beobachtungsreihen mit zunehmender Nummer in der achten Reihe, also durch fortgesetzte Uebung in der Beurtheilung die Intervalle im Mittel immer noch etwas abnehmen. Ausserdem scheint es, und hauptsächlich die graphische Darstellung der einzelnen Curven macht dies wahrscheinlich, dass mit abnehmender Schwingungszahl n — die Beobachtungsreihen sind in der Tabelle nach abnehmenden Schwingungszahlen geordnet — die „ch. J." ebenfalls um ein weniges abnehmen. Das würde vielleicht dahin zu deuten sein, dass bei abnehmender Schwingungszahl n der Ton der gleichen Zahnzahl z dem Ohre eine grössere Zeit zur Vergleichung des Pendeltones mit dem Monochordtone zur Verfügung stellt und es ihm dadurch ermöglicht, kleinere Tonhöhenunterschiede noch aufzufassen. Ich lege jedoch auf diesen Umstand um so weniger Gewicht, da die tieferen Töne häufig auch bei grossen Fallhöhen durch grössere Zahnabstände erzeugt wurden, sodass die kleineren „ch. J." der tieferen Töne auch eine Folge der verhältnissmässig kleineren Fehler in der Zahneinstellung sein können.

Das Resultat der vorliegenden Arbeit dürfte als eine

mindestens annähernde experimentelle Bestätigung der Helmholtz'schen Theorie des Mitschwingens der tonempfindenden Organe im Ohre aufzufassen sein; es dürfte ferner feststellen, dass ein Ton von absolut genommen zwei Schwingungen in den Grenzen der beobachteten Tonhöhen von einem andauernden Tone jedenfalls dann als verschieden erkennbar ist, wenn er mit demselben ein Intervall von $\frac{24}{25}$ [1]) bildet, und dass schliesslich in genügender Uebereinstimmung mit den Untersuchungen von Hrn. S. Exner und Hrn. Auerbach für ein Ohr von mittlerer Feinheit in Auffassung der Tonhöhen die mögliche Schärfe in der Definition der Höhe eines Tones nicht mehr merklich zunimmt, nachdem 16 Schwingungen desselben vergangen sind.

Physikal. Institut der Univ. Strassburg, Aug. 1879.

II. *Ueber die Torsion*[2]*; von E. Warburg.*

§ 1. Die vorliegende Untersuchung über die Torsion von Metalldrähten wurde ursprünglich unternommen in der Absicht, eine von mir entwickelte Theorie[3]) zu prüfen, in welcher ich die Hypothese, ein fester Körper bestehe aus beliebig gestalteten, gleichartigen Molecülen, in ihre Consequenzen verfolgte. Da ich indessen in dieser Theorie vorerst einen guten Leitfaden für die experimentelle Untersuchung nicht gefunden habe, so ziehe ich es vor, die Resultate der Versuche ohne Rücksicht auf die genannte Theorie darzustellen.

In dem von mir zur Untersuchung der Torsionselasticität benutzten Apparat wird das Torsionsmoment eines Drahtes

1) Vergl. Wied. Ann. 7. p. 336. 1879.

2) Ausführlicher mitgetheilt in den Freib. Ber. 7. p. 444—499. 1880.

3) Freib. Ber. 7. p. 225—59. 1878. — Wied. Ann. 4. p. 232—49. 1878.

verglichen mit dem Directionsmoment[1]), welches auf einen bifilar aufgehängten Körper K_1 wirkt. Der zu prüfende Draht hängt in der Mitte zwischen den Fäden herab und der an dem Draht aufgehängte Körper K_2 kann mit K_1 durch leichte Bügel verbunden werden, welche über Stahlspitzen geschoben sind und bewirken, dass die Drehungen von K_1 und K_2 um die gemeinschaftliche Drehungsaxe stets dieselben sind.

Taf. I Fig. 4 zeigt die einzelnen Theile des Apparates und ihre Anwendung.

Alles wird oben getragen von einem in die Wand eingelassenen starken eisernen Arm A, welcher aus einem geraden (g) und einem ringförmigen Theil (a) besteht. An den geraden Theil ist ein Halter h aus starkem Messingblech durch die Köpfe zweier Metallschrauben e, e befestigt, welche durch einen langen und breiten Schlitz in dem Halter hindurchgehen; in den untern Theil des Halters sind zwei schwach conische Löcher im Abstand von ungefähr 30 mm eingebohrt, in welchen mittelst zweier Metallpflöcke f, f die beiden Enden des um die ungefähr 30 mm breite, leicht drehbare Rolle r geschlungenen Fadens festgeklemmt werden. Lockert man die Schrauben e, so kann durch Verschieben des Halters h die Mittellinie der beiden Fadentheile mit der Axe des zwischen ihnen herabhängenden Drahtes zur Coincidenz gebracht werden. An die Rolle ist das Schiffchen n

---

1) Das Drehungsmoment, welches auf einen kreisförmig cylindrischen Draht vom Radius R und der Länge L wirkt, wenn der untere Querschnitt gegen den obern um den Winkel φ verdreht ist, beträgt $\tau \cdot \frac{R^4}{L} \cdot \varphi = D_2 \cdot \varphi$, wo τ eine dem Material des Drahtes eigenthümliche Constante ist. τ nenne ich den Torsionscoëfficienten, $D_2 = \tau \cdot \frac{R^4}{L}$ das Torsionsmoment des Drahtes. Das Drehungsmoment, welches auf einen bifilar aufgehängten Körper wirkt, wenn er um den unendlich kleinen Winkel Θ aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht ist, beträgt:

$$D_1 \Theta = (\Delta + 2 \cdot T) \cdot \Theta,$$

wo Δ von der Schwere herrührt, und T das Torsionsmoment eines der Fäden ist. D_1 nenne ich das Directionsmoment des bifilar aufgehängten Körpers.

mit dem Gewicht p, dem Ablesespiegel m und den Stahlspitzen s_1, s_1 befestigt.

In dem ringförmigen Theil a des Armes A wird durch drei starke Schrauben der von Breithaupt angefertigte Torsionskreis T gehalten, der in ganze Grade getheilt ist und mittelst Nonius Zehntelgrade angibt. Die kreisförmige Alhidale trägt die Klemme k mit einer der Axe des Kreises entsprechenden Marke, welche den Befestigungspunkt des obern Drahtendes angibt. Das untere Drahtende ist in die um $\alpha\alpha$ drehbare Walze γ eingeklemmt; die Drehungsaxe $\alpha\alpha$ ist verbunden mit dem horizontalen Ring δ, welcher selbst um die zu $\alpha\alpha$ senkrechte Axe $\beta\beta$ drehbar ist. Mit der Drehungsaxe $\beta\beta$ ist sodann der vertikale Ring R verbunden. Die Aufhängung des Ringes R mittelst gekreuzter Axen hat erstens den Zweck, Biegungen des Drahtes zu vermeiden. In der That wird durch diese Aufhängung bewirkt, dass die Wirkungslinie des mit $\beta\beta$ verbundenen Gewichtes stets durch den Durchschnittspunkt von $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ hindurchgeht; endigt nun der Draht in diesem Punkt, so ist das auf ihn wirkende biegende Moment Null. Die Drehbarkeit der Axen $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ wird, wo es erforderlich scheint, durch Anziehen der Schrauben ε, ε und ι, ι aufgehoben. Durch diese Schrauben kann auch der Durchschnittspunkt von $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ verlegt werden, was bei einer andern Anwendung der besprochenen Aufhängung benutzt wird. Der Ring R geht um den Körper K_1 herum, er trägt zwei Stahlspitzen s_2, s_2, über welche Glasperlen geschoben sind, und welche durch sehr leichte übergelegte Bügel b, b mit s_1, s_1 verbunden werden können. Durch ein an dem Ring R verschiebbares Laufgewicht q (galvan. Klemme) kann die Einstellung des Ringes R gegen das Schiffchen n verändert und dadurch bewirkt werden, dass, wenn durch passende Drehung des Drahtes der Abstand zweier Spitzen s_1, s_2 der Länge des einen Bügels gleich gemacht ist, dann der Abstand der andern beiden Spitzen s_1, s_2 der Länge des andern Bügels gleich kommt.

An den Ring R kann mittelst der an seinen untern Theil angebrachten Klemme entweder eine Vorrichtung zur Aufnahme spannender Gewichte, oder ein Draht mit verticalem

Blech befestigt werden, welches in ein ringförmiges, mit Oel gefülltes Gefäss taucht; wo es weniger auf Schnelligkeit als auf grosse Präcision ankommt, wird die Oeldämpfung nicht benutzt.

Gegen Luftströmungen wird das Ganze durch ein Pappgehäuse mit passend angebrachten Durchsichten geschützt.

Weitere Vorrichtungen werden an dem gehörigen Ort beschrieben werden.

§ 2. Mittelst dieses Apparates können dreierlei Bestimmungen ausgeführt werden.

Erstens kann das Torsionsmoment D_2 des Drahtes bestimmt werden in Theilen des Directionsmomentes D_1 des bifilar aufgehängten Körpers, d. h. $\frac{D_2}{D_1}$ bestimmt werden durch Ablenkungsversuche. Dazu wird dem obern Drahtquerschnitt eine gemessene Drehung ertheilt und die dadurch hervorgebrachte Drehung der verbundenen Körper K_1 und K_2 beobachtet.

Der Torsionskreis werde um den Winkel $\varphi' - \varphi$ gedreht, und dabei gehe der Winkel Θ, um welchen der bifilar aufgehängte Körper K_1 aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht ist, in Θ' über; dann ist

$$(1) \qquad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\sin\Theta' - \sin\Theta}{\varphi' - \varphi - (\Theta' - \Theta)} \left\{1 + \frac{2T}{D_1}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{\sin\Theta' - \sin\Theta} - 1\right)\right\},$$

wo T das Torsionsmoment eines der beiden Fäden bedeutet, an welchen K_1 aufgehängt ist.

Indem man sich einen angenäherten Werth von $\frac{2T}{D_1}$ leicht verschafft, kann der Unterschied der Klammergrösse von der Einheit, wenn er überall innerhalb des zu Berücksichtigenden liegt, leicht mit hinlänglicher Genauigkeit berechnet werden.

Auch durch kleine temporäre Torsionen entstanden, wie schon Wertheim[1]) und G. Wiedemann[2]) bei ähnlichen Versuchen gefunden haben, zwar nur sehr kleine, aber nicht unmerkliche permanente Torsionen, welche sich indess durch

1) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3) **50.** p. 221. 1857.
2) Wiedemann, Baseler Verhandlungen **2.** p. 178. 1860.

Wiederholung der Drehung von φ auf φ' nicht vergrösserten. Für Θ wurde immer der Werth genommen, welchen der betreffende Winkel zeigte, wenn der Torsionskreis nach erfolgter Drehung von φ auf φ' wieder auf φ zurückgedreht worden war. Man bestimmte $\frac{D_2}{D_1}$ jedesmal für die Drehung um $\varphi' - \varphi$ nach der einen und nach der andern Seite und nahm aus beiden Bestimmungen das Mittel.

Zweitens kann die Bestimmung von $\frac{D_2}{D_1}$ durch Schwingungsversuche ausgeführt werden; dazu beobachtet man drei Schwingungsdauern; die Schwingungsdauer des bifilar aufgehängten Körpers K_1 (τ_1), des am Draht aufgehängten Körpers K_2 (τ_2) und des Systems, welches man bildet, indem man K_1 und K_2 durch die Bügel verbindet (τ_3).

Sind i_1, i_2, i_3 die vom Luftwiderstand herrührenden Vergrösserungen des Trägheitsmoments der Körper K_1, K_2 und des Systems bei den auf unendlich kleine Amplituden bezüglichen Schwingungsdauern τ_1, τ_2 und τ_3, so ist:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_3^2} + 4\pi^2 \cdot \frac{i_3 - i_1 - i_2}{D_1 (\tau_3^2 - \tau_2^2)}. \tag{2}$$

Wäre die Vergrösserung des Trägheitsmoments durch den Luftwiderstand von der Schwingungsdauer unabhängig, so würde das zweite Glied auf der rechten Seite verschwinden, und man hätte:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_3^2}. \tag{2a}$$

Dass die letzte Formel für meinen Apparat ohne merklichen Fehler angewandt werden kann, lehrt folgendes Experiment. Es wurden an den Ring R zwei Cartonblätter so angeheftet, dass sie beim Schwingen mit ihren breiten Flächen gegen die Luft stiessen; die stossende Fläche des Ringes betrug beiläufig 73 qcm bei einem mittlern Abstand = 6 cm von der Drehungsaxe; die der Cartonblätter 128 qcm bei einem mittlern Abstand = 7 cm von der Axe. Es wurden nun die drei Schwingungsdauern τ_1, τ_2, τ_3 gemessen und $\frac{D_2}{D_1}$ für den Stahldraht (0,343 mm Durchmesser, 0,524 mm Länge), an welchem bei diesen Versuchen K_2 hing, berechnet. Es ergab sich:

Ring mit Cartonblättern		Ring ohne Cartonblätter	
Temp. 18°		Temp. 18°	
$\tau_1 = 1{,}4009''$		$\tau_1 = 1{,}4009''$	
$\tau_2 = 13{,}017$	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2088$	$\tau_2 = 12{,}127$	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2088$
$\tau_3 = 5{,}5577$		$\tau_3 = 5{,}1986$	

Aus der vollständigen Uebereinstimmung der in beiden Versuchsreihen gefundenen Werthe von $\frac{D_2}{D_1}$ folgt, dass die Gleichung 2a ohne merklichen Fehler benutzt werden darf.

Eine wichtige Fehlerquelle kann die Bestimmung von τ_3 beeinflussen. Es ist in der Theorie vorausgesetzt, dass die Drehungen der mittelst der Bügel verbundenen Körper K_1 und K_2 dieselben seien. Wenn nun die Reibung der Bügel an den Glasperlen, auf welchen sie ruhen, nicht hinreichend ist, so geschieht es, dass wenn beim Springen K_1 schon zur Ruhe gekommen ist, K_2 noch etwas weiter sich dreht, da die Bügel an den Spitzen nicht genau anschliessen. Diese Unregelmässigkeit, welche besonders leicht eintritt, wenn das Trägheitsmoment von K_2 gross ist, würde eine scharfe Bestimmung von τ_3 unmöglich machen. Ich vergrösserte daher die Reibung an den Bügeln dadurch, dass ich zwischen sie und die Perlen etwas Baumwolle brachte; wählte ich dabei die Amplituden hinreichend klein (etwa 1°), so fand ich die genannte Fehlerquelle unmerklich.

Wegen der thermischen Ausdehnung der verschiedenen Theile des Apparates, sowie wegen der Abhängigkeit des Torsionscoëfficienten von der Temperatur müssen sowohl die statischen wie die dynamischen Versuche auf gleiche Temperatur reducirt werden; die erforderlichen Reductionsformeln sind in § 11 der ausführlichen Abhandlung zusammengestellt.

Drittens kann der Apparat zu einem beliebig empfindlichen Instrument für kleine Aenderungen des Torsionsmoments gemacht werden; dazu muss dem Draht eine Torsion ertheilt werden, durch welche das System um 90° oder mehr herumgedreht wird. Zur Erläuterung dieses Falls genügt es, aus einer im § 8 der ausführlichen Abhandlung durchgeführten Untersuchung hier zu bemerken, dass für

$\frac{D_2}{D_1} = \varepsilon$ kleiner als 1, wenn durch Θ_1 die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\varepsilon + \cos \Theta = 0$$

bezeichnet wird, nur Werthen von Θ, die kleiner als Θ_1 sind, stabile Gleichgewichtslagen entsprechen; ferner, dass für $\Theta = \Theta_1$ die Empfindlichkeit des Apparates in Bezug auf ε, welche mit $\frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon}$ proportional ist, unendlich gross wird. Durch passende Drehung des Torsionskreises kann man nun Θ dem Werth Θ_1 beliebig annähern und so die Empfindlichkeit beliebig gross machen.

Wie ich nachträglich gefunden, hat zuerst J. A. Broun[1]) und unabhängig von ihm Babinet[2]) eine ähnliche Vorrichtung zur Messung der Variation der Schwere angegeben, deren Intensität in meinem Apparat als constant vorausgesetzt wird.

§ 3. Meine Versuche betrafen Drähte aus Stahl, Eisen, Kupfer, deren Durchmesser 0,3 bis 0,5 mm und deren Länge etwa 520 mm betrug; sämmtliche Drähte wurden vor den Versuchen in freier Luft oder im Wasserstoffstrom unter schwacher Spannung ausgeglüht; sie hingen dann, am obern Ende befestigt, auch ohne Belastung ganz gerade herunter.

Ich stellte mir zuerst die Frage, inwieweit diese Substanzen, wenn man ihr Verhalten bei sehr kleinen Deformationen untersucht, die Forderungen der Elasticitätstheorie für vollkommen elastische Körper erfüllen, und zwar waren mir dabei folgende Fragen von Interesse:

Erstens, inwieweit der dynamisch und statisch bestimmte Torsionscoëfficient derselbe ist;

Zweitens, inwieweit die Spannung des Drahtes ohne Einfluss auf den Torsionscoëfficienten ist.

Nach den Versuchen von Kupffer[3]) würde der Elasti-

1) Broun, Compt. rend. **56.** p. 1135. 1861.

2) Babinet, Compt. rend. **56.** p. 244—48. 1863.

3) Kupffer, Compt. rend. Annuel 1852. Suppl. aux Annales de l'observatoire Phys. Central pour l'année 1850.

citätscoëfficient aus statischen Biegungsversuchen sich grösser ergeben, als aus Transversalschwingungen.[1])

Wertheim[2]) findet, mit Ausnahme des Eisens, den Elasticitätscoëfficienten aus Verlängerungsversuchen durchweg kleiner, als aus Transversal- und Longitudinalschwingungen und zwar gewöhnlich um mehrere Procente.

Diese auch von andern Beobachtern bestätigte Thatsache rührt nach F. Kohlrausch[3]) von der elastischen Nachwirkung her.

Der Einfluss der Spannung auf das Torsionsmoment ist von Kupffer[4]) und neuerdings von F. Braun[5]) untersucht worden; während aber Kupffer das Torsionsmoment eines 4 mm dicken Messingdrahtes durch Zufügen eines Zuges von 6,33 $\frac{kg}{mm^2}$ kaum mehr verkleinert fand, als die Veränderung der Dimensionen durch den Zug erwarten liess, würde nach F. Braun das Torsionsmoment einer 0,67 mm dicken Stahlsaite durch Zufügen eines Zuges von 8,55 $\frac{kg}{mm^2}$ eine 30—50mal so grosse Verkleinerung erfahren haben, als die ist, welche durch Veränderung der Dimensionen eintreten musste.

Man kann demnach nicht sagen, dass das vorliegende Beobachtungsmaterial zur Entscheidung der gestellten Fragen ausreiche.

Ich lasse nun zuerst in Tab. 1 das vollständige Beobachtungsmaterial für einen Stahldraht folgen und stelle sodann in der Tab. 2 die Resultate aller Versuche, soweit sie die beiden genannten Fragen betreffen, zusammen.

---

1) nach Zöppritz Rechnung, Pogg. Ann. **129.** p. 219 fl. 1866.
2) Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. **2.** p. 1 fl. 1848.
3) Kohlrausch, prakt. Phys. 3. Aufl. p. 82. 1877.
4) Kupffer, Compt. rend. Annuel. 1851.
5) Braun, Pogg. Ann. **159.** p. 352—54. 1876.

Stahldraht.

Länge 524,2 mm. $\tau_1 = 1{,}397''$. Durchmesser 0,343 mm.

Dynamische Bestimmung von $\frac{D_2}{D_1}$.

1. Reihe: Belastung A. 12. März.

Amplitude	Temp.	τ_2	τ_3	τ_2 und τ_3 red. auf 22°	
1° 6′ bis 0° 50′	22,1°	—	5,2128″	5,2128″	$\tau_1 = 1{,}397''$
1° 23′ „ 0° 43′	22,2°	—	5,2131″	5,2130″	$\tau_3 = 5{,}2129''$
4° 6′ „ 3° 20′	22,5°	12,1604″	—	12,159″	$\tau_2 = 12{,}159''$
3° 3′ „ 2° 10′	22,5°	12,1600″	—	12,159″	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2090$ bei 22°

2. Reihe: Belastung A + B. 14. März.

1° 54′ bis 0° 48′	20,9°	—	5,8836″	5,8839″	$\tau_1 = 1{,}397''$
1° 57′ „ 0° 32′	22°	—	5,8835″	5,8835″	$\tau_3 = 5{,}8838''$
4° 14′ „ 3° 7′	22,5°	13,8302″	—	13,828″	$\tau_2 = 13{,}825''$
3° 8′ „ 2° 24′	22,8°	13,8233″	—	13,820″	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2087$ bei 22°

3. Reihe: Belastung A. 14. März.

				red. auf 21°	
1° 39′ bis 0° 43′	21°	—	5,2118″	—	$\tau_1 = 1{,}397''$
2° 6′ „ 0° 48′	20,9°	—	5,2123″	—	$\tau_3 = 5{,}2121''$
2° 7′ „ 1° 12′	21°	12,1551″	—	12,155″	$\tau_2 = 12{,}156''$
6° 13′ „ 4° 29′	20,8°	12,1559″	—	12,157″	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2091$ bei 21°
					0,2090 bei 22°

4. Reihe: Belastung A + B. 14. März.

1° 10′ bis 0° 28′	21°	—	5,8847″	—	$\tau_1 = 1{,}397''$
1° 21′ „ 0° 38′	21°	—	5,8851″	—	$\tau_3 = 5{,}8849''$
6° 2′ „ 2° 51′	21,2°	13,8228″	—	13,822″	$\tau_2 = 13{,}822''$
2° 38′ „ 2° 4′	21,3°	13,8231″	—	13,822″	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2089$ bei 21°
					0,2088 bei 22°

5. Reihe: Belastung A. 14. März.

				red. auf 22°	
1° 50′ bis 0° 48′	21,5°	—	5,2120″	5,2122″	$\tau_1 = 1{,}397''$
2° 19′ „ 0° 51′	21,7°	—	5,2114″	5,2115″	$\tau_3 = 5{,}2119''$
3° 8′ „ 2° 15′	22,2°	12,1539″	—	12,153″	$\tau_2 = 12{,}155''$
3° 10′ „ 2° 13′	22,4°	12,1587″	—	12,157″	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2091$ bei 22°

Statische Bestimmung von $\frac{D_2}{D_1}$.

$\Theta_0 = -0^\circ\ 2'\ 21''$

Torsion nach der posit. Seite	Torsion nach der negat. Seite
$\Theta = -\ 0^\circ\ 3'\ 19''$	$\Theta = +\ 0^\circ\ 0'\ 41''$
$\Theta' = +\ 6^\circ\ 44'\ 9''$	$\Theta' = -\ 6^\circ\ 10'\ 12''$
$\varphi = 0$	$\varphi = 0$
$\varphi' = +\ 25^\circ\ 30'$	$\varphi' = -\ 25^\circ\ 30'$
$\Delta\alpha = -\ 0^\circ\ 5'\ 6$	$\Delta\alpha = +\ 0^\circ\ 17'\ 6$
$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2104$	$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2072$

Mittel $\frac{D_2}{D_1} = 0{,}2088$ bei $22{,}8^\circ$.

$0{,}2089$ „ 22°.

Erklärung der Bezeichnung. Θ_0 ist der Winkel, um den der bifilar aufgehängte Körper K_1 nach dem Einlegen der Bügel aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht wurde, die Torsion des Drahtes beträgt dabei immer nur einige Minuten, der Index des Torsionskreises hat dabei die durch $\varphi = 0$ bezeichnete Stellung. Nachdem die Torsion, welche durch das Drehen des Kreises von φ auf φ' hervorgebracht worden, wieder aufgehoben war, hatte der Draht eine kleine permanente Torsion erfahren, infolge deren bei gleicher Stellung des Torsionskreises ($\varphi = 0$) Θ_0 in Θ übergegangen war. Die Verschiebung $\Delta\alpha$ der Torsionsgleichgewichtslage infolge der stattgehabten Deformation berechnet sich nach der Formel $\Delta\alpha = (\Theta - \Theta_0) \cdot \frac{D_1 + D_2}{D_2}$

Tabelle 2.

Material	Spannung A = 390 g		Spannung A + B = 1309 g	
	Temp.	$\frac{D_2}{D_1}$ dyn.	$\frac{D_2}{D_1}$ stat.	$\frac{D_2}{D_1}$ dyn.	$\frac{D_2}{D_1}$ stat.
Stahl	22°	0,20903	0,20885	0,20875	—
Eisen	20°	0,2123	0,2109	0,2124	0,2109
Kupfer	20°	0,4082	0,3999	0,4089	0,3987

Dimensionen der benutzten Drähte:

	Länge	Durchmesser
Stahl	524,2 mm	0,343 mm
Eisen	520 „	0,332 „
Kupfer	520 „	0,464 „

In Betreff der Versuche sei noch bemerkt, dass bei ihnen eine Oeldämpfung nie benutzt ward; dass die Spannung B durch den in der Figur mit B bezeichneten schwach conischen Bleiklotz zugefügt wurde; endlich dass vor Beginn der definitiven Versuche durch mikroskopische Beobachtung constatirt ward, dass durch Zufügen des Gewichts B keine permanente Verlängerung des Drahtes eintrat.

Die Tabelle 2 zeigt nun Folgendes:

1) Die statisch bestimmten Torsionsmomente sind sämmtlich kleiner als die dynamisch bestimmten, die Differenzen steigen von 1 pro Mille für Stahl auf 6 pro Mille für Eisen und 28 pro Mille für Kupfer. Elastische Nachwirkung beeinflusste bei all diesen Versuchen nicht merklich die statische Bestimmung.[1]) Auf die Erklärung dieser Thatsachen weist der Umstand hin, dass, wie schon Kupffer[2]) und Pisati[3]) gezeigt haben, die Schwingungsdauer eines Metalldrahtes mit wachsender Amplitude wächst; für den von mir benutzten Kupferdraht war die Schwingungsdauer bei einer Amplitude von 7° schon im Verhältniss von 1,0023 : 1 grösser, als bei sehr kleinen Amplituden. Beim Stahl und Eisen war zwar bis zu Amplituden von 11° — den grössten, welche vorkamen — die Schwingungsdauer nicht merklich von der Amplitude abhängig; allein es wurden bei den statischen Versuchen Torsionen von 25°, bei den dynamischen hingegen sehr kleine angewandt. Die obigen Thatsachen scheinen daher ihre einfachste Erklärung darin zu finden, dass die elastischen Pressungen etwas langsamer wachsen, als die Deformationen, und zwar ist die Abweichung von der Proportionalität für Kupfer grösser als für Eisen, und für Eisen grösser als für Stahl, für das letztere Material bei den an-

1) Es soll damit nicht gesagt sein, dass die Bemerkung von Kohlrausch p. 20 bei anderen Materialien nicht in Kraft treten könne. Noch sei hier bemerkt, dass die Kraft, welche Ursache der Drahtdämpfung ist, bei der beobachteten Kleinheit der letzteren die dynamische Bestimmung des Torsionscoëfficienten höchstens um einige Milliontel des ganzen Werthes beeinflussen kann.

2) Kupffer, Mém. de l'acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg. **5.** p. 251. 1853; **6.** p. 423 ff. 1857.

3) Pisati, Gaz. chim. ital. **7.** p. 181. 1876.

gewandten Torsionen in der That kaum merklich. Es scheint damit zusammenzuhängen, dass die Elasticitätsgrenze für Stahl höher als für Eisen und für dieses höher als für Kupfer liegt.

2) Eine Abhängigkeit des Torsionscoëfficienten von der Spannung hat sich innerhalb der Versuchsgrenzen nicht ergeben.

Das grösste Gewicht hat das für den Stahl erhaltene Resultat, die angegebenen Werthe sind die Mittel aus bz. 2 und 3 unabhängigen Versuchen, wobei die einzelnen Werthe nicht um $\frac{1}{2000}$ des ganzen Werthes von einander abweichen. Der durch die Spannung B zugefügte Zug betrug $9{,}95\,\frac{kg}{mm^2}$; berechnet man danach mittelst der Elasticitätsconstanten des Stahls, indem man den Torsionscoëfficienten als constant betrachtet, $\frac{D_2}{D_1}$ für die Spannung $A+B$ aus dem für die Spannung A erhaltenen Werth, so erhält man wegen der Veränderung der Dimensionen bei $A+B$ 0,20883, welche Zahl von der beobachteten 0,20875 nicht um 0,0004 des ganzen Werthes abweicht.

Die für Eisen angegebenen, aus den dynamischen Bestimmungen folgenden Werthe sind die Mittel aus je 4 unabhängigen Versuchen, welche etwas grössere Abweichungen vom Mittel zeigen, aber nur einmal eine $^2/_5$ Proc. erreichende. Der zugefügte Zug betrug $11{,}06\,\frac{kg}{mm^2}$.

Beim Kupfer zeigte sich die Schwingungsdauer abhängig von der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit, und zwar mit wachsender Zeit abnehmend, mochte die Spannungsänderung in einer Zu- oder Abnahme der Spannung bestehen. Ueber diesen Punkt setze ich folgende Versuchsreihe hierher.

Die Spannung des Kupferdrahtes wurde am 20. März $12^h 5'$ von A auf $A+B$ gebracht und die Aenderung der Schwingungsdauer mit der seit der Spannungsänderung verflossenen Zeit t verfolgt, wobei immer als unendlich klein anzusehende Amplituden benutzt wurden.

Zeit t	Temp.	Amplitude	τ_2	τ_2 red. auf 20°
0h 12′	21,4°	1° 7′ bis 0° 39′	9,904″	9,899″
0h 48′	21,8°	1° 35′ „ 1° 15′	9,900″	9,894″
4h —	—	—	—	9,881″
23h —	—	—	—	9,872″

Am 21. März wurde das spannende Gewicht fortgenommen und wiederum die Aenderung der Schwingungsdauer mit der seit der Spannungsänderung verflossenen Zeit verfolgt. Wegen der durch die Fortnahme des Gewichts hervorgebrachten Aenderung des Trägheitsmoments sind die absoluten Werthe der Schwingungsdauern der folgenden Reihe mit den entsprechenden Werthen der vorhergehenden nicht vergleichbar.

Zeit t	Temp.	Amplitude	τ_2	τ_2 red. auf 20°
0h 5′	21,5°	1° 34′ bis 0° 52′	8,703″	8,699″
0h 38′	21,7°	1° 1′ „ 0° 50′	8,689″	8,684″
18h —	—	—	—	8,678″
24h —	—	—	—	8,671″

Diese Versuche zeigen, dass die Schwingungsdauer mit der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit abnimmt.

Was hier für die Schwingungsdauer gezeigt ist, haben Pisati[1]) und P. M. Schmidt[2]) für die Dämpfungsconstante bei verschiedenen Metallen gezeigt, auch fand Pisati[3]) die Schwingungsdauer eines Silberdrahtes, nachdem das spannende Gewicht mehrere Tage entfernt und dann wieder angehängt worden, von 2,4245″ auf 2,4327″ gestiegen. Die Versuche, aus welchen die Werthe der Tabelle 2 hergeleitet sind, wurden jedesmal erst gemacht, wenn die Schwingungsdauer sich mit der Zeit nicht mehr änderte.

§ 4. Nachdem diese Fragen erledigt waren, wandte ich mich zu der Untersuchung der Eigenschaften von Drähten, welche eine permanente Torsion erhalten haben. An das

1) Pisati, Gaz. chim. ital. **6.** p. 69—71. 1876.
2) Schmidt, Wied. Ann. **2.** p. 66. 1877.
3) Pisati, Gaz. chim. ital. **6.** p. 70. 1876.

zu verwendende Material glaubte ich folgende Forderungen stellen zu müssen:

Erstens, dass die Drähte sich selbst überlassen (ungespannt) vollkommen gerade seien.

Zweitens, dass die permanente Torsion über den ganzen Draht hin nahezu dieselbe sei, d. h. dass die permanenten Verdrehungen irgend zweier Querschnitte sich nahezu verhalten wie ihre Abstände vom befestigten Ende.

Die erste Forderung erfüllen Drähte aus Stahl, Eisen, Kupfer, welche in freier Luft oder im Wasserstoffstrom unter schwacher Spannung geglüht worden sind. Um an solchen Drähten die zweite Forderung zu prüfen, wurden an den zu untersuchenden Draht, wie dies zu einem ähnlichen Zwecke in ähnlicher Weise von Boltzmann[1]) und O. E. Meyer[2]) ausgeführt ist, in gemessenen Abständen vom befestigten Ende zwei kleine, leichte, versilberte Glasspiegel mittelst eines Tropfens Leim befestigt und die permanenten Drehungen beobachtet, welche diese Spiegel erlitten, wenn dem Drahte eine permanente Torsion ertheilt wurde. Da es sich nur um eine rohe Schätzung handelte, indem die zweite Forderung bei keinem der untersuchten Drähte genau erfüllt war, so wurde der Draht in der Nähe der Spiegel mitten durch zwei Pappringe von 1 dcm Durchmesser hindurchgeführt, um welche innen eine Millimeterscala gelegt war; eine feste Absehlinie war dabei durch den Draht und einen gegenüberliegenden Scalenstrich gegeben, und es wurden die Verdrehungen der Spiegel in Scalentheilen mit blossem Auge abgelesen. Solche Versuche haben nun ergeben, dass bei weichen Kupferdrähten innerhalb weiter Grenzen der permanenten Torsionen dieselben sich nahezu gleichförmig über den ganzen Draht erstrecken. Bei Eisendrähten hingegen, die in der beschriebenen Weise behandelt worden, war dies auch nicht annähernd der Fall, vielmehr betrafen grössere permanente Torsionen gewöhnlich allein eine kleine Stelle des Drahtes. Dass diese Stelle in der Regel

1) Boltzmann, Wien. Ber. **76.** p. 832. 1877.
2) Meyer, Wied. Ann. **4.** p. 253 ff. 1878.

sehr klein sei, davon habe ich mich überzeugt, indem ich in kleinen Abständen an einen solchen Draht Papierstreifen klebte[1]), welche vor der permanenten Torsion alle in einer Ebene lagen. Nach Eintritt der permanenten Torsion zerfielen diese Streifen gewöhnlich in zwei Theile, weder die oberen noch die unteren waren gegen einander verdreht, sondern nur die oberen gegen die unteren. Entsprechend findet man, wenn man einen nach obiger Vorschrift behandelten Eisendraht in eine Kreisform zu biegen sucht, dass permanente Biegungen in Form eines ziemlich scharfen Knickes eintreten, wobei die übrigen Theile des Drahtes ganz gerade bleiben[2]), während der permanent gebogene Kupferdraht gleichförmig gekrümmt erscheint.

Das Verhalten des Stahls lag zwischen dem Verhalten des Eisens und Kupfers.

Nach diesen Erfahrungen habe ich eingehendere Untersuchungen nur an Kupferdrähten vorgenommen.

Der Vorgang, durch welchen ein Draht eine permanente Torsion erhält, kann nun ein doppelter sein:

Erstens kann der Draht, indem die Molecüle desselben bleibend eine andere Anordnung annehmen, wenn er isotrop war, auch isotrop bleiben. In Bezug auf ein solches Verhalten würde der Draht einer Flüssigkeit zu vergleichen sein.

Oder es kann zweitens die permanente Torsion dadurch eintreten, dass die Materie des Drahtes in der Richtung der Hauptdruckaxen nachgibt, wobei auch die kleine Drehung bestehen bleiben mag, welche die Elemente des Drahtes ausser der Compression und Dilatation in zwei zu einander senkrechten Richtungen bei der Torsion erfahren. In dem zuletzt betrachteten Falle würde der Draht durch die Torsion anisotrop geworden sein, und zwar an jeder Stelle sich verhalten wie ein Krystall des rhombischen Systems, dessen Axen gewisse Richtungen haben.

Ich habe eine Erscheinung an permanent tordirten

1) Durch solche Papierstreifen kann, wie beiläufig bemerkt sei, das Wesen der Torsion in Vorlesungen bequem demonstrirt werden.

2) Diese Erscheinung habe ich an Eisendrähten bis zu 0,9 mm Durchmesser beobachtet.

Kupferdrähten aufgefunden, welche mit völliger Regelmässigkeit verläuft, welche durch die Annahme, dass durch die permanente Torsion der Draht in der bezeichneten Weise anisotrop geworden sei, vollständig erklärt werden kann, und welche nicht stattfinden könnte, wenn der Draht isotrop geblieben wäre.

Betrachten wir erstens einen Draht, welchem eine gewisse permanente Torsion ertheilt worden ist. Wenn man einen solchen Draht belastet, so entzieht man ihm dadurch, wie Hr. Wiedemann[1]) gezeigt hat, dauernd einen Theil seiner permanenten Torsion; bei einer folgenden Entlastung bleibt nämlich die verkleinerte Torsion bestehen oder verringert sich noch mehr. Wiederholte Belastung und Entlastung wirkt in demselben Sinne mit abnehmender Intensität, und schliesslich gelangt der Draht in einen Zustand, in welchem eine dauernde Aenderung der permanenten Torsion durch Belastung und Entlastung nicht mehr eintritt.

Wenn man den Draht in diesem Zustande belastet, so tordirt er sich und kehrt nach Fortnahme der Belastung in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist derselbe wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte ertheilt wurde. Es wird ferner diese temporäre Torsion nahe proportional mit der Belastung gefunden, ferner nimmt sie zu mit der permanenten Torsion, welche dem Drahte ertheilt wurde, aber viel langsamer als diese.

Betrachten wir zweitens einen Draht, welcher durch ein auf seinen untern Endquerschnitt wirkendes tordirendes Moment tordirt gehalten wird; durch abwechselndes Belasten und Entlasten nimmt, wie Hr. G. Wiedemann[2]) gezeigt hat, der permanente Theil dieser Torsion zu bis zu einer gewissen Grösse, bei welcher ein weiterer Belastungswechsel keine Aenderung der permanenten Torsion mehr hervorbringt.

Wenn man in diesem Zustande den Draht belastet, so tordirt er sich und kehrt nach Fortnahme

1) Wiedemann, Wied. Ann. **6**. p. 485 ff. 1879.
2) l. c.

der Belastung wieder in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist wieder derselbe, wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte durch das tordirende Moment ertheilt wurde; die genannte temporäre Torsion ist nahe proportional der zugefügten Belastung und wächst mit der ertheilten permanenten Torsion, viel langsamer als diese.

Das Gesagte bezieht sich auf nach der gegebenen Vorschrift behandelte Kupferdrähte; ein im natürlichen Zustande nicht ganz gerader Eisendraht, bei welchem aber die permanente Torsion sich nahe gleichmässig über den Draht erstreckte, zeigte qualitativ dasselbe Verhalten. An den von ihm untersuchten Messingdrähten hat Hr. G. Wiedemann diese Erscheinungen nicht beobachtet.

Um bei diesen Versuchen die Spannung anzubringen, versah ich die Schraubenspindeln, deren Spitzen den Ring δ hielten, mit Muttern, die nach unten zu kehrende Haken η, η trugen. An diese wurden die Enden eines um eine 8 cm breite Rolle geschlungenen Fadens geknüpft (s. Taf. I Fig. 5); an die Scheere dieser Rolle war ein Haken angebracht, an den eine Wagschale gehängt werden konnte; um dabei Stösse möglichst zu vermeiden, war über den Haken ein Stück Kautschukschlauch geschoben. Das Arretiren der Wagschale geschah mittelst eines langen Hebels, welcher vom Sitze des Beobachters aus gehandhabt wurde. Hr. G. Wiedemann[1]), dessen Arbeit über die Torsion ich nach Beendigung meiner Untersuchung erhielt, hat eine bessere Art der Belastung angewandt; indessen fand ich auch mein Verfahren dem von mir verfolgten Zwecke entsprechend.

Wenn der Angriffspunkt der Resultante der von beiden Fäden ausgeübten Züge in den Endpunkt des verticalen Drahtes fällt, so wird beim Belasten keine Verlegung des am Drahte aufgehängten Körpers K_2 eintreten. Der genannte Angriffspunkt konnte nun durch Verstellen der Walze γ und des Ringes δ an den bezeichneten Ort gebracht

1) l. c. p. 496.

werden. Um beurtheilen zu können, ob eine Verlegung von K_2, und in welchem Sinne diese eintrat, brachte ich an den Fortsatz des Ringes R ungefähr senkrecht zueinander zwei Spiegel an (in der Figur nicht gezeichnet), deren Drehung ich durch Scala und Fernrohr beobachtete; es wurde so lange an den Schrauben regulirt, bis eine Verlegung nicht mehr eintrat; übrigens wurden durch kleine Verlegungen von K_2 die Resultate nicht merklich beeinflusst. Da es sich bei der vorzunehmenden Untersuchung weniger um äusserste Präcision als um Anstellung vieler Versuche handelte, so wurde die Oeldämpfung angewandt und dazu in der Klemme c des Ringes R ein passend gebogener Draht befestigt, welcher ein in das ringförmige Oelgefäss tauchendes Blech trug.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass, solange bei kleinen permanenten Torsionen die Wirkung der Belastung klein war, dem Apparat eine empfindliche Stellung gegeben wurde, d. h. Drehungen Θ angewandt wurden gleich oder grösser als 90°.

Die folgende Tabelle enthält einen Theil der diesen Gegenstand betreffenden Versuche. p bedeutet die permanente Torsion des Drahtes, t die durch den angewandten Zug erzielte temporäre Torsion. Wo das tordirende Moment auf den Draht noch einwirkt, ist ϑ die durch dasselbe hervorgebrachte temporäre Torsion gerechnet von der permanenten Torsionsgleichgewichtslage aus. Da die Grösse von ϑ zu t in keiner wesentlichen Beziehung steht, so ist unter II. 1 und III. 1 ϑ nicht mit Genauigkeit bestimmt worden; unter II. 1 ist ϑ ungefähr bezüglich 45°, 90°, 173°, 173°, unter III. 1 jedesmal ungefähr 173°. Der Durchmesser der Drähte ist 0,427 mm; der zugefügte Zug unter I. und II. immer 3,22 kg auf das Quadratmillimeter; die Länge der Drähte betrug 530 mm.

I. Kupferdraht in der Luft geglüht.

1) Der Draht steht unter der Wirkung des tordirenden Moments, welches die permanente Torsion hervorgebracht hat.

ϑ	p	t	$\frac{D_2}{D_1}$
45°	2,2°	0,14°	1,264
90°	17,2°	0,35°	0,669
173°	402,8°	1.6°	0,342

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

$p = 15{,}8°, \quad 398{,}1°,$
$t = 0{,}1°, \quad 1{,}1°.$

II. Kupferdraht im Wasserstoffstrom geglüht.

1) Das tordirende Moment wirkt ein:

$p = 13{,}5°, \quad 68{,}9°, \quad 266{,}5°, \quad 749{,}5°,$
$t = 0{,}19°, \quad 0{,}58°, \quad 1{,}14°, \quad 1{,}68°.$

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

$p = 10{,}6°, \quad 67{,}4°, \quad 259{,}3°, \quad 716{,}5°,$
$t = 0{,}09°, \quad 0{,}53°, \quad 0{,}82°, \quad 1{,}23°.$

III. Kupferdraht im Wasserstoffstrom geglüht.

1) Das tordirende Moment wirkt ein:

Zugefügter Zug in $\frac{kg}{mm^2}$	p	t	berechnet nach der Annahme, dass t prop. dem zugefügten Zug
3,22	643°	1,48°	—
1,83	643°	0,78°	0,84°

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

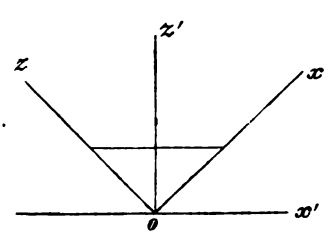
Zugefügter Zug in $\frac{kg}{mm^2}$	p	t	berechnet nach der Annahme, dass t prop. dem zugefügten Zug
3,22	636°	1,17°	—
1,83	636°	0,68°	0,66°

§ 5. Bei der Erklärung dieser Erscheinungen wollen wir den Fall ins Auge fassen, in welchem auf den permanent tordirten Draht ein tordirendes Moment nicht wirkt; die Erklärung des andern Falls wird dieselbe sein.

Die permanente Torsion stelle ich mir ganz oder zum Theil so vor, dass die Materie in der Richtung der Hauptdruckaxen nachgegeben hat. In jedem Punkt des Drahtes liegt die eine der Hauptdruckaxen im Querschnitt in der

Richtung des Radius vector, und nach dieser Richtung findet weder Compression noch Dilatation statt; die beiden andern Hauptdruckaxen liegen in einer Ebene senkrecht zum Radius vector unter 45° gegen die Drahtaxe geneigt, und nach der einen findet Compression, nach der andern Dilatation statt. Durch die permanente Torsion ist demnach der Draht in einen anisotropen Körper verwandelt worden und zwar verhält er sich in jedem Punkte wie ein Krystall des rhombischen Systems, aber an den verschiedenen Punkten haben die Axen verschiedene Richtung, und es wird ferner der Grad der Anisotropie von der Drahtaxe nach aussen zu wachsen, da in derselben Richtung die Verzerrungen der Elemente wachsen.

Es entsteht die Aufgabe, die Deformationen zu bestimmen, welche ein longitudinaler Zug in einem solchen Draht hervorbringt. Weil indessen nicht bekannt ist, wie der Grad der Anisotropie sich von der Axe des Drahtes nach der Peripherie hin ändert, so habe ich vorgezogen, eine einfachere Aufgabe zu behandeln, von der man sagen kann, dass sie ein Volumelement des Drahtes betreffe. Versetzen wir uns nämlich in einen Punkt des Drahtes und stellen uns dort ein parallelepipedisches Volumelement vor, dessen erste Kanten a die Richtung des Radius vector haben, dessen zweite Kanten b im Querschnitt senkrecht zum Radius vector sind und dessen dritte Kanten c der Axe des Drahtes parallel laufen.



Die Verzerrung, welche dieses Element bei der Torsion erleidet, besteht darin, dass es einer Schiebung[1]) unterworfen wird, indem die beiden Flächen ab Verschiebungen in der Richtung b von verschiedener Grösse erleiden. Durch die permanente Deformation ist das Volumelement dreiaxig (rhombisch) anisotrop geworden, und zwar liegen die Axen in der Richtung a (oy) und in der Ebene bc unter 45° gegen c und b ge-

1) Thomson u. Tait, deutsche Uebers. 1. p. 118 ff.

neigt (ox und oz). Es entsteht die Aufgabe, die Deformation zu finden, welche ein longitudinaler Zug K in der Richtung c (oz') in diesem Element oder einem ihm ähnlichen Block von endlicher Grösse hervorbringt.

Diese Aufgabe löst man leicht durch die Formeln, welche für einen rhombischen, nicht hemimorphen Krystall die Spannungscomponenten (X_x etc.) mit den Deformationscomponenten (α, β, γ, φ, χ, ψ in der Bezeichnung von Clebsch) verknüpfen. Diesen Formeln kann man folgende Gestalt geben:

$$(3)\qquad \begin{cases} E_1 \cdot \alpha = -X_x + \mu_{12} \cdot Y_y + \mu_{13} \cdot Z_z \\ E_2 \cdot \beta = \mu_{21} \cdot X_x - Y_y + \mu_{23} \cdot Z_z \\ E_3 \cdot \gamma = \mu_{31} \cdot X_x + \mu_{32} Y_y - Z_z \\ \sigma_1 \cdot \varphi = Y_z \quad \sigma_2 \cdot \chi = Z_x \quad \sigma_3 \cdot \psi = X_y \end{cases}$$

Zwischen den 9 Coëfficienten μ_{ik} und E_i finden folgende Beziehungen statt:

$$(4)\qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}, \qquad \frac{E_3}{E_2} = \frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}, \qquad \frac{E_1}{E_3} = \frac{\mu_{13}}{\mu_{31}},$$

sodass nur 6 dieser Coëfficienten unabhängig voneinander sind; diese Beziehungen drücken die Bedingungen dafür aus, dass die elastischen Kräfte ein Potential haben. Die in den Formeln (3) auftretenden Coëfficienten haben sämmtlich eine einfache experimentelle Bedeutung. Unterwirft man z. B. die Endflächen eines Prismas, dessen Axe parallel der x-Axe ist, einem Zug in der Richtung der x-Axe, so ist $E_1 = \frac{\text{Zug}}{\text{Längsdilatation}}$; μ_{12} und μ_{13} sind bezüglich die Verhältnisse der Quercontraction in der Richtung der y- und z-Axe zur Längsdilatation in der Richtung der x-Axe.

Durch Anwendung der Formeln (3) auf die vorliegende Aufgabe findet man nun leicht, dass durch den longitudinalen Zug K ausser der Dilatation in der Richtung des Zuges und den Contractionen in Richtungen senkrecht zum Zug, eine Schiebung eintritt, indem die Ebenen ab übereinander hingleiten, und diese Schiebung hat den Werth:

$$(4)\qquad \chi = \frac{K}{2} \cdot \frac{E_3 - E_1}{E_1 \cdot E_3},$$

wo E_1 und E_3 zwei Constanten sind, welche man die Elasticitätscoëfficienten in Bezug auf die Richtungen ox und oz

nennen kann. Dass die Schiebung prop. K sei, wird durch die Versuche bestätigt.

Diese lehren weiter, dass wenn die Schiebung, durch welche der Block anisotrop wurde, die Richtung des Pfeils hat, dann die durch den Zug K eintretende dieselbe Richtung hat; hieraus kann man schliessen, dass $E_3 > E_1$ oder dass der Elasticitätscoëfficient für die Richtung, in welcher die permanente Dehnung stattgefunden hat, kleiner ist, als für die Richtung, in welcher die permanente Compression eingetreten ist.

III. *Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit; von G. Kirchhoff.*

(Aus dem Monatsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 15. Mai 1879.)

Unter den wenigen Flüssigkeitsbewegungen, für welche man die Differentialgleichungen bisher hat integriren können, nehmen eine wesentliche Stelle die unendlich kleinen Schwingungen ein, die eine schwere, nicht reibende, incompressible Flüssigkeit in einem verticalen, cylindrischen oder prismatischen Gefässe mit horizontalem Boden ausführen kann. Die Schwingungen einer solchen Flüssigkeit in einem Gefässe, dessen Boden nicht horizontal ist, sind meines Wissens bis jetzt nicht behandelt. Es sollen im Folgenden einige hierher gehörige Fälle, und zwar Fälle, in denen der Boden aus einer schiefen Ebene oder aus zwei schiefen Ebenen gebildet ist, erörtert werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Bewegung nur von einer horizontalen Ordinate abhängt, die Flüssigkeit also in einer Richtung durch zwei parallele, verticale Wände begrenzt ist.

Es sei x die horizontale Ordinate eines Punktes, die diesen Wänden parallel ist, z die verticale Ordinate und φ das Geschwindigkeitspotential in diesem Punkte zur Zeit t; dann ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{oder:}$$

(1) $$\varphi = F(z + ix) + G(z - ix),$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, und F und G Functionszeichen sind. Die Functionen F und G müssen conjugirt sein, da φ reell ist. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit weiche unendlich wenig von der Ebene $z = 0$ ab, die positive z-Axe sei abwärts gekehrt, und g bezeichne die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers, dann ist für $z = 0$:

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

und $\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ ist die Tiefe eines Punktes der freien Oberfläche unter einer festen horizontalen Ebene.

Nun werde vorausgesetzt, dass φ gleich:

$$\sin nt\pi,$$

multiplicirt mit einem von t unabhängigen Factor ist, wobei n die Zahl der einfachen Schwingungen bedeutet, die jedes Flüssigkeitstheilchen in der Zeiteinheit ausführt. Es ist dann:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -n^2\pi^2\varphi,$$

also für $z = 0$:

(2) $$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -a\varphi, \qquad \text{wo} \quad a = \frac{n^2\pi^2}{g}.$$

Setzt man hier den Werth von φ aus der Gleichung (1) ein und bezeichnet durch F' und G' die Differentialquotienten von F und G nach ihren Argumenten, so erhält man:

$$F'(ix) + G'(-ix) = -a\big(F(ix) + G(-ix)\big).$$

Diese Gleichung braucht nur für reelle Werthe x erfüllt zu werden, und zwar für solche, die Punkten der freien Flüssigkeitsoberfläche entsprechen; das kann aber nur geschehen, wenn sie auch für jeden complexen Werth von x erfüllt wird. Bezeichnet daher u eine complexe Variable, so muss allgemein:

$$F'(u) + G'(-u) = -a\big(F(u) + G(-u)\big)$$

oder auch:

(3) $$\frac{d}{du}\big(F(u) - G(-u)\big) = -a\big(F(u) + G(-u)\big)$$

sein.

Es ist nun noch die Bedingung aufzustellen, der an der nicht freien Flüssigkeitsoberfläche, abgesehen von den der

xz-Ebene parallelen Wänden, zu genügen ist. Diese Bedingung ist die, dass diese Oberfläche die Flächen:

$$\varphi = \text{const.}$$

senkrecht schneidet, dass also für jeden zusammenhängenden Theil derselben:

$$F(z + ix) - G(z - ix) = \text{const.}$$

ist. Es soll angenommen werden, dass die ganze nicht freie Oberfläche zusammenhängend ist; der Werth der zuletzt eingeführten Constanten kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit beliebig gewählt, die Bedingung also dahin ausgesprochen werden, dass für die nicht freie Oberfläche:

(4) $$F(z + ix) - G(z - ix) = 0 \quad \text{ist.}$$

Die nicht freie Oberfläche sei nun die Ebene:

$$\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

oder wenn man: $x = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$
setzt, die Ebene: $\vartheta = \alpha$,
und die Flüssigkeit befinde sich auf der Seite dieser Ebene, nach der die positive x-Axe gekehrt ist, d. h. sie erfülle den Raum, für den: $\vartheta < \alpha$
ist. Die Gleichung (4) wird dann:

$$F(\varrho i e^{-i\alpha}) - G(-\varrho i e^{+i\alpha}) = 0.$$

Diese Gleichung, die zunächst nur für positive reelle Werthe von ϱ erfüllt zu werden braucht, muss eben deswegen auch für complexe gelten; bezeichnet u wiederum eine complexe Variable, und setzt man: $e^{-i2\alpha} = \beta$, so hat man daher:

(5) $$G(u) = F(-\beta u),$$

und infolge der Gleichung (3):

(6) $$\frac{d}{du}\big(F(u) - F(\beta u)\big) = -\alpha\big(F(u) + F(\beta u)\big).$$

Es sei α mit π commensurabel und:

$$\alpha = \frac{m}{n}\pi,$$

wo m und n zwei ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Factor haben, also:

$$\beta = e^{-i\frac{2m\pi}{n}}.$$

Es ist dann β eine primitive $n$te Wurzel der Einheit, und unter einer sogleich abzuleitenden Bedingung lässt sich der Gleichung (6) genügen durch:

$$(7)\quad F(u) = A_0 e^{\lambda a u} + A_1 e^{\beta\lambda a u} + A_2 e^{\beta^2\lambda a u} + \cdots + A_{n-1} e^{\beta^{n-1}\lambda a u},$$

wo λ eine willkürliche Constante ist, A_0, A_1, ... Constanten sind, deren Verhältnisse auf passende Weise bestimmt werden müssen. Setzt man nämlich diesen Ausdruck von F in die Gleichung (6), so erhält man die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda(A_0 - A_{n-1}) &= -(A_0 + A_{n-1}),\\
\beta\lambda(A_1 - A_0) &= -(A_1 + A_0),\\
\beta^2\lambda(A_2 - A_1) &= -(A_2 + A_1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta^{n-1}\lambda(A_{n-1} - A_{n-2}) &= -(A_{n-1} + A_{n-2})
\end{aligned}$$

oder:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
A_0(\lambda + 1) &= A_{n-1}(\lambda - 1),\\
A_1(\beta\lambda + 1) &= A_0(\beta\lambda - 1),\\
A_2(\beta^2\lambda + 1) &= A_1(\beta^2\lambda - 1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{n-1}(\beta^{n-1}\lambda + 1) &= A_{n-2}(\beta^{n-1}\lambda - 1).
\end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man sie mit einander, so erhält man:

$$\lambda^n - (-1)^n = \lambda^n - 1,$$

da: $$1,\ \beta,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta^{n-1}$$

die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^n - 1 = 0$$

sind. Es folgt daraus, dass, wenn n ungerade ist, die Gleichungen (8) nicht bestehen können, ohne dass alle A verschwinden; wenn n gerade ist, aber diese Gleichungen bei einem beliebigen Werthe von λ und einem beliebigen Werthe einer der Grössen A erfüllt werden können. Demgemäss soll n als gerade angenommen werden.

Die Hälfte der Glieder des in (7) für F aufgestellten Ausdrucks verschwindet, wenn man λ einer ganzen Potenz von β gleichsetzt. Wählt man eine andere ganze Potenz, so erhält man einen nur scheinbar verschiedenen Ausdruck für F. Man mache:

$$\lambda = \beta^{\frac{n}{2}} = -1;$$

es verschwinden dann die A, deren Index $\frac{n}{2}$ oder grösser als $\frac{n}{2}$ ist, A_0 kann beliebig gewählt werden und es ist:

$$A_1 = A_0 \frac{\beta+1}{\beta-1}, \quad A_2 = A_1 \frac{\beta^2+1}{\beta^2-1} \cdots \quad A_{\frac{n}{2}-1} = A_{\frac{n}{2}-2} \frac{\beta^{\frac{n}{2}-1}+1}{\beta^{\frac{n}{2}-1}-1}$$

und:

$$F(u) = A_0 e^{-au} + A_1 e^{-\beta au} + \ldots + A_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1} au}.$$

Statt der Constanten A mögen hier Constanten B durch die Gleichungen:

$$A_0 = B_0 e^{-i\pi\frac{n-2}{8}}, \qquad A_2 = B_2 e^{-i\pi\frac{n-10}{8}},$$
$$A_1 = B_1 e^{-i\pi\frac{n-6}{8}}, \qquad A_{\frac{n}{2}-1} = B_{\frac{n}{2}-1} e^{i\pi\frac{n-2}{8}}$$

eingeführt werden; man hat dann:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(u) = B_0 e^{-au-i\pi\frac{n-2}{8}} + B_1 e^{-\beta au-i\pi\frac{n-6}{8}} \\ + B_2 e^{-\beta^2 au-i\pi\frac{n-10}{8}} + \ldots + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1} au+i\pi\frac{n-2}{8}}, \end{array} \right.$$

es ist B_0 willkürlich und:

$$B_1 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha, \quad B_2 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha,$$
$$B_3 = B_0 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha \ldots B_{\frac{n}{2}-1} = B_0 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \ldots \operatorname{ctg}\left(\frac{n}{2}-1\right)\alpha;$$

woraus folgt:

$$B_0 = \pm B_{\frac{n}{2}-1}, \quad B_1 = \pm B_{\frac{n}{2}-2}, \quad B_2 = \pm B_{\frac{n}{2}-3}, \ldots$$

wo die Zeichen — gelten, wenn $\frac{n}{2}$ und zugleich $\frac{m+1}{2}$ gerade ist, während in allen anderen Fällen die Zeichen + zu nehmen sind. Bildet man nach (5) und (9) den Ausdruck von $G(v)$ und kehrt die Reihenfolge der Glieder um, so erhält man hiernach:

$$\pm G(v) = B_0 e^{-av+i\pi\frac{n-2}{8}} + B_1 e^{-a\frac{v}{\beta}+i\pi\frac{n-6}{8}}$$
$$+ B_2 e^{-a\frac{v}{\beta^2}+i\pi\frac{n-10}{8}} + \ldots + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-a\frac{v}{\beta^{\frac{n}{2}-1}}-i\pi\frac{n-2}{8}},$$

wo über das Doppelzeichen nach derselben Regel zu entscheiden ist. Nach (1) ist:

$$\varphi = F(u) + G(v),$$

wenn:

$$u = z + ix, \quad v = z - ix$$

gesetzt wird, und $F(u)$ und $G(v)$ sind conjugirt. Die Exponenten in den entsprechenden Gliedern der für diese Functionen aufgestellten Ausdrücke sind conjugirt; daraus folgt, dass B_0 reell sein muss, wenn nicht $\frac{n}{2}$ und $\frac{m+1}{2}$ gerade sind, rein imaginär, wenn diese beiden Zahlen gerade sind. In beiden Fällen ist φ gleich dem Doppelten des reellen Theiles des in (9) für $F(u)$ aufgestellten Ausdrucks.

Führt man statt x und z wieder die Polarcoordinaten ϱ und ϑ ein, so hat man:

$$u = \varrho(\sin\vartheta + i\cos\vartheta), \quad \beta u = \varrho\left(\sin(2\alpha+\vartheta) + i\cos(2\alpha+\vartheta)\right),$$

$$\beta^2 u = \varrho\left(\sin(4\alpha+\vartheta) + i\cos(4\alpha+\vartheta)\right) \ldots$$

$$\beta^{\frac{n}{2}-1} u = \varrho\left(\sin\left((n-2)\alpha+\vartheta\right) + i\cos\left((n-2)\alpha+\vartheta\right)\right).$$

Man ersieht hieraus, dass im allgemeinen bei den hier aufgestellten Formeln φ unendlich wird innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes, in dem ϱ von 0 bis unendlich, ϑ von 0 bis α variirt; nur, wenn:

$$m = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{n}$$

ist, findet dieses nicht statt, und für $\varrho = \infty$ wird, wenn man $2B_0 = 1$ macht,

$$2F(z+ix) = e^{-az-i\left(ax+\pi\frac{n-2}{8}\right)}, \quad \varphi = e^{-az}\cos\left(ax+\pi\frac{n-2}{8}\right).$$

Bei beliebigen Werthen von x und z hat man dann

für $n = 2$:

$$2F(z+ix) = e^{-a(z+ix)}, \quad \varphi = e^{-az}\cos ax;$$

für $n = 4$:

$$2F(z+ix) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{-az-iax} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-az+iax},$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-az}(\cos ax - \sin ax) + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-az}(\cos az - \sin az);$$

für $n = 6$:

$$2F(z+ix) = -ie^{-a(z+ix)} + \sqrt{3}\,e^{-\frac{a}{2}(z+x\sqrt{3})+i\frac{a}{2}(z\sqrt{3}-x)} + ie^{\frac{a}{2}(z-x\sqrt{3})+i\frac{a}{2}(z\sqrt{3}+x)},$$

$$\varphi = -e^{-az}\sin ax + \sqrt{3}\,.\,e^{-\frac{a}{2}(z+x\sqrt{3})}\cos\frac{a}{2}(z\sqrt{3}-x) - e^{\frac{a}{2}(z-x\sqrt{3})}\sin\frac{a}{2}(z\sqrt{3}+x).$$

Nimmt man in der Gleichung (7) λ unendlich klein an und entwickelt die Exponentialgrössen nach Potenzen der Exponenten, so erhält man für $F(u)$ eine ganze rationale Function von u. Die allgemeinste Function dieser Art, die der Gleichung (6) genügt, findet man, indem man in diese Gleichung:

$$F(u) = A_h u^h + A_{h+1} u^{h+1} + \ldots + A_{h'} u^{h'}$$

setzt, wo h und h' ganze Zahlen bedeuten, und $h' > h$ ist. Es ergibt sich dann:

$$1-\beta^h = 0, \quad 1+\beta^{h'} = 0, \quad A_k = -aA_{k-1}\frac{1}{k}\cdot\frac{1+\beta^{k-1}}{1-\beta^k},$$

wo k jede der Zahlen $h+1, h+2, \ldots h'$ sein kann, während A_h willkürlich bleibt. Man kann diesen Bedingungen genügen, indem man $h = 0$ oder einem Vielfachen von n und:

$$h' = h + \frac{n}{2}$$

setzt.

Ein besonderes Interesse hat der Fall, dass die auf diese Weise gebildete Function $F(u)$ vom zweiten Grade ist; das findet statt, wenn $n = 4$ ist und $h = 0$ gewählt wird. Es sei:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ also } \beta = -i;$$

dann hat man:

$$F(u) = A_0\left(1 - au(1-i) - \frac{a^2u^2}{2}i\right),$$

woraus nach (5) folgt:

$$G(v) = A_0\left(1 - av(1+i) + \frac{a^2v^2}{2}i\right).$$

Da $F(u)$ und $G(v)$ conjugirt sind, so muss hiernach A_0 reell sein. Setzt man $A_0 = \frac{1}{2}$, so erhält man:

$$\varphi = 1 - a(z + x) + a^2 z x,$$

und als Gleichung der Stromlinien, d. h. der Linien, welche die Linien $\varphi = \text{const.}$ senkrecht schneiden:

$$\text{const.} = a(z - x) - \frac{a^2}{2}(z^2 - x^2).$$

Zu diesen Linien gehört auch die Gerade $z - x = 0$; für sie ist die mit const. bezeichnete Grösse $= 0$; eine zweite Gerade muss zu derselben Stromlinie gehören; sie ist die Gerade:

$$z + x = \frac{2}{a},$$

die die erste in dem Punkte $z = x = \frac{1}{a}$ schneidet. Die gedachte Bewegung kann daher auch bestehen, wenn die Flüssigkeit ausser durch die Wand $z = x$ noch durch die Wand $z + x = \frac{2}{a}$ begrenzt ist, wenn sie also in einem prismatischen Gefässe sich befindet, dessen Kante nach unten gekehrt, dessen Winkel ein rechter ist, und dessen Seitenflächen gegen die Verticale gleich geneigt sind; $\frac{1}{a}$ ist die grösste Tiefe der Flüssigkeit.

Für $z = 0$ (wie für jeden constanten Werth von z) wird φ eine lineare Function von x; daraus folgt, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit bei der Bewegung stets eine Ebene bleibt. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist der Gleichung (2) zufolge:

$$= \frac{\pi}{\sqrt{ag}},$$

d. h. gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge der grössten Tiefe der Flüssigkeit gleich ist. Die Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in den gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten die Gefässwände bilden.

Die beschriebene Bewegung ist eine von unendlich vielen Schwingungsarten, die eine Flüssigkeit in einem Gefässe der bezeichneten Art ausführen kann. Auch die anderen schnelleren Schwingungen lassen sich theoretisch verfolgen. Man kommt auf sie, wenn man die Constanten λ und a in dem

für $F(u)$ in der Gleichung (7) aufgestellten Ausdruck so zu bestimmen sucht, dass für $z+x=2c$ (wo c die grösste Tiefe der Flüssigkeit bedeutet:

$$F(z+ix)-G(z-ix)=0$$

ist. Nach der Gleichung (5), in der für β sein Werth $-i$ zu setzen ist, wird diese Bedingung:

$$F(u)=F\big(-u+2c(1+i)\big).$$

Die Gleichung (7) ist hier:

$$F(u)=A_0e^{\lambda au}+A_1e^{-i\lambda au}+A_2e^{-\lambda au}+A_3e^{i\lambda au}, \tag{10}$$

und zwischen den Constanten A hat man die Gleichungen:

$$\begin{cases} A_1(-i\lambda+1)=A_0(-i\lambda-1), & A_2(-\lambda+1)=A_1(-\lambda-1), \\ & A_3(i\lambda+1)=A_2(i\lambda-1), \end{cases} \tag{11}$$

die neue, eben abgeleitete Bedingung gibt zwei Gleichungen, nämlich:

$$A_2=A_0e^{\lambda a2c(1+i)} \qquad \text{und} \qquad A_3=A_1e^{\lambda a2c(1-i)}.$$

Diese fünf Gleichungen reichen gerade aus zur Bestimmung der fünf Grössen A_1, A_2, A_3, λ, a. Durch Elimination der drei ersten erhält man:

$$e^{\lambda a2c(1+i)}=\frac{(1+\lambda)(1+i\lambda)}{(1-\lambda)(1-i\lambda)}, \qquad e^{\lambda a2c(1-i)}=\frac{(1+\lambda)(1-i\lambda)}{(1-\lambda)(1+i\lambda)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen einmal, dividirt sie das andere mal und zieht jedesmal die Quadratwurzel, so sieht man, dass entweder:

$$e^{2\lambda ac}=\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{und} \quad e^{i2\lambda ac}=\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder:

$$e^{2\lambda ac}=-\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{und} \quad e^{i2\lambda ac}=-\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

sein muss. Man setze:

$$\lambda ac=p,$$

so hat man im ersten Falle die Gleichungen:

$$e^{2p}=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \qquad e^{i2p}=\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder:

$$\lambda=\operatorname{tg}p, \qquad e^{2p}=\operatorname{tg}\Big(p+\frac{\pi}{4}\Big),$$

im zweiten:

$$e^{2p} = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \qquad e^{i2p} = -\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder: $$\lambda = -\operatorname{ctg} p, \qquad e^{2p} = \operatorname{ctg}\left(p + \tfrac{\pi}{4}\right).$$

Die beiden transcendenten Gleichungen, deren einer p genügen muss, lassen sich in die eine:

$$\cos 2p \frac{e^{2p} + e^{-2p}}{2} = 1$$

zusammenfassen, welches die Gleichung ist, die die Schwingungszahlen eines elastischen, an beiden Enden freien Stabes bestimmt. Die Wurzeln derselben sind bekannt; aus diesen Wurzeln findet man hier die Schwingungszahlen der Flüssigkeitsmasse, nämlich die Werthe der Grösse a (die den Quadraten der Schwingungszahlen proportinal sind) im ersten der beiden unterschiedenen Fälle durch die Gleichung:

$$ac = \frac{p}{\operatorname{tg} p},$$

im zweiten durch die Gleichung:

$$ac = -p \operatorname{tg} p.$$

Die Gleichung $e^{2p} = \operatorname{tg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$ hat zunächst die dreifache Wurzel $p = 0$; bei dem Probleme des elastischen, schwingenden Stabes hat dieselbe keine Bedeutung, da sie dort einer unendlich grossen Schwingungsdauer entspricht; anders ist es hier, für $p = 0$ wird hier:

$$ac = 1;$$

der hierdurch bestimmte Werth von a bezieht sich auf die vorher erörterten Schwingungen, bei denen die Oberfläche der Flüssigkeit stets eben bleibt. Die folgenden Wurzeln der genannten Gleichung für p sind etwas kleiner als:

$$\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{13\pi}{4}, \ldots$$

Die Genauigkeit dieser Näherungswerthe ist um so grösser, je grösser ihre Ordnungszahl; schon bei dem ersten ist sie bedeutend, es ist nämlich:

$$\frac{5\pi}{4} = 3{,}92699,$$

während der entsprechende Werth von p:

$$= 3{,}92660 \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung $e^{2p} = \operatorname{ctg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$ hat die einfache Wurzel $p = 0$, die aber einer unendlichen Schwingungsdauer entspricht; ihre folgenden Wurzeln sind etwas grösser als:

$$\frac{3\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \ldots$$

Die erste von ihnen ist genauer 2,36502,

während: $\frac{3\pi}{4} = 2{,}35620$ ist.

Nennt man die Schwingungsart, bei der die Oberfläche der Flüssigkeit eine Ebene bleibt, die erste, und setzt ihre Schwingungszahl $= 1$, so sind hiernach die Schwingungszahlen der Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl:

$$1, \quad 1{,}9824, \quad 2{,}6586, \quad 3{,}1953,$$

und die der Schwingungsarten gerader Ordnungszahl:

$$1{,}5243, \quad 2{,}3448, \quad 2{,}9393.$$

Neben der Schwingungszahl sind für jede der möglichen Schwingungsarten von Interesse gewisse ausgezeichnete Punkte der Oberfläche, die Knoten nämlich, d. h. die Punkte, in denen die verticale Bewegung Null ist, und die Bäuche, in denen die verticale Bewegung ein Maximum ist, die Tangente an die Oberfläche also horizontal bleibt. Um diese zu finden, muss der Ausdruck von φ aufgestellt werden.

Für die Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl sind die Gleichungen (11):

$$A_1 = -e^{i2p} A_0, \qquad A_2 = -e^{2p} A_1, \qquad A_3 = -e^{-i2p} A_2,$$

nach (10) ist also, wenn man über die willkürliche Constante A_0 auf gewisse Weise verfügt:

$$2iF(u) = e^{p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{-ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{-p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)},$$

oder kürzer:

$$iF(u) = \cos p\left(\frac{ui}{c} + 1 - i\right) - \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right),$$

und nach (5):

$$iG(v) = -\cos p\left(\frac{vi}{c} - 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{v}{c} - 1 + i\right).$$

Um $i\varphi$ zu erhalten, hat man diese beiden Gleichungen zu addiren und $u = z + ix$, $v = z - ix$ zu setzen. Man braucht φ nur für die Oberfläche kennen zu lernen, man kann also $z = 0$ setzen; überdies möge:

$$\frac{x}{c} = 1 - \xi$$

gemacht werden; es ergibt sich dann:

$$i\varphi = \cos p(\xi - i) - \cos p(1 + i\xi) - \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi)$$

oder: $$\varphi = (e^p - e^{-p}) \sin p\xi + \sin p(e^{p\xi} - e^{-p\xi}).$$

Nach der transcendenten Gleichung, der p genügt, ist:

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \frac{\sin p}{\sqrt{\cos 2p}},$$

wo das Vorzeichen der Quadratwurzel mit dem Vorzeichen von $\sin p$ übereinstimmen muss; abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch:

$$\varphi = \sin p\xi + \sqrt{\cos 2p}\,\frac{e^{p\xi} - e^{-p\xi}}{2}.$$

In den Knoten ist $\varphi = 0$, in den Bäuchen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$, d. h.:

$$0 = \cos p\xi + \sqrt{\cos 2p}\,\frac{e^{p\xi} + e^{-p\xi}}{2}.$$

Für die Schwingungsarten gerader Ordnungszahl ist:

$$A_1 = A_0 e^{i2p}, \qquad A_2 = A_1 e^{2p}, \qquad A_3 = A_2 e^{-i2p},$$

und daher, wenn man wiederum über A_0 auf gewisse Weise verfügt:

$$2F(u) = e^{p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)} + e^{-ip\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)} + e^{-p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)} + e^{ip\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)}$$

oder:

$$F(u) = \cos p\left(\frac{ui}{c} + 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right),$$

$$G(v) = \cos p\left(\frac{vi}{c} - 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{v}{c} - 1 + i\right),$$

und für die Oberfläche:

$$\varphi = \cos p(\xi - i) + \cos p(1 + i\xi) + \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi)$$

oder: $\varphi = (e^p + e^{-p}) \cos p\xi + \cos p\,(e^{p\xi} + e^{-p\xi})$.

Es ist aber: $\frac{e^p + e^{-p}}{2} = \frac{\cos p}{\sqrt{\cos 2p}}$,

wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse mit dem von $\cos p$ übereinstimmen muss. Abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch:

$$\varphi = \cos p\xi + \sqrt{\cos 2p}\,\frac{e^{p\xi} + e^{-p\xi}}{2}.$$

Auch hier ist in den Knoten $\varphi = 0$, in den Bäuchen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$, d. h.: $0 = \sin p\xi - \sqrt{\cos 2p}\,\frac{e^{p\xi} - e^{-p\xi}}{2}$.

Die folgende Tafel enthält für die einzelnen Schwingungsarten die Ordnungszahl, die Schwingungszahl und die Werthe von ξ, die den Knoten und Bäuchen entsprechen.

Ordnungszahl	Schwingungszahl	Knoten	Bäuche
1	1	0	—
2	1,5243	±0,55170	0
3	1,9824	0	±0,38325
—	—	±0,73580	—
4	2,3448	±0,28838	0
—	—	±0,81111	±0,56000
5	2,6586	0	±0,22263
—	—	±0,44644	±0,65776
—	—	±0,85310	—

IV. *Ueber die Fortführung der Electricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen; von E. Dorn in Breslau.*[1]

15. Mein experimentelles Resultat steht in Widerspruch mit dem von Hrn. Edlund erhaltenen[2]), der bei gleicher Ge-

1) Fortsetzung von **9.** p. 552.

2) Edlund, Wied. Ann. **1.** p. 173. 1877 u. **8.** p. 127 ff. 1879.

schwindigkeit die Stromstärke unabhängig vom Querschnitt findet, und ich werde zunächst die möglichen Ursachen eines so abweichenden Ergebnisses zu discutiren haben.

Bei meinen eignen Beobachtungen variirte der Querschnitt der Röhren in jedem der beiden Sortimente vom Einfachen bis Zwanzigfachen, und es sind jedesmal wenigstens vier gleich behandelte Röhren verglichen. Das Reinigungsverfahren ist mannichfaltig abgeändert und auch Schellacküberzüge sind benutzt. Wenn trotzdem sich überall annähernd dasselbe Gesetz zeigt, so können Zufälligkeiten der Beobachtung nicht von Einfluss gewesen sein.

Wie aus der Zusammenstellung der mittlern Fehler[1]) hervorgeht, darf man den zur Geschwindigkeit $u = 8$ Meter/Sec. gehörigen Druck p_8 bis auf 1 Proc. als richtig annehmen, und zur Umrechnung der electromotorischen Kräfte auf diesen Druck ist die Proportionalität beider Grössen nur zwischen Grenzen benutzt, für welche sie bei der nahezu engsten, einer mittlern und der weitesten Röhre bis auf Bruchtheile eines Procentes nachgewiesen ist. Der Querschnitt der Röhren ist nach der scharfen Coulomb'schen Methode bestimmt.

Die Bestimmung der electromotorischen Kräfte setzte Gleichheit der Polarisation für ruhendes und strömendes Wasser voraus, welche für die hier auftretenden schwachen Ströme von kurzer Dauer nachgewiesen ist. Ein hingegen erhobenes Bedenken würde für meine Versuche kaum eine Bedeutung haben, da die Electroden besonders der letzten Versuche sehr gross waren (bis 12,5 qcm), und das Wasser bei ihnen nur mit geringer Geschwindigkeit vorbeiströmte. Denn ausser bei 1, 2, 7 befanden sie sich in den seitlichen Ansätzen weiter Glasröhren von 9,3 mm Durchmesser, zwischen denen die zu untersuchenden eingekittet wurden.

Die Grundlagen der Berechnung dürfen somit auch als gesichert gelten.

Hrn. Edlund's erste Beobachtungen[2]) sind ohne vor-

1) s. Bd. 9. p. 544.

2) Edlund, Wied. Ann. 1. p. 169 ff. 1877.

herige Reinigung der Röhren angestellt, und ich darf mich daher auf eine Besprechung der späteren[1]) beschränken.

Dieselben beziehen sich auf Vergleichung von je zwei Röhren, deren Querschnitte sich etwa wie 1:2,8, resp. 1,4 und 4,2 verhielten, also in ziemlich engen Grenzen blieben. Die in seitliche Ansätze der Röhren selbst eingekitteten Electroden (Golddrähte) hatten eine verhältnissmässig geringe Oberfläche, und die Polarisation war ziemlich bedeutend.

Die Berechnung der Versuche, deren Einzelnheiten a. a. O. nachgesehen werden mögen, beruht einmal auf der Annahme, dass die Stromstärken dem Quadrate der mittlern Geschwindigkeit des Wassers proportional sind. Man könnte Bedenken tragen, ob dies Gesetz noch hinreichend genau ist für Aenderungen derselben im Verhältniss 1:2,781 (Vers. 9), doch überzeugt man sich leicht, dass hierin nicht der Grund der Abweichung der Resultate von den meinigen liegen kann, indem die Einführung einer niedrigern Potenz der Geschwindigkeit die Differenz nur vergrössern würde.

Ferner bedient sich Hr. Edlund des Depolarisators, um die bei fliessendem Wasser beobachtete Stromstärke vom Einflusse der Polarisation zu befreien, und ermittelt das Verhältniss der Querschnitte der Röhren mit Benutzung desselben Instruments.

Ich werde nun aber nachweisen, dass beim Depolarisator zwei von Hrn. Edlund nirgend erwähnte Fehlerquellen auftreten, welche beide die Ablenkungen für grössere Widerstände verhältnissmässig grösser ausfallen lassen als für kleinere.

Möglichenfalls hat auch die Buchsbaumscheibe des Instruments von Hrn. Edlund ungenügend isolirt, was einen Fehler in demselben Sinne zur Folge haben würde.

Zunächst werde untersucht, wie gross der Fehler der Depolarisatormessungen sein müsste, um von der Verschiedenheit der Resultate Rechenschaft zu geben.

Bei der Versuchsanordnung *A* von Hrn. Edlund[2]) sei

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 127 ff. 1879.
2) l. c. 8. p. 127 ff. 1879.

für die engere Röhre o die Ablenkung bei ruhendem, p bei gedrehtem Depolarisator, o_1, p_1 die entsprechenden Grössen für die weitere Röhre, δ der Depolarisatorfactor, so setzt Hr. Edlund:

$$1 - \alpha = \frac{o}{p\delta}, \quad 1 - \alpha_1 = \frac{o_1}{p_1\delta}.$$

Nehme ich ferner bei gleicher mittlerer Geschwindigkeit (abweichend von Hrn. Edlund) die Stromstärke dem Radius proportional an, benutze aber zur Reduction auf die gleiche Geschwindigkeit die Proportionalität mit dem Quadrate derselben, so werden die Stromstärken für die beiden Röhren: $x = Cu^3r$ resp. $x_1 = Cu_1{}^2r_1$, wo u und u_1 die Geschwindigkeiten bedeuten und C eine Constante ist.

Da nun aber beide Röhren von derselben Wassermenge durchflossen werden, so ist:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{r_1{}^2}{r^2}, \quad \text{somit:} \quad \frac{x}{x_1} = \frac{r_1{}^3}{r^3}.$$

Andererseits folgt dies Verhältniss:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{a+b}{a-b}\,\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha} = \frac{a+b}{a-b}\,\frac{o_1}{o}\,\frac{p}{p_1},$$

wo a und b die beiden Ablenkungen des Galvanometers sind. Mit Berücksichtigung der gleichen Länge beider Röhren setzt Hr. Edlund ferner:

$$\frac{r_1{}^2}{r^2} = \frac{p}{p_1},$$

sodass:

(g) $$\left(\frac{a+b}{a-b}\,\frac{o_1}{o}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{p_1}{p}.$$

Der Versuch 9 ergab nun:

$a = 38{,}59$	$b = 28{,}75$
$o = 28{,}3$	$o_1 = 93{,}63$
$p = 21{,}47$	$p_1 = 59{,}7$.

Die linke Seite der Gleichung wird 3,499, die rechte 2,781, sodass also das Verhältniss der Ablenkungen bei gedrehtem Depolarisator um $^1/_5$ seines eignen Werthes fehlerhaft sein müsste. Schon geringe Beobachtungsfehler in a und b ändern das Resultat sehr bedeutend; so genügt die Annahme $b = 27{,}75$, um links 3,371 zu erhalten. Aenderungen der Röhrenwand während der Versuche von weit grösserem

Einfluss sind häufig, doch werde 3,499 als richtig zu Grunde gelegt.

Leider gibt Hr. Edlund bei den übrigen Versuchen nicht genug Detail, um eine analoge Rechnung durchzuführen.[1])

16. Bei einem Versuche, den Depolarisatorfactor mit Benutzung einer Nebenschliessung und der 34000 Windungen zählenden Rollen des Siemens'schen Galvanometers zu bestimmen, ergab mir eine Drehung des Depolarisators etwa $^1/_4$ der erwarteten Ablenkung. Als ich ferner (am 19. Nov. 1878) mit Hülfe des Depolarisators den Widerstand des destillirten Wassers in den Röhren 21 und 22 messen wollte, erhielt ich Ausschläge, welche mit wachsender Drehungsgeschwindigkeit stiegen und auf den 10fachen Betrag des wahrscheinlich richtigen Werthes gebracht werden konnten.

Die ausgedehnte Anwendung des Depolarisators von Seiten des Hrn. Edlund bewog mich, diese Verhältnisse näher zu untersuchen, indem ich hoffte, hier vielleicht den Grund unserer abweichenden Resultate zu entdecken, und ich bemerkte bald, dass die eben beschriebenen auffälligen Erscheinungen theils durch den Schliessungsextrastrom im Galvanometer, theils durch Ladungsvorgänge hervorgerufen werden.

17. Aus einem Elemente der electromotorischen Kraft E, dem Galvanometer und dem Depolarisator sei ein einfacher Stromkreis gebildet, dessen gesammter Widerstand W sei. Wird der Depolarisator gedreht, so wird der Strom abwechselnd geschlossen und unterbrochen.

Das Potential des Stromkreises auf sich selbst, P, wird fast ausschliesslich von dem Galvanometer herrühren, da die geradlinigen Theile der Leitung einen geringen Beitrag liefern, und auch die Widerstände der Siemens'schen Stöpselrheostaten wegen ihrer „bifilaren" Wickelung fast keine Extraströme geben, wovon ich mich direct überzeugt habe.

Da kein Oeffnungsfunke entsteht, kann sich der Oeff-

1) Der Versuch 10 l. c. stimmt übrigens ohne weiteres ziemlich gut mit der Annahme der Proportionalität mit dem Radius.

nungsextrastrom nicht ausbilden, und die Betrachtung kann sich auf den Schliessungsextrastrom beschränken.

Für diesen ist[1])

$$i = \frac{1}{W}\left(E - P\frac{di}{dt}\right),$$

woraus:

$$i = \frac{E}{W}\left[1 - e^{-\frac{W}{P}t}\right],$$

wenn die Zeit vom Augenblicke der Stromschliessung gerechnet wird, sodass für $t = 0$ auch $i = 0$ ist.

Es sei nun bei gedrehtem Depolarisator die Dauer jedes Contactes t_1, jeder Unterbrechung t_2, so wird während eines Contactes der Integralstrom sein:

$$\int_0^{t_1} i\,dt = \frac{E}{W}\left[t_1 - \frac{P}{W}\left(1 - e^{-\frac{W}{P}t_1}\right)\right].$$

woraus, da während t_2 kein Strom vorhanden ist, die am Galvanometer beobachtete mittlere Stromstärke folgt:

$$(1) \qquad J = \frac{1}{t_1 + t_2}\int_0^{t_1} i\,dt = \frac{E}{W}\left[\frac{t_1}{t_1 + t_2} - \frac{P}{W}\left(\frac{1 - e^{-\frac{W}{P}t_1}}{t_1 + t_2}\right)\right].$$

Da bei meinem Depolarisator einer Umdrehung der Kurbel 10 Drehungen der Scheibe entsprachen, und bei einer Drehung der letztern 24 Stromschliessungen stattfanden, so ist $t_1 + t_2$, die Zwischenzeit zwischen je zwei successiven Stromschliessungen, leicht zu ermitteln. Wurde die Kurbel in zwei Sec. einmal herumgeführt, so war $t_1 + t_2 = \frac{1}{120}$ Sec., bei der doppelten Geschwindigkeit $\frac{1}{240}$ Secunde.

Für einen Stromkreis, bei welchem der Einfluss von P unmerklich ist, sei die Stromstärke für Ruhe und Drehung des Depolarisators beobachtet, so ist der Quotient, früher als „Depolarisatorfactor" bezeichnet:

$$\delta = \frac{t_1 + t_2}{t_1},$$

sodass man hierin ein Mittel zur experimentellen Bestimmung von t_1 besitzt. Ob man den zweiten Term in der

1) Helmholtz, Pogg. Ann. 83. p. 510. 1853.

Gleichung (1) vernachlässigen kann, erkennt man leicht daraus, dass dann bei Steigerung der Drehungsgeschwindigkeit die Ablenkung ungeändert bleiben muss.

Ich bemerke, dass, wenn ich einen einfachen Stromkreis aus Siemens'schen Widerstandsrollen und einer Rolle des Galvanometers von 775 Windungen bildete, eine Aenderung der Ablenkung nicht constatirt werden konnte, während sie bei Anwendung beider Rollen noch nicht ein Procent betrug. Beide Versuchsanordnungen durften somit noch zur Bestimmung von δ benutzt werden.

Eine directe Berechnung von P aus der Formel (1) würde eine unbequeme Auflösung einer transcendenten Gleichung erfordern; ich umging diese Schwierigkeit durch folgende Anordnung der Beobachtungen.

Es wurde zunächst die Ablenkung bei ruhendem Depolarisator beobachtet:

$$J_r = \frac{E}{W}, \tag{2}$$

dann für 120 Stromschliessungen in der Secunde J, welches leicht in die Form gesetzt werden kann:

$$J = J_r \left[\frac{1}{\delta} - \frac{P}{W}\left(\frac{1 - e^{-\frac{W}{P} t_1}}{t_1 + t_2}\right)\right], \tag{3}$$

und endlich nach Verdoppelung der Drehungsgeschwindigkeit:

$$J' = J_r \left[\frac{1}{\delta} - \frac{P}{W}\left(\frac{1 - e^{-\frac{W t_1}{P 2}}}{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)}\right)\right]. \tag{4}$$

Nenne ich noch der Kürze wegen $\frac{J_r}{\delta} : J_0$, so folgt aus (3) und (4):

$$\frac{2(J_0 - J)}{J_0 - J'} = 1 + e^{-\frac{W}{P}\frac{t_1}{2}}. \tag{5}$$

Diese Gleichung liefert einen Näherungswerth für P, der leicht durch Benutzung von (3) und (4) corrigirt werden kann.

Hat man nicht einen unverzweigten Stromkreis, so sei W_e der Widerstand desjenigen Zweiges, welcher das Element enthält, W_n derjenige der Nebenschliessung, und endlich W_g der Widerstand des Zweiges mit Galvanometer und Depo-

larisator. Da ein merklicher Extrastrom nur in dem letztgenannten Zweige auftritt, liefert eine Anwendung der Principien von Hrn. Helmholtz:[1])

$$(1') \qquad J = \frac{E W_n}{N}\left[\frac{1}{\delta} - \frac{P(W_e + W_n)}{N}\,\frac{\left(1 - e^{-\frac{N t_1}{(W_e + W_n) P}}\right)}{t_1 + t_2}\right],$$

$$(2') \qquad J_r = \frac{E W_n}{N},$$

$$(3') \qquad J = J_r\left[\frac{1}{\delta} - \frac{P(W_e + W_n)}{N}\,\frac{\left(1 - e^{-\frac{N t_1}{(W_e + W_n) P}}\right)}{t_1 + t_2}\right],$$

$$(4') \qquad J' = J_r\left[\frac{1}{\delta} - \frac{P(W_e + W_n)}{N}\,\frac{\left(1 - e^{-\frac{N}{(W_e + W_n) P}\cdot\frac{t_1}{2}}\right)}{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)}\right],$$

$$(5') \qquad \frac{2(J_0 - J)}{J_0 - J'} = 1 + e^{-\frac{N}{(W_e + W_n) P}\cdot\frac{t_1}{2}}.$$

Hierin ist:

$$N = W_e W_n + W_e W_g + W_n W_g.$$

Eine Vergleichung dieser Formeln mit den entsprechenden für einen unverzweigten Stromkreis lässt erkennen, dass die Anbringung einer Nebenschliessung einen verhältnissmässig stärkern Einfluss der Extraströme zur Folge hat. Da nämlich der Grösse $\frac{1}{W}$ in (2) bei einer Nebenschliessung $\frac{W_n}{N}$ entspricht, so erscheint der zweite Term in (1') etc. $1 + \frac{W_e}{W_n}$ mal grösser als der entsprechende in (1) etc., bei gleichem J_r und J_0.

18. Um die entwickelte Theorie zu prüfen und P zu bestimmen, habe ich zwei Beobachtungsreihen angestellt.

27. Jan. 1880. Das Galvanometer war mit den beiden Rollen von je 775 Windungen versehen. Die Rollen mit 34000 Windungen waren möglichst in derselben relativen Lage, die sie am Galvanometer hatten, auf den Tisch gestellt und konnten in den Stromkreis, der ein Meidinger'sches Element, zwei Siemens'sche Widerstandskasten und

1) Helmholtz, l. c. p. 511 ff.

den Depolarisator enthielt, nach Belieben eingeschaltet werden. Waren sie ausgeschaltet, so wurde ein dem Widerstande derselben gleicher zugefügt, sodass hier W immer ungeändert blieb.

Es wurde beobachtet:

Galvanometerrollen	1) $W = 13371$			2) $W = 8371$	
	J_r	J	J'	$*J$	J'
eingeschaltet	351,0	101,9	70,7	123,9	76,5
ausgeschaltet	351,0	187,9	187,1	300,1	297,7
eingeschaltet	350,8	103,1	70,5	126,1	78,1

* J_r fiel ausserhalb der Scala.

Die mittlere Beobachtung von (1) lieferte zunächst $\delta = 1{,}868$, $t_1 = 0{,}004\,461$ Sec., und es ergab sich im Mittel:

$$P = 30{,}72 \pm 1{,}00 \text{ Siemens.Secunden.}$$

Die hiermit nach (3) und (4) berechneten Werthe von J und J' sind mit den beobachteten noch einmal zusammengestellt:

J ber.	J beob.	Differ.	J' ber.	J' beob.	Differ.
105,0	102,5	+2,5	67,7	70,6	−2,9
126,5	125,0	+1,5	75,3	77,3	−2,0

Ich halte die Beobachtungen J, also die bei langsamerer Drehung, für zuverlässiger, da das laute Geräusch bei schnellerer Drehung das Hören der Uhrschläge erschwerte. P würde demnach etwas zu verkleinern sein, und in gleichem Sinne würde auch noch die Berücksichtigung des geringen Beitrages wirken, den die hier am Galvanometer befestigten Rollen mit wenigen Windungen lieferten.

Bezeichne ich die electromagnetische und electrodynamische absolute Widerstandseinheit mit W_{elm}, resp. W_{eldy}, so ist:

$$1 \text{ Siemens} = 0{,}9550 \cdot 10^{10} \quad W_{elm} = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}9550 \cdot 10^{10}\, W_{eldy},$$

sodass also:

$$P = 30{,}72 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}9550 \cdot 10^{10}\, W_{eldy}.\text{Sec.} = 14{,}67 \cdot 10^{10} \text{ mm.}$$

Versuche mit Nebenschliessungen am 26. Jan. 1880 gelangen weniger gut, da sich die Federn des Depolarisators während der Versuche in die rotirende Scheibe einschliffen

und hierdurch δ eine Aenderung erlitt, sodass nur ein angenäherter Werth durch Interpolation gewonnen werden konnte.

Bei den eigentlichen Versuchen trug das Galvanometer hier die Rollen mit vielen Windungen, vor und nach denselben wurde δ unter Anwendung des andern Rollensystems bestimmt. In folgendem Täfelchen sind die beobachteten und die nach (3') und (4') unter Annahme von $P = 30{,}72$ berechneten Werthe zusammengestellt.

W_e	W_g	W_n	δ	$t_1 10^3$	J_r	$\frac{J}{J_r}$ beob.	ber.	Diff.
5000	8365	50	2,119	3,933	141,5	28,45	25,90	−2.55
						18,4	15,15	−3.25
5000	3371	50	2,224	3,747	344,5	30,75	28,30	−2,45
						19,0	15,1	−3,90
5000	8365	100	*1,869	4,458	287,6	67,5	65,26	−2,24
						45,3	38,80	−6,50

* Die Federn waren inzwischen anders gestellt.

Die Differenzen rühren hauptsächlich von der Unsicherheit von δ und der dadurch bedingten von t_1 her und werden um so weniger befremden, als das Endresultat der Rechnung für J und J' als die verhältnissmässig kleine Differenz zweier grosser Zahlen erscheint, z. B. in der vierten Beobachtung: $154{,}9 - 139{,}8 = 15{,}1$. Eine Verringerung von δ um 2 Proc. würde die Differenzen fast verschwinden lassen.

Diese Versuche dürfen somit auch als eine Bestätigung der Formeln (3') und (4') gelten.

In früher mitgetheilten Versuchen[1]) habe ich den Depolarisator zu Widerstandsbestimmungen von destillirtem Wasser benutzt, unter Anwendung derselben Galvanometerrollen von 34000 Windungen, deren Potential auf sich selbst soeben = 30,72 Siemens. Secunde gefunden war.

Da der Stromkreis unverzweigt war, ist die Formel (3) anzuwenden; W betrug mindestens $1{,}1 \cdot 10^6$ Siemens, $t_1 + t_2$ nahe $^1/_{240}$, δ nahe 2. Die Exponentialgrösse wird verschwindend klein, und man erhält:

$$J = J_r \left[\tfrac{1}{2} - 0{,}00670\right].$$

1) S. Bd. 9. p. 535.

d. h. bei Vernachlässigung des letzten Gliedes einen Fehler von 1,34 Proc. Die von mir experimentell ermittelte und angewandte Correction von 1,52 Proc. stimmt hiermit fast genau überein.

Hr. Edlund theilt eine mit dem Depolarisator ausgeführte Widerstandsmessung[1]) mit, deren Resultat mit dem nach einer einwurfsfreien Methode erhaltenen übereinstimmte. Dies beweist aber nicht, dass der Einfluss des Schliessungsextrastromes unmerklich gewesen ist, denn auch bei Anwendung des Depolarisators ersetzt Hr. Edlund den Flüssigkeitswiderstand durch einen Drahtwiderstand und schliesst auf ihre Gleichheit aus der Uebereinstimmung der Ausschläge bei gedrehtem Depolarisator. Der Einfluss des Extrastromes musste natürlich beide mal derselbe sein. Hingegen gibt Hr. Edlund an, dass eine Aenderung der Umdrehungsgeschwindigkeit die Ablenkung von 136,5 auf 125,5 herabsetzte, was die Wirkung der Extraströme deutlich zeigt. Da Hr. Edlund für seine späteren Untersuchungen[2]) Multiplicatoren von viel grösserer Windungszahl benutzte, so werden bei diesen die Extraströme sich noch weit mehr bemerkbar gemacht haben.

19. Folgende Beobachtungen zeigen, dass die Benutzung des Depolarisators Ladungsvorgänge hervortreten lässt bei Capacitäten, wo dieselben unter gewöhnlichen Umständen unmerklich bleiben.

Von der „Axenfeder" a, welche mit der einen Messingscheibe des Depolarisators in Verbindung stand, führte die Leitung über das Plath'sche Galvanometer G und eine Batterie E von 2 Daniell zur andern Axenfeder a_1. Die schleifenden Federn s und s_1 treten bei Drehung des Depolarisators abwechselnd mit a und a_1, resp. a_1 und a in Verbindung, sodass s und s_1 sowie mit ihnen verbundene Leiter abwechselnd entgegengesetzt geladen werden. Die hierdurch entstehenden Ladungsströme lenken G ab.

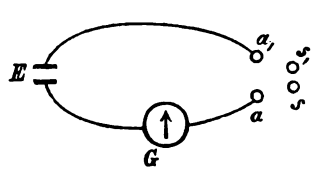


Fig. 3.

1) Edlund, Pogg. Ann. **156.** p. 274. 1875.

2) Edlund, Wied. Ann. **1.** p. 161. 1877, und **8.** p. 121. 1879.

Die Ablenkungen A_1 und A_2 (entsprechend einer Drehung der Kurbel in 1 resp. 2 Secunden) sind schon mit einer Correction wegen der Nebenschliessung durch den Fuss des Instrumentes versehen.

20. Octbr. 1879. 1 mm Ablenkung $= \frac{1}{1{,}069 \cdot 10^9} \frac{\text{Daniell}}{\text{Siemens}}$

$\delta = 2{,}08$. 2 Daniell.

Versuch	Anordnung (geladene Theile)	A_2	A_1
1	s und s_1 allein	3,62	7,40
2	s, s_1 + Drähte von je 2,1 m . . .	8,63	15,70
3	Dasselbe + Commutator	14,75	27,88
4	Wie (3) + dünne Leitungsdrähte .	18,03	31,85
5	„ (4) + Röhre 21 (dest. Wasser)	26,03	40,95
6	„ (4) + Röhre 22′	56,55	70,40
7	„ (4)	16,68	32,82
8	„ (4) + Ansätze*	19,71	36,41

* Dieselben Ansätze, worin bei (5) und (6) die Röhren eingekittet waren, mit Wasser gefüllt und isolirt.

In allen Versuchen ausser (5) und (6) waren s und s_1 voneinander isolirt; bei letzteren durch das Wasser in den Röhren verbunden. Eine directe Schliessung von (21) und (22′) ergab bei ruhendem Depolarisator 21,55 und 78,75.

Man sieht, wie bei Hinzufügung eines jeden neuen Stückes die Ablenkung wächst, und wie auch die Versuche (5) und (6) mit den Röhren sich den andern vollkommen anschliessen.

Bei den weiter mitzutheilenden Versuchen waren aa_1 und ss_1 vertauscht, sodass nun auch die Messingplatten alternirend geladen wurden:

16. Octbr. 1879. 1 mm $= \frac{1}{1{,}133 \cdot 10^9} \frac{\text{Daniell}}{\text{Siemens}}$. 2 Daniell.

Versuch	Anordnung	A_2
1	Depolarisator allein	24,33
2	Drähte von je 12 m jeder um einen Stuhl gewickelt	39,08
3	Dieselben parallel in eine Rolle gewickelt	357,81

Der Versuch 3 ist bereits von der etwa 16 mm betragenden Ablenkung befreit, welche von der unvollkommenen Isolation

der Bespinnung der zusammen aufgewickelten Drähte herrührte, und zeigt im Vergleich mit 2, wie sehr die Capacität durch die nun eintretende Bindung der entgegengesetzten Electricitäten gesteigert wird.

Bei Gelegenheit der schon mitgetheilten Versuche vom 25. Aug. 1879[1]) habe ich auch folgende Depolarisatorbeobachtungen gemacht, bei denen die Kurbel in 4, 2, 1 Sec. einmal herumgeführt wurde:

Röhre	A_4	A_2	A_1	
41	15,8	26,6	47,2	$\delta = 2{,}10$
21	24,0	32,3	50,3	2 Meidinger.
22′	50,9	57,9	73,3	

Bei ruhendem Depolarisator wurden die Ablenkungen erhalten 2,275 — 22,33 — 79,00.

Zu einer die Beobachtungen wenigstens annähernd darstellenden Theorie gelangte ich durch folgende Betrachtung.

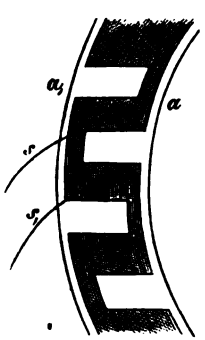


Fig. 4.

a_1 sei zur Erde abgeleitet, so wird auf a_1 das Potential 0, auf a hingegen E sein, wenn dies die electromotorische Kraft der Elemente ist. Die Capacität einer jeden schleifenden Feder und der mit ihr verbundenen Leiter sei C. Im Augenblicke $t = 0$, wo s einen Ansatz von a_1 verlässt, besitzt es das Potential und die Electricitätsmenge 0, das gleichzeitig von a heruntergleitende s_1 aber E, resp. $CE = Q_0$.

Betrachten wir gleich den Fall, wo zwischen s und s_1 eine Röhre mit Wasser eingeschaltet ist. Findet im übrigen Isolation statt, so wird während der Zeit t_2, welche s und s_1 auf Ebonit verweilen, ein Ueberströmen der Electricität von s_1 nach s eintreten.

Seien in jedem Moment dieser Periode die Potentiale auf s und s_1 V, resp. V_1, so werden auf ihnen die Electricitätsmengen $Q = CV$, resp. $Q_1 = CV_1$ sich befinden, und zwar wird wegen der vorausgesetzten Isolation $Q + Q_1 = Q_0$ sein.

1) S. Bd. 9. p. 540.

Während dt tritt von s_1 zu s die Electricitätsmenge:

$$dQ = i\,dt$$

über, wo:

$$i = \frac{V_1 - V}{W} = \frac{Q_1 - Q}{CW} = \frac{Q_0 - 2Q}{CW},$$

wenn W den Widerstand der Röhre bedeutet. Demnach ist:

$$dQ = \frac{Q_0 - 2Q}{CW}\,dt.$$

Mit Rücksicht darauf, dass für $t = 0$ $Q = 0$, erhält man aus dieser Gleichung leicht:

$$Q = \frac{CE}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t_2}{CW}}\right)$$

für diejenige Electricitätsmenge, welche am Ende des Zeitraumes t_2 auf s übergegangen ist.

Jetzt kommt s in Berührung mit a, wodurch seine Electricitätsmenge auf CE gebracht wird, und die zuströmende Menge:

$$\frac{CE}{2}\left(1 + e^{-\frac{2t_2}{CW}}\right)$$

geht durch das Galvanometer. s_1 gelangt in Contact mit a_1 und entladet seine Electricität zur Erde.

Während der Dauer t_1 des Contactes findet ferner die Stromstärke statt: $\frac{E}{W}$.

Die mittlere Stromstärke für die ganze Dauer $t_1 + t_2$ wird somit:

$$J = \frac{Et_1}{W(t_1 + t_2)} + \frac{CE}{2(t_1 + t_2)}\left(1 + e^{-\frac{2t_2}{CW}}\right) \tag{6}$$

und diese wird am Galvanometer beobachtet.

Falls keine Verbindung zwischen s und s_1 besteht, hat man $W = \infty$ zu setzen und erhält:

$$J = \frac{CE}{t_1 + t_2}. \tag{7}$$

Man findet übrigens dasselbe Resultat, wenn man die Ableitung zur Erde so gelegt denkt, dass auf a und a_1 die Potentialwerthe $\frac{E}{2}$, resp. $-\frac{E}{2}$ stattfinden.

Diese Formeln können nur angenähert gelten, da bei den Versuchen ein Theil der Electricität, die s, resp. s_1 mit-

getheilt wird, sich zerstreut und vielleicht auch die Ladung eine unvollständige bleibt, und zwar umsomehr, je grösser die Drehungsgeschwindigkeit ist.

Aus (6) lässt sich C durch successive Näherung berechnen, wenn man noch $\frac{E}{W}$, d. h. die ohne Polarisation bei ruhendem Depolarisator stattfindende Stromstärke kennt. Bei den Röhren 41 und 21 kann man dafür mit genügender Näherung die bei ruhendem Depolarisator beobachtete Stromstärke nehmen, bei 22′ habe ich die aus den Dimensionen und dem Widerstande des Wassers berechneten Ablenkungen 83,62 (25. 8. 79) und 83,60 (20. 10. 79) benutzt.

Wie man t_2 und $t_1 + t_2$ bestimmt, ist schon früher auseinandergesetzt, und im Obigen sind alle Data zur Rechnung gegeben.

Die Ausführung derselben lieferte folgende Werthe der mit 10^{21} multiplicirten Capacität C in absoluten electromagnetischen Einheiten:

Datum	Apparat	1 Drehung der Kurbel in		
		4 Sec.	2 Sec.	1 Sec.
25. 8. 79.	Röhre 41 . . .	10,31	8,68	7,70
	Röhre 21 . . .	13,35	9,70	7,97
	Röhre 22′ . . .	14,21	11,00	9,06
20. 10. 79.	Isolirte Ansätze	—	8,04	7,43
	Röhre 21 . . .	—	9,41	8,00
	Röhre 22′ . . .	—	12,64	10,46

Die hiermit berechneten Werthe der Ablenkungen stimmen mit den beobachteten bis auf Differenzen von höchstens 0,15 Scalentheile überein.

Wollte man die Capacitäten in Mikrofarad (1 Mikrofarad $= 10^{16}$ abs. Einh.) ausdrücken, so hätte man die im Täfelchen vereinigten Zahlen mit 10^{-5} zu multipliciren.

Man bemerkt, wie C mit zunehmenden Röhrendimensionen wächst, was zu erwarten ist, da sich ja auch auf der Oberfläche des Wassers in der Röhre freie Electricität ansammeln muss. Die Capacitäten fallen für gesteigerte Drehungsgeschwindigkeit immer kleiner aus, und zwar ist bei den isolirten Ansätzen das Zurückbleiben gering, grösser

für die Röhren. Dies hat vielleicht seinen Grund in unvollständiger Ladung während des kurzen Contactes, wahrscheinlicher ist mir, dass die freie Electricität auf der Oberfläche des Wassers in der Röhre erst im Laufe des Contactes den Werth wie für stationäre Strömung erreicht, sodass beim Beginne des Contactes der (in der Rechnung dem stationären gleich gesetzte) Strom einen geringern Werth hat. Es wären dies also ähnliche Vorgänge wie in Kabeln, deren Verhalten ja auch von dem Producte Capacität × Widerstand abhängt. Während aber die Kabel einen verhältnissmässig geringen Widerstand bei hoher Capacität haben, erreicht hier das Product infolge des grossen Widerstandes einen merklichen Werth.

Um den Fehler zu schätzen, den die Ladungserscheinungen in meinen Widerstandsmessungen zur Folge gehabt haben können, erinnere ich zunächst daran, dass eine Steigerung der Drehungsgeschwindigkeit von $^1/_2$ auf 1 Kurbeldrehung in der Secunde die Ablenkung nicht merklich änderte, sodass sich die Ladungserscheinungen mit den Wirkungen des Schliessungsextrastromes ziemlich genau compensirt haben müssen, welche letzteren 1,52 Proc. betrugen.[1])

Eine andere Bestimmung erhält man daraus, dass am 25.8. 79. die beobachtete Ablenkung $A_2 = 26{,}6$ bei der Röhre 41 etwa um 25,5 Scalentheile grösser war, als sie es ohne Ladungsvorgänge gewesen wäre, welche Differenz dem zweiten Gliede der Gleichung (6) entspricht. Für die zu den Widerstandsmessungen gebrauchte weite Röhre wird dasselbe etwa halb so gross, da ferner das Siemens'sche Galvanometer etwa $^1/_{10}$ der Empfindlichkeit des Plath'schen hatte, so würde bei ersterem der Fehler 1,27 Scalentheile betragen haben, was für die Widerstände, die aus Ablenkungen von 60 bis 107 Scalentheilen bestimmt wurden, 1,2 bis 2,1 Proc. Fehler ergäbe.

Mit Rücksicht auf diese Uebereinstimmung wäre es vielleicht besser gewesen, die Widerstandsbestimmungen nicht mit der Correction für die Extraströme zu versehen.

---

1) S. Bd. 9. p. 534.

20. Die so eben erörterten Erscheinungen, Schliessungsextraströme und Ladungsvorgänge, wirken beide dahin, die Ablenkungen für grosse Widerstände verhältnissmässig zu gross erscheinen zu lassen, wie man leicht aus den Formeln (3), (3′) und (6) erkennt.

Das unwahrscheinliche Resultat, dass bei Hrn. Edlund für engere Röhren die „Polarisationsconstante“ (Quotient der Polarisation durch die von ihr befreite electromotorische Kraft) mitunter grösser wird als für weitere derselben Länge bei demselben Wasser (s. Vers. 9, 13, 14)[1]), lässt derartige Fehlerquellen vermuthen.

Ob ihr Einfluss ausreicht, um den Unterschied der Resultate von Hrn. Edlund und mir zu erklären, kann natürlich nur durch eine Untersuchung der Apparate des Hrn. Edlund festgestellt werden; folgende kleine Rechnung soll nur die Möglichkeit zeigen.

Nach den von Hrn. Edlund mitgetheilten Ablenkungen bei Wasserstrom glaube ich die Empfindlichkeit seines Galvanometers etwa halb so gross wie die meines Plath'schen schätzen zu dürfen. Nehme ich für seinen Depolarisator auch nur 120 Stromwechsel in der Secunde, so wird im Hinblick auf das Täfelchen (p. 58) der Werth 6,4 Scalentheile für die Ladungsströme nicht übertrieben erscheinen. Vermindert man die Ablenkungen 59,7 und 21,47 bei gedrehtem Depolarisator um diesen Betrag, so wird der Quotient $\frac{53,3}{15,07} = 3,537$, also bereits grösser als oben[2]) erfordert, um Uebereinstimmung mit meinen Resultaten zu erlangen.

Da ferner Hrn. Edlund's Galvanometer viele Windungen und eine wahrscheinlich grössere Drahtmasse als mein Siemens'sches besitzt, so kann das Potential desselben auf sich selbst leicht das Vierfache, also etwa 120 Siem. Sec. betragen. Wäre ferner der Widerstand des Wassers in der weitern Röhre 300000 Siemens gewesen, so würde, $t_1 + t_2 = \frac{1}{120}$ gesetzt, die Klammer der Formel (3′) nahezu werden:

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 131. 1879.

2) s. p. 49.

$$\tfrac{1}{2} - \frac{120 \cdot 120}{300\,000} = \tfrac{1}{2} - 0{,}048,$$

und eine Vernachlässigung des letzten Terms gäbe einen Fehler von 9,6 Proc. In der engern Röhre würde derselbe mit Rücksicht auf ihren etwa dreimal grössern Widerstand ca. 3,2 Proc. betragen, und der Quotient würde um 7,1 Proc. zu vergrössern sein.

21. In seiner vorletzten Abhandlung[1]) spricht Hr. Edlund unter 2) noch einmal das Gesetz aus, „dass die electromotorische Kraft mit der Ausflussgeschwindigkeit wächst, sodass sie bei kleinerer Geschwindigkeit ihrer ersten Potenz, bei grösserer aber annähernd ihrem Quadrate proportional ist", und kritisirt dann die von mir dagegen gemachten Bemerkungen.[2]) Hr. Edlund gibt dieselben zunächst nicht correct wieder, denn an der angegebenen Stelle sage ich nur, „dass nach meinen Versuchen die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft von der Geschwindigkeit keine einfache gewesen sei", und ich kann das Gesetz des Hrn. Edlund, das ich nirgend als „unrichtig ausgedrückt" bezeichnet habe (was ich ebenso wenig in der von Hrn. Edlund angegebenen Weise motivirt habe), auch noch nicht als einfach anerkennen, da die Potenz der Geschwindigkeit von 1 bis 2 variirt, ohne dass über diese Zunahme etwas Bestimmtes festgesetzt ist.

Sodann missversteht Hr. Edlund den Sinn der von mir behaupteten Proportionalität der electromotorischen Kraft mit dem Drucke in einer Weise, zu der ich keinen Anlass gegeben zu haben glaube.

A. a. O. sage ich ausdrücklich: „Wenn die Dimensionen des angewendeten Apparates und die Flüssigkeit (sowie ihre Temperatur) gegeben sind, so ist durch den Druck die Geschwindigkeit bestimmt und umgekehrt. Um Beobachtungen, die an demselben Apparate mit derselben Röhre angestellt sind, untereinander vergleichbar zu machen, kann man somit

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 120. 1879.
2) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 33. 1878.

entweder eine Beziehung der electromotorischen Kraft zum Drucke oder zur Geschwindigkeit suchen etc." Hiermit ist klar genug ausgesprochen, dass die Proportionalität nur für denselben Apparat gelten soll, und die Berechnung meiner Versuche mit den Röhren X, XI, XII, XIII [1]) erscheint demnach als selbstverständlich und nicht als eine Inconsequenz meinerseits, wie Hr. Edlund meint.[2])

Diejenigen seiner Versuche, wo er nachweist, dass die electromotorische Kraft bei demselben Druck durch eine auch die Geschwindigkeit modificirende Aenderung des Apparates ebenfalls variirt, widerlegen somit eine Behauptung, die ich nie aufgestellt habe.

Hr. Edlund[3]) theilt Versuche mit[4]), nach denen die electromotorische Kraft merklich langsamer zunahm als der Druck, wenn dieser von 149 auf 759 mm Quecksilber gesteigert wurde.

Zur Prüfung dieses Resultates habe ich selbst einige Beobachtungen angestellt, bei denen besondere Sorgfalt auf die Druckcorrection wegen der Niveaudifferenz zwischen dem untern Ende der Röhre und dem Wasser im Ballon verwandt wurde. Der zum Auffangen des Wassers dienende Porzellaneimer stand so tief, dass sich der Wasserstrahl schon vor seiner Erreichung in Tropfen auflöste. Die angegebenen Zahlen sind die Mittelwerthe aus je 3 rasch aufeinanderfolgenden Beobachungen; A_{1000} bedeutet die für $p = 1000$ unter Annahme der Proportionalität mit dem Drucke berechnete Ablenkung. Die Röhre 22′ ist etwa 2 Stunden nach ihrer Reinigung (mit Ammoniak und kalter Schwefelsäure) und Befestigung untersucht, 23 zunächst unter denselben Umständen, dann aber, nachdem sie 24 Stunden mit Wasser gefüllt gewesen war:

1) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 36. 1878.
2) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 127. 1879.
3) Der folgende Schluss des § 21 ist nachträglich hinzugefügt.
4) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 121. 1879.

Dat.	Röhre	p	A	A_{1000}	Mittel	Diff.	Diff. in Proc.
3. 3. 80.	22′	152,8	13,47	88,12			
		801,5	65,82	82,12	87,13	5,01	5,8
		148,5	12,78	86,15			
8. 3. 80.	23.	152,3	14,35	94,23			
		772,0	65,77	85,18	91,27	6,09	6,7
		159,2	14,05	88,30			
9. 3. 80.	23.	150,2	12,68	84,48			
		769,2	58,52	76,05	81,09	5,04	6,2
		160,2	12,45	77,69	73,71	3,88	5,0
		791,7	56,48	71,37			

Die Ausflussgeschwindigkeit betrug:

bei 22′ für p = 148,0 mm 3,308 Meter/Sec.
813,9 8,418
„ 23′ „ „ 170,9 „ 3,181 „
777,5 7,502 ,

was sich ziemlich nahe an die Verhältnisse der Edlund'schen Versuche anschliesst.

Während nun aber Hr. Edlund Abweichungen von der Proportionalität bis zu 16 und 17 Proc. erhält, erreichen diese bei mir im Mittel etwa 6 Proc., sodass ich also auch für ziemlich grosse Aenderungen des Druckes die electromotorische Kraft demselben noch nahe proportional finde. Noch grössere Druckdifferenzen bedingen vielleicht eine Aenderung der Art der Strömung und eine bedeutendere Abweichung von der Proportionalität.

Leider gibt Hr. Edlund nirgends an, dass er die oben erwähnte Druckcorrection wegen der Niveaudifferenz des Wassers angebracht hat. Ihre Vernachlässigung würde ausreichen, um die Differenz unserer Resultate zu erklären, möglichenfalls rührt dieselbe aber von einer Verschiedenheit der Strömungsverhältnisse in unseren Röhren her.

22. Was Hr. Helmholtz über die Gründe der Unregelmässigkeit der Erscheinungen auf dem Gebiete der Reibungselectricität ausführt[1]), kann auch zur Erklärung der starken Aenderungen dienen, denen die durch strömendes Wasser in Röhren erzeugte electromotorische Kraft im Laufe der Zeit, wie auch durch geringe Aenderungen der Behandlung unterworfen ist.

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 344. 1879.

Die oberflächliche Schicht des Glases, welche über die Wirkung entscheidet, kann infolge theilweiser Auflösung durch das Wasser verändert, oder ihr etwa anhaftende fremde Stoffe fortgespült werden. Vielleicht dringt auch der dem Glase angehörige Theil der electrischen Doppelschicht mit der Zeit tiefer in dasselbe ein, wodurch eine Aenderung der Vertheilung in dem in das Wasser fallenden Theile derselben und demgemäss auch der electromotorischen Kraft eintreten könnte.

Andererseits wäre es aber auch nicht unmöglich, dass hier Aenderungen einer wenn auch geringen Gleitung des Wassers an der Glaswand mitwirken, welche, so klein auch ihr Einfluss auf die Bewegungserscheinungen des Wassers ist, doch die electrischen Vorgänge merklich modificiren können. Letztere nämlich hängen von der Grösse $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ ab, und bei dem in der Nähe der Röhrenwand jedenfalls sehr grossen Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ würde schon eine kleine Variation der Gleitungsconstante l eine bedeutende Wirkung haben. Dass l jedenfalls für Wasser und Glas klein ist und bei der Berechnung der Strömungsvorgänge vernachlässigt werden kann, folgt aus den von Hrn. Helmholtz citirten Versuchen des Hrn. Quincke über Drucksteigerung durch electrische Diffusion[1]), wie aus den bekannten Versuchen Poiseuille's über die Strömung durch Capillaren.

Ich erinnere daran, dass Röhren, welche durch Erhitzen in Schwefelsäure und Hindurchsaugen von heissem Wasser und trockener Luft gereinigt waren, zuerst einen geringen Werth der electromotorischen Kraft zeigten, der aber schnell anstieg, mitunter bis auf das Dreifache.

Falls dies Verhalten in einer Aenderung der Gleitung seinen Grund hätte, müsste gleich nach der Reinigung die Ausflusszeit desselben Volumens grösser ausfallen, als nach längerer Benetzung der Röhre. Folgende Versuche zeigen nun in der That wenigstens eine Andeutung eines solchen Verhaltens.

1) Quincke, Pogg. Ann. **113**. p. 541 ff. 1861.

Benutzt wurde die Röhre 43 und eine andere aus dem Gehlberger Sortimente von 1 m Länge und 0,407 mm Durchmesser, welche letztere ich vor der Gebläselampe zu einer kurzen Spirale aufgerollt hatte. Beide genügen dem Poiseuille'schen Gesetze hinreichend, um die Beobachtungen jeder Reihe mit Hülfe desselben aufeinander reduciren zu können. Das zu den Versuchen verwendete destillirte Wasser war filtrirt und wurde vor denselben wenigstens eine Stunde in einem luftverdünnten Raum von 50—60 mm Druck gehalten. Vor jedem Versuche wurde das Wasser umgerührt; seine Temperatur gab ein direct in Zehntelgrade getheiltes Thermometer.

Die Röhre wurde mit Hülfe eines kurzen ungeschwefelten Gummischlauches so an dem untern Ende einer Pipette (Volumen 12622 cmm) befestigt, dass sie in den Pipettenhals hineinragte, und der Schlauch beiderseits mit Gummischnur festgebunden.

Vom andern Ende der Pipette führte ein Gummischlauch zu einem Gefässe, in dem Luft comprimirt oder verdünnt werden konnte, und das gross genug war, um die Druckschwankung während jedes Versuches 1 mm nicht überschreiten zu lassen. Bei allen Beobachtungen tauchte die ganze Capillare in das Becherglas, bei denen mit Ueberdruck auch der Körper der Pipette, welche im letztern Falle kurz vorher aus demselben gefüllt wurde.

Der Druck wurde an einem Manometer mit Theilung auf der Röhre abgelesen, und zwar zur Rechnung die (wegen der Niveaudifferenz des Wassers corrigirte) Angabe desselben für die Mitte der Versuchsdauer benutzt.

Die Pipette hatte beiderseits von der Erweiterung Marken und beobachtet wurde die Zeit, während deren sich das Volumen zwischen ihnen mit Wasser füllte, resp. entleert wurde. Um der Zeitbestimmung grössere Schärfe zu geben, geschah dieselbe durch zwei Beobachter gleichzeitig: Hr. Cand. P. Schuster beobachtete mit blossem Auge nach einem halbe Secunden schlagenden Chronometer, ich selbst nach einer Pendeluhr mit dem Fernrohr.

Fände keine Gleitung statt, so wäre nach Hrn. O. E. Meyer das in der Zeit t ausfliessende Volumen:

$$V = \frac{\pi D^4}{2^7 L} p.\ t. \frac{1 + 0{,}03315\,T + 0{,}0002437\,T^2}{1{,}755}.$$

Nenne ich den dreigliedrigen Term des Zählers n, so würde in meinen Versuchen ptn constant werden müssen, und eine Verkleinerung dieses Productes würde auf den Einfluss einer Gleitung schliessen lassen. Da es sich nur um Proportionalität handelt, kann man p auch in mm Quecksilber angeben. In folgender Zusammenstellung einiger Versuche sind die nach Reinigung der Röhre eingeklammert.

Datum Röhre	p mm	t Sec.	T ° Cels.	$p.\ t.\ n.$ 10^{-5}	Mittel	Diff.
1.12.79.	446,68	345,72	10,134	2,1017	(2,1045	0,0024
43.	447,08	345,05	10,145	2,1002	± 0,0005)	—
	447,33	345,55	10,134	(2,1038)	—	—
	447,13	345,55	10,138	2,1030	2,1021	—
	446,28	346,40	10,156	(2,1052)	± 0,0011	—
	446,78	345,55	10,180	2,1038	—	—
	447,73	344,90	10,182	(2,1045)	—	—
	447,48	344,40	10,206	2,1016	—	—
5.12.79.	446,78	507,05	9,320	3,0131	(3,0167	0,0023
Spirale	448,08	505,28	9,365	3,0153	± 0,0013)	—
	447,43	505,65	9,390	(3,0154)	—	—
	447,93	504,40	9,434	3,0149	3,0144	—
	447,48	504,45	9,501	(3,0180)	± 0,0009	—
23.12.79.[1]	441,24	376,52	8,410	2,1531	(2,1530	0,0008
43.	441,24	375,57	8,475	2,1516	± 0,0002)	—
	441,44	375,15	8,519	(2,1531)	—	—
	441,49	374,25	8,605	2,1534	2,1522	—
	442,24	373,00	8,650	(2,1527)	± 0,0011	—
	441,64	373,00	8,665	2,1506	—	—
	441,44	373,33	8,690	(2,1531)	—	—
24.12.79.[1]	443,69	372,45	8,600	2,1534	(2,1547	0,0022
43.	443,54	373,12	8,598	(2,1564)	± 0,0011)	—
	445,09	371,28	8,604	(2,1537)	2,1525	—
	443,24	372,55	8,613	2,1531	± 0,0010	—
	445,09	371,35	8,603	(2,1540)	—	—
	444,44	371,40	8,603	2,1511	—	—

Die Abweichung der zusammengehörigen ptn vom Mittel beträgt noch nicht $^1/_{20}$ Proc.; um diese hervorzubringen, ge-

1) Hier wurde eine andere Pipette benutzt und dieselbe entleert, während in den ersten beiden Reihen das Wasser hineingesogen wurde.

nügt ein Irrthum von 0,2 mm in p, 0,008° in T und 0,15 Sec. in t.

Die kleine, aber regelmässig wiederkehrende Abnahme von ptn weist auf eine Gleitung nach etwas längerer Benetzung hin.

Versuche, bei denen das Reinigungsverfahren ähnlich war, nur dass das heisse Wasser mit einer Spritzflasche durch die Röhren getrieben wurde, gaben nicht übereinstimmende Resultate; bei den besten Versuchsreihen liess eine längere Benetzung keinen Unterschied in ptn hervortreten, und hiermit parallel geht auch eine ziemlich geringe Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit.

23. Versuche von Hrn. C. Freund[1]) über Zinksulfatlösungen, bei denen die Flüssigkeitsmenge bestimmt wurde, welche ein galvanischer Strom durch eine Thonzelle trieb, gestatten eine Berechnung des „electrischen Momentes" nach nach der Formel (3 a) von Hrn. Helmholtz[2]):

$$U_1 = \frac{\sigma J}{4\pi k^2}\left[\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right]$$

woraus unter der Annahme $l = 0$:

$$\varphi_i - \varphi_a = U_1 \frac{4\pi k^2}{\sigma J}.$$

Hierin ist U_1 das in einer Secunde ausgeflossene Volumen, k^2 die Reibungsconstante, σ der specifische Widerstand und J die Stromstärke in electrostatischem Maasse. Hr. Freund gibt nun statt k^2 die nach Beobachtungen von Hrn. Grotrian[3]) berechnete Fluidität:

$$f = \frac{1{,}3092}{k^2},$$

worin 1,3092 die Reibungsconstante für Wasser von 10° bedeutet. Im Folgenden habe ich die Fluidität von 18° auf die Temperatur des Versuchs umgerechnet.

Um die in electromagnetischem Maasse gemessene Stromstärke J in electrostatische Einheiten zu übertragen[4]), ist sie

1) Freund, Wied. Ann. **7.** p. 59. 1879.
2) Helmholtz, Wied. Ann. **7.** p. 354. 1879.
3) Grotrian, Pogg. Ann. **160.** p. 263. 1877.
4) s. Bd. **9.** p. 529.

mit $v = 28{,}565.10^{10}$ zu multipliciren. Da Hr. Freund die specifische Leitungsfähigkeit auf Quecksilber $= 10^8$ bezieht, so findet man aus der von ihm mit k bezeichneten Grösse $\frac{1}{\sigma}$ in electrostatischem Maasse durch Division mit $1{,}1704.10^{-8}$.

1 Daniell ist = 11,71 Siemens. Weber $= \frac{11{,}71 \,.\, 0{,}9550 \,.\, 10^{10}}{28{,}565 \,.\, 10^{10}}$ = 0,3915 electrostatischen Einheiten.

Somit erhält man:

$$\varphi_i - \varphi_a = \frac{U_1}{\sigma J f} \frac{4\pi \,.\, 1{,}3092 \,.}{1{,}1704 \,.\, 10^{-8} \,.\, 28{,}565 \,.\, 10^{10} \,.\, 0{,}3915} = \frac{U_1}{\sigma J f}\, 0{,}012569$$

Daniell, worin für $\frac{U_1}{J}$, $\frac{1}{\sigma}$, f die von Hrn. F. angegebenen Zahlenwerthe zu setzen sind.

In folgende Zusammenstellung nehme ich noch einige Zahlen aus Hrn. Freund's Dissertation auf, die im Auszuge nicht mitgetheilt sind:

Spec. Gew.	Salzgehalt	Temp.	$\frac{U_1}{J}$	f	$\frac{1}{\sigma}$	$\varphi_i - \varphi_a$
1,0996	9,22	16,74	0,2747	0,8098	281,7	1,139
1,1620	14,42	17,91	0,1686	0,6280	386,2	1,334
1,2057	17,76	17,88	0,1442	0,5064	431,2	1,543
1,3183	25,72	18,14	0,1221	0,2871	468,2	2,503

Die Werthe des electrischen Momentes für Thon und Zinksulfatlösungen nehmen also mit wachsender Concentration erst langsam, dann schnell zu.

24. Bekanntlich werden Theilchen, die in einer Flüssigkeit suspendirt sind, durch einen dieselbe durchfliessenden galvanischen Strom bewegt, und zwar in Wasser gegen die Richtung des positiven Stroms.

Man durfte nach einem allgemein gültigen Princip die reciproke Erscheinung erwarten, also einen galvanischen Strom bei Bewegung fremder Theilchen durch eine Flüssigkeit.

Ströme dieser Art gelang es mir nun in der That nachzuweisen, wie aus folgenden Beobachtungen hervorgeht.

Eine Röhre von 480 mm Länge und 10,9 mm Durchmesser war mit zwei seitlichen Ansätzen in der Entfernung von 353 mm versehen, in denen Platinelectroden befestigt

waren. Dieselbe wurde bis etwa zu $^1/_4$ mit grossen Perlen von durchsichtigem Glase, dann mit destillirtem Wasser gefüllt und so verschlossen, dass keine Luft darin blieb.

Der so vorgerichtete Apparat wurde vertical an einem Stative befestigt, welches eine schnelle Drehung desselben um eine horizontale Axe erlaubte, und die Electroden mit dem Plath'schen Galvanometer verbunden.

Wurde die Röhre schnell umgekehrt, so fielen die Perlen dem andern Ende zu, und das Galvanometer zeigte einen ihrer Bewegung entgegengesetzten Strom an.

Es seien die Electroden bezeichnet mit 1 und 2 und der entsprechende Index deute eine Bewegung auf die betreffende Electrode an; a_1, a_2 seien die Ablenkungen von der Ruhelage vor der Bewegung, a_1', a_2' von der nach derselben eintretenden aus gerechnet.

Ich erhielt: 12. Juli 1878.

	a_1	a_1'	a_2	a_2'
	− 0,9	− 1,0	+ 1,0	+ 1,5
	− 1,2	− 1,4	+ 1,7	+ 2,1
	− 1,8	− 1,3	+ 1,7	+ 0,9
Mittel	− 1,30	− 1,23	+ 1,47	+ 1,50

Das Mittel der absoluten Werthe der a beträgt 1,38.

Spätere Beobachtungen zeigten eine Abnahme mit der Zeit; so war nach vier Tagen das Mittel 0,63.

Weit stärker waren die Ströme bei Benutzung von sorgfältig ausgewaschenem Seesand in einer ähnlichen grössern Röhre (Länge 590 mm, Durchmesser 16,2 mm, Entfernung der Electroden 398 mm).

22. Juli 1878. Mit frischem Wasser:

	a_1	a_1'	a_2	a_2'
	− 7,7	− 8,6	+ 6,8	+ 9,2
	− 6,5	− 7,9	+ 7,5	+ 8,3
	− 7,3	− 8,0	+ 6,7	+ 9,1
Mittel	− 7,17	− 8,17	+ 7,00	+ 8,87

Mittel der absoluten Werthe: 7,80.

10 Minuten später:

	a_1	a_1'	a_2	a_2'
	− 6,2	− 8,1	+ 6,4	+ 7,4
	− 6,0	− 7,4	+ 5,7	+ 7,0
	− 6,2	− 7,4	+ 6,7	+ 7,2
Mittel	− 6,13	− 7,63	+ 6,27	+ 7,20

Mittel der absoluten Werthe: 6,80.

Eine Vergleichung der a_1 und a_2 mit a_1' und a_2' zeigt hier bereits deutlich einen Polarisationsstrom; ferner ist eine Abnahme im Laufe der Zeit zu bemerken.

Aehnliche Beobachtungen habe ich noch mehrfach gemacht.

Ich will hier gleich zwei Einwänden begegnen, welche gegen meine Deutung dieser Ströme als Folge der Bewegung der Theilchen erhoben werden könnten.

Dass man es nicht einfach mit Polarisationsströmen, verursacht durch die Veränderung der Umgebung der Electroden, zu thun hat, geht schon daraus hervor, dass nach Aufhören der Bewegung der Theilchen das Galvanometer fast genau zu seiner ursprünglichen Lage zurückkehrte. Eine Polarisation wäre nicht so schnell verschwunden.

Noch überzeugender ist der unmittelbare Vergleich der Bewegung der (beiläufig überaperiodischen) Galvanometernadel mit dem Niedersinken der Perlen und des Sandes, wo die directe Beziehung sofort sich herausstellt.

Auch Vorgänge an der Röhrenwand können nur wenig an der Erzeugung dieser Ströme betheiligt sein. Wie ein Vergleich mit den früher besprochenen Erscheinungen zeigt, ist die Geschwindigkeit des Wassers, welches den Theilchen nach oben ausweicht, viel zu gering, um Ströme der beobachteten Intensität zur Folge zu haben; auch müssten dann die schneller fallenden Perlen stärker wirken als der Sand.

Vielmehr würde die Erklärung dieser Erscheinungen auf Grundlage der Quincke-Helmholtz'schen Anschauungen[1]) etwa folgende sein.

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 368. 1879.

Die Körperchen sind negativ, die sie unmittelbar umgebende Wasserschicht positiv electrisch, infolge der Bewegung bleiben + geladene Wassertheilchen zurück, während die negative Electricität auf der vorangehenden Seite des Körperchens dem durchlaufenen Wasser positive Electricität entzieht und negative frei macht. Die frei gewordenen Electricitäten vereinigen sich durch das Wasser und den Galvanometerdraht.

Die Arbeit zur Erzeugung dieser Ströme wird also durch die Wirkung der Schwere auf die Körperchen geleistet.

25. Durch eine briefliche Mittheilung von Hrn. J. W. Clark wurde ich auf eine ältere eigene Beobachtung wieder aufmerksam gemacht, die ich hier anführen will, da sie in enger Beziehung zu andern lange bekannten Erscheinungen steht.

Bei meinen Versuchen über die durch den Wasserstrom in weiteren Röhren erzeugte electromotorische Kraft kam es mitunter vor, dass während einer Beobachtung der Wasserverrath im Ballon zu Ende ging, und ein Gemisch von Wasser und Luft in unregelmässigen Stössen durch die Röhre getrieben wurde. Es trat sodann stets eine heftige und schwankende Ablenkung des Galvanometers ein, welche sich leicht als eine Folge der Fortreissung der mit dem Glase in unmittelbarer Berührung stehenden stark positiv electrischen Wasserschichten erklärt.

In die Augen fallend ist die Analogie dieser Erscheinung mit der besonders von Faraday studirten Electricitätserregung durch Fortreissung von Flüssigkeitstheilchen mittelst ausströmenden Dampfes. Letzterer ist nur das Mittel, die durch Contact mit der Wand electrisch gewordenen Partikelchen der Flüssigkeit von dieser zu trennen und fortzuführen, da ja trockner Dampf keine Electricität liefert.

26. Vorstehende Untersuchung hat also ergeben:

1) In Uebereinstimmung mit der Helmholtz'schen Theorie ist die durch strömendes Wasser in Capillaren erzeugte electromotorische Kraft von dem Querschnitt (und der Länge) derselben unabhängig.

2) Der aus dieser electromotorischen Kraft hergeleitete

Werth des „electrischen Momentes“ für Wasser und Glas (3,936 Daniell) entspricht nahe dem, welchen Hr. Helmholtz aus Beobachtungen von Hrn. Quincke über die Fortführung des Wassers in Glasröhren durch den electrischen Strom berechnet.

3) Zu einem wenig verschiedenen Werthe führte auch die Beobachtung des electrischen Stromes, der durch fliessendes Wasser in Capillaren entsteht.

4) Röhren, welche nicht mehr dem Poiseuille'schen Gesetze genügen, weichen in der Weise ab, dass die nach Formel (11b)[1]) von Hrn. Helmholtz berechneten Werthe des electrischen Momentes ziemlich langsam mit wachsendem Röhrendurchmesser abnehmen, hingegen die nach (14d) erhaltenen sehr schnell viel zu gross ausfallen.

5) Empirisch hat sich für weitere Röhren innerhalb ziemlich ausgedehnter Grenzen die bei einer bestimmten mittlern Geschwindigkeit des strömenden Wassers auftretende Stromstärke nahezu dem Radius der Röhre proportional ergeben, was mit Hinzuziehung einer plausiblen Annahme aus der Theorie von Hrn. Helmholtz folgt.

6) Beiläufig hat sich gezeigt, dass der Depolarisator zur Bestimmung des Potentials einer Drahtspirale auf sich selbst, sowie zur Untersuchung sehr schwacher Ladungsvorgänge dienen kann.

7) Spuren einer Gleitung des Wassers an der Glaswand, welche bei Messung der durch eine Capillare ausfliessenden Wassermenge sich zeigten, wirken vielleicht bei den Aenderungen der electromotorischen Kraft mit, die im Laufe der Zeit etc. eintreten.

Möglichen Falls lassen aber meine Ausflussversuche eine andere Deutung zu.

8) Nach Beobachtungen von Hrn. Freund ist das electrische Moment für gebrannten Thon und Zinksulfatlösung berechnet.

9) Durch Bewegung materieller Theilchen in einer Flüssigkeit entsteht ein electrischer Strom.

1) Hr. Helmholtz hebt ausdrücklich hervor, dass beide Formeln nur für Capillaren gelten.

27. Hr. Helmholtz hat in den „Studien über electrische Grenzschichten“ die von Hrn. Quincke angedeutete Erklärung dieses ganzen Gebietes von Erscheinungen (Fortführung der Electricität durch strömende Flüssigkeit in Röhren und Diaphragmen, electrische Diffusion und Drucksteigerung, Bewegung suspendirter Theilchen durch den electrischen Strom) schärfer präcisirt und daraus die Gesetze einer ganzen Reihe von Fällen theoretisch hergeleitet.

Eine Vergleichung mit den experimentellen Resultaten ergab durchgehends Uebereinstimmung, und ich selbst habe oben noch einige neue Bestätigungen der Theorie geliefert.

Die von Hrn. Edlund[1]) gegen die dieselbe erhobenen Einwendungen erachte ich für nicht stichhaltig, will ihre Erörterung aber Hrn. Helmholtz überlassen und nur nochmals darauf hinweisen, dass meine Beobachtungen für weitere Röhren die Stromstärke dem Radius proportional ergeben, hier also kein Widerspruch gegen die Helmholtz'sche Theorie vorliegt. Die Art freilich, wie Hr. Edlund dies Resultat aus derselben herleitet, kann ich nicht als richtig anerkennen, wie denn auch die gleichzeitig gefolgerte Proportionalität der Stromstärke mit der mittlern Geschwindigkeit des Wassers nicht stattfindet.

Die Theorie des Hrn. Edlund vermag hingegen, auch in ihrer modificirten Gestalt[2]), von mehreren Erscheinungen nicht Rechenschaft zu geben.

Wenn nämlich der primäre Grund der Erscheinung die Mitschleppung des Aethers durch den Flüssigkeitsstrom ist, so wird diese auch im freien Wasserstrahle stattfinden müssen, die freie Electricität wird sich auf die Oberfläche begeben und dort erhalten bleiben, da ja Luft ein Isolator ist. Auch ein freier Wasserstrahl müsste somit eine electromotorische Kraft zeigen, aber ich selbst[3]) wie Hr. Elster[4]) haben eine solche mit unseren Instrumenten nicht constatiren können.

1) Edlund, Wied. Ann. **9.** p. 95. 1880.
2) Edlund, Wied. Ann. **8.** p. 113 ff. 1879.
3) Dorn, Wied. Ann. **5.** p. 29 ff. 1878.
4) Elster, Wied. Ann. **6.** p. 553. 1879.

Vollends unbegreiflich aber bleibt die Möglichkeit eines gegen die Flüssigkeitsbewegung gerichteten electrischen Stromes, den Hr. Quincke[1]) und ich[2]) wiederholt beobachtet haben. Mit Zuhülfenahme einer Einwirkung der Röhrenwand wird auch nichts gewonnen, da diese zwischen der obern und untern Electrode homogen war.

Die umgekehrte Erscheinung, die Fortführung von Flüssigkeiten und suspendirten Theilchen durch strömende Electricität würde nach Hrn. Edlund als eine Mitschleppung der Materie durch den Aetherstrom aufzufassen sein. Dieser Auffassung stellen sich zunächst ganz ähnliche Schwierigkeiten entgegen, wie u. a. Terpentinöl und ein unreiner Alkohol sich gegen den positiven Strom bewegten, und auch die von Hrn. Quincke beobachteten Einzelheiten bleiben unerklärlich. Man sieht z. B. nicht ein, warum die Flüssigkeitsbewegung in der Nähe der Wand am stärksten ist, wo sie doch gerade durch die Reibung gehemmt sein sollte.

Die einzige Annahme, welche von allen diesen Vorgängen ungezwungen Rechenschaft gibt, ist eben die Quincke-Helmholtz'sche, welche die Electricität, die nach Umständen + oder − sein kann, schon in der ruhenden Flüssigkeit längs ihrer Berührungsfläche mit der Wand voraussetzt.

Ich glaube nicht, dass diese Hypothese durch die unitarische Theorie ausgeschlossen ist; andererseits kann auch eine Fortführung des Aethers in dem von Hrn. Edlund angenommenen Sinne stattfinden, aber die hier betrachteten Erscheinungen haben in derselben nicht ihren Grund.

Breslau, den 9. Februar 1880.

Zusatz von H. Helmholtz.

Durch gütige Mittheilung von Hrn. E. Dorn bin ich in den Stand gesetzt, folgende Rechnungs- und Druckfehler, die in meiner Abhandlung Bd. 7 der Annalen stehen geblieben sind, zu verbessern:

1) Quincke, Pogg. Ann. **113.** p. 513 ff. 1861.
2) Dorn, Wied. Ann. **5.** p. 39. 1878.

1) S. 357 Z. 11 v. u. ist der Werth von k_0^2 falsch angegeben. Statt 1,555 sollte es heissen 1,778 : 1,555 = 1,1435. Demnach sind in der Tabelle auf S. 358 die Werthe von $\varphi_i - \varphi_a$ alle im Verhältniss 1,36 : 1 zu gross, also etwa um ein Viertel zu vermindern.

2) S. 353 Z. 2 v. u., S. 354 Z. 2 v. o. und ebenda Z. 11 ist $\frac{xQ}{J\sigma}$ statt $\frac{xJ\sigma}{Q}$ gesetzt. Die betreffende Grösse hebt sich aus dem Resultat der Rechnung fort.

3) S. 366 Z. 13 v. o. ist in dem Werthe von $W_{1,2}$ Nenner und Zähler vertauscht.

4) S. 374 Gl. (13a). Vor nu ist ein minus-Zeichen zu setzen.

V. *Ueber die von Herrn Kerr gefundene, neue Beziehung zwischen Licht und Electricität; von W. C. Röntgen.*

(Aus den Ber. d. Oberhess. Gesellsch. f. Natur- u. Heilk. 19.)

Die Beobachtung der bekannten Erscheinung, dass eine Glasplatte, welche von einem electrischen Funken durchschlagen worden ist, optisch doppelbrechende Eigenschaften erhalten hat, sowie einige sich daran knüpfende Betrachtungen über die Natur der dielectrischen Polarisation führten mich im Jahre 1873 zu der Fragestellung, ob wohl schon bevor die Entladung durch das Glas stattfindet, während somit starke electrische Kräfte auf die Glastheilchen wirksam sind, eine ähnliche Wirkung auf durchgehendes Licht ausgeübt werden sollte. Es wurde infolge dessen eine Reihe von Versuchen mit Glasplatten angestellt, fast genau in derselben Weise, wie dieselben später von Hrn. Kerr, Gordon und Mackenzie ausgeführt und veröffentlicht wurden. Allein ich erhielt blos negative Resultate und gelangte überdies bald zu der Ansicht, dass, wenn auch in einem festen Körper eine derartige Doppelbrechung beobachtet wäre, es immerhin sehr schwer sein würde, zu constatiren, dass dieselbe nicht von ohne Zweifel vorhandenen, durch die electrischen Ladungen erzeugten mechanischen und thermischen Veränderungen des Körpers herrühren.

Nachdem auch einige Versuche mit Canadabalsam als Dielectricum negative Resultate geliefert hatten, beschäftigte ich mich nicht mehr mit diesem Gegenstande.

Bald nachher erschienen die ersten Versuche des Hrn. Kerr[1]), welche das Vorhandensein der von mir gesuchten Doppelbrechung zeigten und die durch Hrn. Maxwell, resp. Helmholtz veranlassten Untersuchungen der Hrn. Gordon[2]) und Mackenzie.[3]) Da es den beiden letzteren nicht gelang, die Kerr'sche Erscheinung in Glas zu erhalten, so wurde ich in meiner nach dem Lesen der Kerr'schen Abhandlung gefassten Meinung bestärkt, dass bei jenen Versuchen irgend welche nebensächliche Einflüsse thätig gewesen wären.

Im Spätjahr 1879 sind nun von Hrn. Kerr neue Untersuchungen veröffentlicht[4]), die den Nachweis liefern, dass in einer grossen Zahl von schlecht leitenden Flüssigkeiten durch Electricität Doppelbrechung erzeugt werden kann; es sei mir gestattet, das Wesentlichste derselben hier mitzutheilen. Die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich in einem Glasgefässe, welches im Lichten 2,5 cm hoch, 1,6 cm breit und 1,8 cm tief ist. Zwei parallele, verticale Seitenwände bestehen aus 0,15 cm dicken Spiegelglasstücken; das durch ein Nicol geradlinig polarisirte Licht einer Paraffinlampe geht senkrecht zu diesen Platten durch die Flüssigkeit und wird durch ein zweites Nicol analysirt. Die Mitte der zwei übrigen, verticalen Seitenwände ist durchbohrt, in jeder Durchbohrung steckt als Zuleiter der Electricität ein Messingdraht, der in dem Gefäss in einer Kugel von 0,6 cm Durchmesser endigt. Die einander genau gegenüber liegenden, stark abgeplatteten Flächen der Kugeln sind um 0,3 cm voneinander entfernt und begrenzen nach rechts und nach links das von Hrn. Kerr untersuchte electrische Feld.

Es schliesse nun der Hauptschnitt des Polarisators mit der Horizontalebene, somit auch mit den in der Mitte des

1) Kerr, Phil. Mag. (4). **50.** p. 337, 446. 1875.
2) Gordon, Phil. Mag. (5). **2.** p. 203. 1876.
3) Mackenzie. Wied. Ann. **2.** p. 356. 1877.
4) Kerr. Phil. Mag. (5). **8.** p. 85, 229. 1879.

electrischen Feldes verlaufenden Kraftlinien einen Winkel von 45° ein, der Analysator sei auf dunkel gestellt, und als Flüssigkeit habe man beispielsweise Schwefelkohlenstoff gewählt; wird alsdann die eine Kugel mit einer kräftigen Electricitätsquelle (einer Holtz'schen Maschine) in Verbindung gesetzt, während die andere zur Erde abgeleitet ist, so gewahrt man sofort eine beträchtliche Erhellung des Gesichtsfeldes, welche nicht etwa von einer Drehung der Polarisationsebene herrührt, sondern nach allen angestellten Versuchen blos durch eine in der Flüssigkeit stattgefundene Doppelbrechung entstanden sein kann.

Bis jetzt wurde von Hrn. Kerr diese Erscheinung bei 27 sehr schlecht leitenden Flüssigkeiten wahrgenommen und zwar wurde gefunden, dass dieselben in zwei Klassen, in positive und negative Flüssigkeiten zu theilen sind. Die positiven Flüssigkeiten verhalten sich wie Glasplatten, die in der Richtung der Kraftlinien gedehnt sind, die negativen dagegen wie Glasplatten, die in jener Richtung comprimirt sind. Die Intensität der doppelbrechenden Wirkung zeigte sich sehr verschieden bei verschiedenen Flüssigkeiten, am grössten war dieselbe bei CS_2; ausserdem wurde nachgewiesen, dass die Intensität bei einer und derselben Flüssigkeit mit der Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeln zunimmt.

Wenn der Hauptschnitt des Polarisators vertical oder horizontal d. h. parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien stand, so war entweder gar keine oder blos eine sehr undeutliche Wirkung zu beobachten.

Hr. Kerr glaubt schliesslich einen wesentlich andern Effect bei Nitrobenzol gefunden zu haben, indem diese Flüssigkeit erst dann doppelbrechende Eigenschaften erhält, wenn in die sonst ununterbrochene Verbindung der einen Kugel mit dem Conductor der Electrisirmaschine eine Funkenstrecke eingeschaltet wird; bei jeder Entladung bemerkt man ein plötzliches Aufleuchten des Gesichtsfeldes.

Es sind nun diese Versuche, welche mich veranlassten, mich zum zweiten male mit der Sache zu beschäftigen, und

ich erlaube mir, im Folgenden die Resultate dieser Arbeit mitzutheilen.

Ich versuchte zu allererst die Kerr'sche Erscheinung zu reproduciren und construirte dazu aus Spiegelglasstücken ein parallelepipedisches Gefäss, im Lichten ungefähr 5 cm hoch, 2,5 cm breit und 2,5 cm tief; durch eine Durchbohrung des Bodens geht ein verticaler Messingdraht, welcher einerseits in dem Gefäss eine 1 cm dicke Kugel trägt, andererseits mit dem Conductor einer Winter'schen Electrisirmaschine in Verbindung steht; von oben wird ein zweiter Messingdraht mit einer ebenfalls 1 cm dicken Kugel in das Gefäss hineingesteckt und durch ein Stativ so gehalten, dass der Abstand der senkrecht übereinander liegenden Kugeln 0,2 bis 0,3 cm beträgt. Die obere Kugel ist mit der Erde, resp. mit dem Reibzeug der Maschine verbunden. Das zwischen den Kugeln hindurch gehende Licht kam bei den ersten Versuchen von einer Natronflamme, der Hauptschnitt des Polarisators machte einen Winkel von 45° mit der Verticalen, und der Analysator war auf dunkel gestellt.

Nachdem das Gefäss mit Schwefelkohlenstoff gefüllt war, wurde die Electrisirmaschine gedreht; meine Ueberraschung war nicht gering, als ich eine ausserordentlich intensive Erhellung des Gesichtsfeldes zwischen den beiden Kugeln eintreten sah. Diese Erhellung verschwand sofort beim Ableiten des Conductors zur Erde. Der Versuch liess sich beliebig oft wiederholen, die Erscheinung trat immer mit grosser Regelmässigkeit wieder ein.

Wurden die Hauptschnitte der Nicols um 45° gedreht, so war eine Wirkung der Electricität nicht erkennbar, ebenfalls nicht, wenn unpolarisirtes Licht durch die Flüssigkeit ging.

Ich schritt darauf zu einigen Aenderungen der Beobachtungsmethode, welche sich bald als wesentliche Verbesserungen herausstellten. Erstens wurde das Natronlicht durch Drummond'sches Kalklicht ersetzt und dadurch, wie zu erwarten war, die Empfindlichkeit der Methode bedeutend gesteigert. Zweitens wurde, um von einem möglichen Einfluss der Glaswände frei zu werden, das kleine Gefäss durch

eine weite, viereckige Glasflasche (12 cm hoch, 6 cm weit) ersetzt. Zwei einander gegenüberliegende Seitenwände sind mit 3 cm weiten, runden Oeffnungen versehen, welche durch mittelst Hausenblase aufgekittete Glasplatten verschlossen sind. Die Glasplatten wählte ich von dem sehr dünnen, wenige Zehntel Millimeter dicken Birminghamglas, um die bei dickeren Platten immer bemerkbare, durch mechanische Einflüsse erzeugte Doppelbrechung zu vermeiden. Durch eine Durchbohrung des Bodens der Flasche ist die mit der Electricitätsquelle verbundene und durch den Hals die zur Erde abgeleitete Electrode in die Flasche geführt. Das Licht geht unter senkrechter Incidenz durch die aufgekitteten Glasplatten hindurch.

Eine dritte, wesentliche Verbesserung ist die Anwendung von Nicols mit grossem Gesichtsfeld; es ist dadurch ermöglicht, die Erscheinung auf einem grossen Gebiete mit einem Blicke zu übersehen; man braucht sich nicht, w. Hr. Kerr, auf die Beobachtung eines kleinen, schmalen, zwischen den Electroden gelegenen Streifens zu beschränken.

Die Mitte der Flasche war meistens 25 bis 30 cm vom Auge und ungefähr 20 cm vom Diaphragma der Duboscq'schen Laterne entfernt.

Von besonderer Wichtigkeit erschien mir die Frage nach den Schwingungsrichtungen des Lichtes in der Flüssigkeit. Hr. Kerr hat, wie erwähnt, die Ansicht ausgesprochen, dass diese Schwingungsrichtung mit der Richtung der Kraftlinien und der dazu senkrechten zusammenfällt, er untersuchte aber blos den Theil des electrischen Feldes, welcher zwischen den abgeplatteten, nahezu ebenen Electrodenflächen liegt, wo somit alle Kraftlinien nahezu parallel verlaufen.

Die Flasche wurde mit möglichst reinem und staubfreiem[1]) Schwefelkohlenstoff gefüllt und den Electroden folgende Gestalten gegeben.

1) Auf die Entfernung fester Theilchen aus der Flüssigkeit muss, wie auch Hr. Kerr bemerkt, die grösste Sorgfalt verwendet werden, da dieselben sonst sofort eine relativ gut leitende Brücke zwischen den Electroden bilden und die eigentliche Erscheinung dadurch bedeutend abgeschwächt wird.

1) Die untere, mit dem Conductor der Electrisirmaschine in directer Verbindung stehende Electrode ist eine horizontale, kreisrunde Messingscheibe von 1,8 cm Durchmesser und 0,8 cm Dicke. Die obere eine Messingkugel von 1 cm Durchmesser. Die Mittelpunkte der beiden liegen genau in einer Verticalen.

Taf. I Fig. 6 ist eine möglichst getreue Abbildung der Erscheinung, die beobachtet wird, wenn die Hauptschnitte der gekreuzten Nicols Winkel von 45° mit der Verticalen bilden, welche Stellung ich der Einfachheit wegen die Stellung I der Nicols nennen werde. Die Mitte des Gesichtsfeldes zwischen Kugel und Scheibe ist bei mässigem Drehen der Electrisirmaschine so blendend hell geworden, dass die Helligkeit dem Auge öfters unerträglich wird; nach den Seiten zu nimmt dieselbe allmählich ab. Die dunklen Schwänze, die von der Kugel ausgehen, haben ihren Ursprung in Punkten, wo durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte unter 45° gegen die Verticale geneigte Geraden aus der Kugel austreten. Ebenso sind die von dem in Wirklichkeit eine Fläche von starker Krümmung bildenden Scheibenrand ausgehenden Schwänze an ihrem Ursprung unter 45° gegen die Verticale geneigt.

Es fragt sich, wodurch diese Vertheilung der hellen und dunklen Partien bedingt wird. Zur Beantwortung dieser Frage ist es von Wichtigkeit, die Bahn zu beobachten, welche unvermeidliche, immer hell leuchtende, in der Flüssigkeit suspendirte Theilchen beschreiben, während die Electrisirmaschine gedreht wird. Solche Theilchen werden von der Kugel zur Scheibe und zurück geschleudert und verfolgen wenigstens nahezu die Richtung einer Kraftlinie. Man bemerkt nun immer, wenn diese Bahn in einer Ebene liegt, welche senkrecht steht zu den Lichtstrahlen, dass dieselbe und somit auch die betreffende Kraftlinie dort die erwähnten dunklen Schwänze schneidet, wo die Neigung der Bahn gegen die Verticale 45° beträgt; dass dagegen an den Stellen der Bahn, wo diese horizontal oder vertical ist, die grösste Helligkeit existirt.

Ein weiterer Aufschluss über die Natur der Erscheinung

wird erhalten, indem man mit Hrn. Kerr eine möglichst wenig doppelbrechende Glasplatte zwischen dem Analysator und der Flasche so aufstellt, dass die Lichtstrahlen die Platte unter senkrechter Incidenz treffen. Wird auf dieselbe durch eine geeignete Presse ein Druck in verticaler Richtung ausgeübt, so beobachtet man, dass während der Electrisirung die Partie zwischen den Schwänzen der Kugel und der Scheibe dunkler wird; dass dagegen die Stellen oberhalb jener Schwänze links und rechts von der Kugel, sowie die kleinen Stellen links und rechts von der Scheibe heller werden. Zu gleicher Zeit klappen die Schwänze, sowohl die oberen als die unteren, zusammen. Bei fortgesetztem Pressen vereinigen sich die unteren Enden der beiden Kugelschwänze, sodass sie das Ansehen einer an der Kugel hängenden Kette erhalten; dieselbe zieht sich bei noch weiter wachsendem Druck immer mehr gegen die Kugel zusammen, um endlich ganz zu verschwinden.

Selbstredend werden diese Vorgänge in umgekehrter Reihenfolge beobachtet, wenn man mit der Compression der Platte nachlässt.

Wird die eingeschaltete Glasplatte in horizontaler Richtung comprimirt, so finden gewissermassen die entgegengesetzten Erscheinungen statt. Die Mitte zwischen Kugel und Scheibe wird heller, dagegen die seitlichen Partien neben Kugel und Scheibe dunkler. Die Schwänze biegen sich auseinander.

Die Erscheinung ohne comprimirte Glasplatte ist wesentlich dieselbe bei langsamer und bei starker Drehung der Electrisirmaschine, im erstern Fall ist sie nur etwas weniger markirt und von geringerer Ausdehnung. Hat man durch eine horizontale Compression der Glasplatte vor der Electrisirung das Gesichtsfeld schwach erhellt und fängt nun an, die Maschine langsam zu drehen, so wachsen aus der Mitte des Gesichtsfeldes zwischen Kugel und Scheibe die zwei dunklen Streifen heraus und klappen bei zunehmender Potentialdifferenz immer weiter auseinander, erreichen aber nicht die Stellung, welche sie ohne comprimirte Glasplatte einnehmen. Eine Zunahme der Potentialdifferenz bei con-

stant bleibender Compression der Glasplatte hat somit den ähnlichen Erfolg wie eine Abnahme der Compression bei constant bleibender Potentialdifferenz.

Taf. I Fig 7 zeigt die Erscheinung, wenn die gekreuzten Hauptschnitte der Nicols horizontal, resp. vertical stehen (Stellung II der Nicols). Man bemerkt sofort, dass diejenigen Stellen, wo bei Stellung I der Nicols die grösste Helligkeit vorhanden war, jetzt am dunkelsten erscheinen, und dass umgekehrt die früher dunklen Theile des Gesichtsfeldes jetzt die hellen sind. Die beiden Figuren sind gewissermassen complementär. Die Kraftlinien durchschneiden jetzt die dunklen Partien, wo diese Linien vertical oder horizontal sind; dagegen ist dort die grösste Helligkeit vorhanden, wo die Neigung der Kraftlinien gegen die Verticale 45° beträgt.

Wie man sieht, ist die Taf. I Fig. 7 für den Vorgang ebenso charakteristisch als Taf. I Fig. 6 und wenn Hr. Kerr, wie oben erwähnt, bei der Stellung II keine Erhellung des Gesichtsfeldes beobachtet hat, so wird dieses erklärt durch die Beschränktheit des Gesichtsfeldes und durch den parallelen Verlauf der Kraftlinien.

Wie zu erwarten war, ändert die Compression einer eingeschalteten Glasplatte in horizontaler oder verticaler Richtung nichts an der Erscheinung, dagegen ist eine solche in einer Richtung, die 45° mit der Verticalen einschliesst, sofort wirksam. Die Figur wird unsymmetrisch, indem z. B. bei einer Compression die von rechts unten nach links oben gerichtet ist, das grosse helle Feld links von der Kugel und das kleine helle Feld an der rechten Kante der Scheibe heller werden und sich zu gleicher Zeit nach allen Richtungen vergrössern; die beiden anderen hellen Partien werden dunkler und kleiner.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass Uebergänge zwischen den Taf. I Fig. 6 und 7 leicht erhalten werden bei Stellungen der gekreuzten Nicols, welche zwischen den erwähnten liegen; die Figuren sind dann unsymmetrisch in Bezug auf die Mittellinie.

2) Die obere Electrode ist ein 0,2 cm dicker, gut abge-

rundeter Messingdraht, die untere eine Kugel von 1 cm Durchmesser.

Taf. I Fig. 8 gibt die bei Stellung I der Nicols beobachtete Erscheinung. Es hält nicht schwer, sich auch hier zu überzeugen, dass wiederum die hellsten Partien dort liegen, wo die Kraftlinien horizontal oder vertical verlaufen; die dunklen dagegen, wo die Neigung dieser Linien 45° beträgt.

Bei horizontaler Compression einer eingeschalteten Glasplatte wird der Theil zwischen der Spitze und der Kugel heller, die kleinen Felder links und rechts von der Spitze dunkler. Die Schwänze klappen nach oben gegen die Spitze. Eine Compression in verticaler Richtung hat dagegen das entgegengesetzte zur Folge. Die Schwänze biegen sich nach unten, lösen sich bei wachsender Compression von der Spitze ab und ziehen sich gegen die Kugel hin zusammen, um schliesslich zu verschwinden.

Taf. I Fig. 9 ist eine Darstellung der Erscheinung bei der Stellung II der Nicols. Taf. I Fig. 8 und 9 sind wieder complementär; die dunklen und hellen Partien sind nach derselben Regel vertheilt wie in Taf. I Fig. 2.

3) Beide Electroden sind Parallelepipede, Höhe 1,2 cm, Breite und Dicke 0,6 cm.

Taf. I Fig. 10 bezieht sich auf die Stellung I der Nicols. Abermals ist das Gesichtsfeld dort erhellt, wo die Kraftlinien horizontal oder vertical verlaufen und dunkel, wo die Neigung derselben 45° beträgt.

Bei horizontaler Compression einer eingeschalteten Glasplatte wird die Mitte heller, die neben den Parallelepipeda liegenden Seitenfelder dunkler. Die dunklen Büschel bewegen sich gegen die Seitenflächen der Parallelepipede, sowohl oben wie unten. Bei verticaler Compression wird die Mitte dunkler, die Seitenfelder heller, je zwei Büschel oben und unten vereinigen sich zu zwei dunklen, verticalen Bändern.

Taf. I Fig. 11 veranschaulicht die Verhältnisse bei der Stellung II der Nicols. Die Anordnung der hellen und dunklen Theile ist diejenige, welche zu erwarten war.

Ausser diesen Electroden wählte ich noch verschiedene anders gestaltete, ebenso beobachtete ich die Erscheinung

bei verschiedenen Stellungen der Electroden und in Gefässen von verschiedenen Weiten; immer konnte ich mich überzeugen, dass die gefundenen Gesetzmässigkeiten ohne Ausnahme zutreffen. Ich gelange somit zu den folgenden Resultaten.

Aus der Vertheilung der hellen und dunklen Partien des Gesichtsfeldes bei den Stellungen I und II der Nicols, sowie den dazwischen liegenden folgt, dass das durch Schwefelkohlenstoff gehende Licht infolge von electrischen Kräften Veränderungen erleidet, welche den durch gewöhnliche Doppelbrechung erzeugten vollständig ähnlich sind; die Schwingungsrichtungen des Lichtes im Schwefelkohlenstoff fallen an jeder Stelle zusammen mit den Richtungen der durch diese Stellen gehenden Kraftlinien und den dazu senkrechten. Die Intensität dieser Doppelbrechung ändert sich von Stelle zu Stelle im electrischen Feld mit der electrischen Kraft und wächst mit der Potentialdifferenz zwischen den Electroden.

Die Versuche mit eingeschalteten und comprimirten Gläsern beweisen, dass Schwefelkohlenstoff sich unter dem Einfluss electrischer Kräfte verhält wie Glas, welches in der Richtung der Kraftlinien gedehnt worden ist.

Nachdem Schwefelkohlenstoff in eingehender Weise untersucht war, wählte ich als zweite Flüssigkeit Leberthran, eine von Hrn. Kerr ebenfalls geprüfte Substanz. Ich erhielt ähnliche, wenn auch nicht so intensive Erscheinungen wie mit Schwefelkohlenstoff und konnte die Entdeckung des Hrn. Kerr bestätigen, dass Leberthran sich in optischer Beziehung verhält wie Glas, welches in der Richtung der Kraftlinien *comprimirt ist. Die Classificirung der Flüssigkeiten in positive und negative ist somit durchaus gerechtfertigt.*[1])

1) Das Dunkler- oder Hellerwerden des Gesichtsfeldes nach Compression der eingeschalteten Gläser kann nicht ohne weiteres allein entscheidend sein für das Verhalten der Flüssigkeiten; das Eintreffen des einen oder des andern Falles hängt doch bei gegebener Compressionsrichtung lediglich von der in der Flüssigkeit erzeugten Phasendifferenz der an einer Stelle austretenden Strahlen ab und diese ist nicht nur von der Natur der Doppelbrechung, sondern auch von der Intensität derselben und von der Dicke der doppelbrechenden Schicht abhängig. Ich habe mich nun auf verschiedenen Wegen überzeugt, dass bei meinen Ver-

Terpentin gab ebenfalls einen deutlich sichtbaren Effect.

Wie eingangs erwähnt, fand Hr. Kerr bei Nitrobenzol nur dann einen Effect, wenn die directe Verbindung der einen Electrode mit dem Conductor der Electrisirmaschine durch eine Funkenstrecke unterbrochen und dadurch eine plötzliche Entladung der Electricität durch die Flüssigkeit hervorgerufen wurde. Ich glaube nun, dass man es hier mit keiner wesentlich neuen Erscheinung zu thun hat, und dass vielmehr die Nothwendigkeit einer derartigen Aenderung der Versuchsanordnung blos durch die relativ gute Leitungsfähigkeit des Nitrobenzols bedingt wird. Ist nämlich die Electrode in directer Verbindung mit dem Conductor, so wird, wie der Versuch lehrt, die Electricität beim Drehen der Maschine so rasch durch die Flüssigkeit zur Erde abgeleitet, dass eine einigermassen bedeutende Potentialdifferenz zwischen den Electroden nicht zu Stande kommt. Schaltet man dagegen eine Funkenstrecke ein, so wird bei jeder Entladung eine zwar kurz dauernde, aber grosse Potentialdifferenz erzeugt, welche nun im Stande ist, ein plötzliches Aufleuchten im Gesichtsfeld zu bewirken. Ich finde dann auch im Gegensatz zu Hrn. Kerr, dass dieser Effect bei allen von mir untersuchten, schlecht leitenden Substanzen vorhanden ist; nur unterscheidet sich derselbe von dem bei besser leitenden durch eine grössere Dauer, was begreiflich ist.

Diese soeben besprochene Abänderung der Versuchsmethode liefert ein sehr willkommenes Mittel, die verhältnissmässig gut leitenden Flüssigkeiten auf ihre electrooptischen Eigenschaften zu untersuchen; *es gelang mir auch auf diesem Wege bei Glycerin (spec. Gew. 1,25), Schwefeläther und destillirtem Wasser einen Einfluss der Electricität auf das hindurchgehende Licht aufzufinden.*

Als Electroden dienten bei der Untersuchung des Glycerins die oben erwähnte Scheibe und die Kugel von 1 cm

---

suchen niemals Phasendifferenzen vorkamen, welche den Werth $\frac{\lambda}{2}$ erreichten, und darf deshalb die Intensitätsänderung als massgebend mit anführen. Ausserdem entscheidet aber die Richtung des Wanderns der dunklen Streifen, welche immer beobachtet und notirt wurde.

Durchmesser; der Abstand betrug 0,25 cm. Die eingeschaltete Funkenstrecke zwischen zwei Kugeln von 1,4 cm Durchmesser hatte eine Länge von 1,0 cm. Das plötzliche, nicht sehr starke Aufleuchten in der Mitte des Gesichtsfeldes wurde bei der Stellung I der Nicols beobachtet, dasselbe trat nur dort auf, wo die stärkste Wirkung zu erwarten ist; in der Stellung II konnte ich bei dieser und den beiden folgenden Flüssigkeiten nichts bemerken, was ohne Zweifel dadurch zu erklären ist, dass bei dieser Stellung die grösseren Felder stärkerer Doppelbrechung überhaupt keine Intensitätsänderung zeigen können, weil dort die Kraftlinien parallel und senkrecht zu dem Hauptschnitt des Polarisators verlaufen. Der Conductor der Electrisirmaschine war mit der innern Belegung einer Leydener Flasche, deren äussere Belegung zur Erde abgeleitet war, in Verbindung (belegte Fläche 840 qcm); ohne diesen Condensator gelang es mir nicht, mit Sicherheit eine Erhellung zu beobachten.

Bei Schwefeläther war die Scheibe die untere und eins der Parallelepipede die obere Electrode; Abstand 0,2 bis 0,3 cm; Funkenstrecke 1 bis 1,5 cm. Der Effect war bei der Stellung I der Nicols auch ohne Leydener Flasche deutlich sichtbar, wurde jedoch bedeutend intensiver nach Einschaltung derselben.

Die Anordnung der Versuche mit gewöhnlichem, in Glasgefässen destillirtem Wasser war im wesentlichen dieselbe wie vorhin. Die Erhellung war ausserordentlich deutlich und stärker als bei Glycerin. Zwei Leydener Flaschen waren eingeschaltet; eine weitere Vermehrung der Flaschenzahl und eine dadurch bedingte Verringerung der Schlagweite hatte zur Folge, dass die Erscheinung fast vollständig ausblieb. Es hat sich überhaupt ergeben, dass, wenn bei einer relativ gut leitenden Flüssigkeit die Erscheinung deutlich erkannt werden soll, eine für jede Flüssigkeit specifische Versuchsanordnung, was die Flaschenzahl, die Funkenstrecke und die Entfernung der Electroden betrifft, getroffen werden muss. Wahrscheinlich ist es diesem Umstand zuzuschreiben, dass es mir bis jetzt nicht gelang, in schwach angesäuertem Wasser, sowie in Alkohol von 99,5 Proc. einen electroopti-

schen Effect aufzufinden; ich hege keinen Zweifel darüber, dass es durch passende Combinationen gelingen wird, auch selbst in Flüssigkeiten von noch besserem Leitungsvermögen einen solchen Effect wahrzunehmen.

Bei den obigen Versuchen wurden immer die Electroden so weit voneinander entfernt, dass gerade eine Funkenentladung durch die Flüssigkeit nicht mehr stattfand.

In einer Geissler'schen Vacuumröhre, die keine sichtbare Entladung durchlässt, war trotz des Vorhandenseins einer bedeutenden Potentialdifferenz zwischen den um ungefähr 0,2 cm voneinander entfernten drahtförmigen Electroden nichts von einer Doppelbrechung zu bemerken.

Zum Schluss seien ein paar Versuche beschrieben, die ich in der Hoffnung anstellte, einige Anhaltspunkte für eine Erklärung der oben mitgetheilten Thatsachen zu erhalten.

Die lebhafte Bewegung, die man bei der Entladung in einer schlecht leitenden Flüssigkeit wahrnimmt, erregte in mir den Gedanken, ob wohl durch in der Flüssigkeit vorhandene Druckdifferenzen und dadurch erzeugte intensive Strömungen eine doppelbrechende Wirkung ausgeübt werden könne; war doch in zähflüssigen Substanzen, wie z. B. Canadabalsam durch Mach und Maxwell eine derartige Doppelbrechung nachgewiesen. Es wurde zu diesem Zweck die untere Electrode aus der Flasche entfernt und an deren Stelle ein Glasrohr mit enger Oeffnung gesetzt, durch welches Schwefelkohlenstoff und später andere Flüssigkeiten unter hohem Druck gegen die obere Electrode gespritzt wurden. Wenn auch öfters wahrscheinlich infolge von kleinen Temperaturdifferenzen entstandene Schlieren in der Flüssigkeit auftraten, so gelang es mir doch niemals, eine eigentliche Doppelbrechung wahrzunehmen, und es scheint somit, dass eine Erklärung auf diesem Wege ausgeschlossen ist.

Die Beobachtung jener Schlieren jedoch, sowie der früher mitgetheilten lebhaften Hin- und Herbewegung von festen Theilchen zwischen den Electroden führte mich zu einer andern Hypothese über die Natur der Vorgänge in der Flüssigkeit, von der jedoch sofort erwähnt werden muss, dass es sehr fraglich ist, ob dieselbe mehr Wahrscheinlich-

keit für sich hat als die Annahme eines directen Einflusses der Electricität auf die Lichtbewegung. Würde man nämlich annehmen dürfen, dass die Entladung in der Flüssigkeit in der Weise stattfände, dass zwischen den Electroden Flüssigkeitstheilchen sich hin- und herbewegen, dass sich gewissermassen in der Richtung der Kraftlinien sehr dünne Flüssigkeitsfäden bilden, von denen die mit positiver Electricität versehenen eine andere Temperatur oder eine andere Dichte oder schliesslich eine andere chemische Beschaffenheit hätten, als die mit negativer Electricität beladenen, in umgekehrter Richtung sich bewegenden, so liesse es sich denken, dass durch Reflexionen und Brechungen und dadurch entstandene Phasendifferenzen eine Wirkung auf das geradlinig polarisirte Licht ausgeübt würde, welche Erscheinungen, die den beobachteten ähnlich sind, hervorrufen müssten. Man stelle sich doch ein Büschel von vielen, äusserst dünnen und einfach brechenden Glasstäbchen vor, die in der Richtung der Kraftlinien gebogen sind und sich in einer klar durchsichtigen Flüssigkeit befinden, deren optische Eigenschaften denen des Glases nahezu gleich sind, so würden dieselben, wie ich glaube, das geradlinig polarisirte Licht in ähnlicher Weise modificiren, wie es bei den obigen Versuchen beobachtet wurde, ohne gerade eine merkliche Trübung oder Verzerrung des Gesichtsfeldes erzeugen zu müssen. Leider erhält man keine einfach-brechenden Glasfäden, sondern immer doppelbrechende, und kann deshalb jene Ansicht durch den Versuch nicht prüfen.

In dem Fall, dass die obige Erklärung sich als zulässig herausstellte, oder dass auf irgend einem andern Wege nachgewiesen würde, dass die Electricität sich blos in indirecter Weise bei den Versuchen betheiligt, so wäre die Kerr'sche Erscheinung immerhin eine interessante Beobachtung; dieselbe erhält dagegen eine ausserordentlich fundamentale Bedeutung, wenn jede derartige Erklärung sich als unhaltbar ergibt, und es dadurch äusserst wahrscheinlich geworden ist, dass wir es in der That mit einer neuen, directen Wirkung der Electricität auf die Lichtschwingungen zu thun haben.

Nehmen wir einmal an, dass das letztere wirklich der Fall wäre, so würde die Frage entstehen, ob diese Wirkung electrodynamischen oder electrostatischen Ursprungs sei; mit anderen Worten, ob dieselbe durch die Bewegung der Electricität von der einen Electrode zur andern oder durch die auf jedes Theilchen inducirend wirkende electrostatische Kraft erzeugt werde. Dass eine solche Bewegung von Electricität stattfindet (wahrscheinlich zum grössten Theil in der Form von fortführenden Entladungen), ist bei den obigen Versuchen leicht zu erkennen; ausserdem spricht dafür die von mir bei einer frühern Gelegenheit gemachte Erfahrung, dass alle sehr schlecht leitende Flüssigkeiten, wie Schwefelkohlenstoff, Petroleum, fette Oele u. s. w. verhältnissmässig rasch Potentialdifferenzen weniger Daniells ausgleichen, wenn dafür gesorgt wird, dass nicht durch neue Zufuhr von Electricität jene Differenz erhalten bleibt.

Ueber diese Frage liesse sich vielleicht einiges Licht gewinnen, wenn man untersuchte, wie die oben beschriebenen Erscheinungen sich zu strömender Electricität verhalten, ob z. B. in einem stark magnetischen Felde Aenderungen in der Anordnung der hellen und dunklen Theile der Erscheinung stattfinden. Ein in dieser Richtung angestellter Versuch ergab nichts Bestimmtes; es müssten derartige Versuche auch jedenfalls mit bedeutend kräftigeren Electromagneten vorgenommen werden, als mir zur Verfügung stehen. Es sei nebenbei erwähnt, dass die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene bei jenem Versuche nicht merklich durch die erzeugte Doppelbrechung geändert wurde.

Endlich habe ich noch den Einfluss untersucht, welchen eine Bewegung der Flüssigkeit auf den electrooptischen Effect ausübt. Von einer zweiten mit Schwefelkohlenstoff gefüllten Flasche führt ein Glasrohr durch den Hals der oben beschriebenen Flasche in das Innere derselben; durch dieses Glasrohr kann ein kräftiger Strom von Schwefelkohlenstoff in horizontaler Richtung und senkrecht zu den durchgehenden Lichtstrahlen zwischen den Electroden hindurch getrieben werden. Als Electroden wählte ich die Kugel und die Scheibe. Die Stellung II der Nicols liefert

alsdann unter gewöhnlichen Verhältnissen beim Drehen der Electrisirmaschine die Fig. 7; sobald jedoch der von der Seite kommende Schwefelkohlenstoffstrom zu Stande gekommen ist, wird die Figur, d. h. selbstverständlich der zwischen Kugel und Scheibe liegende Theil, in der Richtung des Stromes verschoben und zwar am stärksten in den der Scheibe zunächst liegenden Partien; das untere Ende des centralen, dunklen Streifens wird vom Strom stark mitgerissen, während das obere Ende nur wenig verrückt erscheint. Die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen übt somit einen sehr merklichen Einfluss auf die Lage der Schwingungsrichtungen des Lichtes aus.

Giessen, 31. December 1879.

VI. *Ueber einige neue Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Gasmolecüle; von R. Clausius.*

Es sind in neuerer Zeit von verschiedenen Autoren Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Molecüle gasförmiger Körper angestellt, welche dazu geführt haben, dass mehrfache Aenderungen an der frühern Bestimmung dieser Weglänge vorgeschlagen sind, und ich glaube daher, dass eine zusammenfassende Besprechung dieser Aenderungsvorschläge nicht als unzweckmässig erscheinen wird.

1. Die erste Bestimmung der mittlern Weglänge der Gasmolecüle habe ich in einem i. J. 1858 in Pogg. Ann.[1]) veröffentlichten Aufsatze ausgeführt. Ich ging dabei von der Betrachtung eines einfachern Falles aus, indem ich zuerst nur ein Molecül als bewegt und alle anderen als ruhend annahm. Für diesen Fall erhielt ich für die mitt-

1) Clausius, Pogg. Ann. **105.** p. 239, 1858. Wieder abgedruckt in meiner Abhandlungen-Sammlung, **2.** p. 260.

lere Weglänge l' des bewegten Molecüls folgenden Ausdruck:

$$l' = \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2}. \tag{1}$$

Hierin bedeutet λ den Abstand, den zwei einander zunächst liegende Molecüle haben würden, wenn die Molecüle cubisch angeordnet wären. Will man statt dieser Grösse λ lieber die Grösse n einführen, welche die Anzahl der Molecüle in der Raumeinheit angibt, so lautet der Ausdruck:

$$l' = \frac{1}{n \pi \varrho^2}. \tag{2}$$

Das Zeichen ϱ stellt den Radius der Wirkungssphäre eines Molecüls dar. Dabei ist unter Wirkungssphäre diejenige um den Schwerpunkt eines Molecüls beschriebene Kugel verstanden, bis zu deren Oberfläche der Schwerpunkt eines andern Molecüls sich ihm nähern kann, bevor ein Abprallen eintritt. Stellt man sich, wie es zuweilen der Anschaulichkeit wegen geschieht, die Molecüle als harte elastische Kugeln vor, so tritt bei diesen das Abprallen ein, wenn der Abstand ihrer Schwerpunkte gleich ihrem Durchmesser ist, und für solche elastische Kugeln ist daher der Radius ϱ der Wirkungssphären doppelt so gross, als der Radius der Kugeln selbst.

Nachdem ich so für den einfachen Fall, wo nur ein Molecül sich bewegt, während die übrigen in Ruhe sind, die mittlere Weglänge ausgedrückt hatte, handelte es sich weiter darum, zu bestimmen, wie dieser Ausdruck geändert werden muss, wenn sich alle Molecüle, und zwar mit durchschnittlich gleichen Geschwindigkeiten, bewegen. Die unter diesen Umständen nöthige Aenderung besteht darin, dass man den vorigen Ausdruck mit dem Verhältnisse der mittlern absoluten Geschwindigkeit aller Molecüle zur mittlern relativen Geschwindigkeit aller Molecülpaare zu multipliciren hat. Bezeichnet man also die absolute Geschwindigkeit eines Molecüls mit v und den Mittelwerth dieser Grösse mit $\bar{v}$, und ferner die relative Geschwindigkeit zweier Molecüle mit r und den Mittelwerth dieser Grösse für alle Combinationen aus je zwei Molecülen mit $\bar{r}$, so erhält man für die mittlere

Weglänge, welche jetzt mit l bezeichnet werden möge, den Ausdruck:

$$l = \frac{1}{n\pi\varrho^2} \cdot \frac{v}{\bar{r}}. \tag{3}$$

Um nun aber das hier eingeführte Verhältniss $\frac{\bar{v}}{\bar{r}}$ numerisch zu bestimmen, muss man die Art der Bewegung der Molecüle näher kennen, d. h. man muss wissen, welches Gesetz in Bezug auf die verschiedenen gleichzeitig stattfindenden Geschwindigkeiten aller einzelnen Molecüle gilt. Zu der Zeit, wo ich meine Untersuchung machte, war ein solches Gesetz noch nicht aufgefunden, und ich musste mich daher bei meiner Rechnung, bei der es sich, wie ich sagte, nur darum handelte, einen ungefähren Begriff von der Grösse des Verhältnisses zu erhalten, mit einer für diesen Zweck geeigneten Annahme begnügen. Als solche wählte ich die, dass alle Molecüle nicht nur durchschnittlich, sondern fortwährend gleiche Geschwindigkeiten haben, was freilich in der Wirklichkeit nicht möglich ist, da die Geschwindigkeiten sich bei jedem Stosse ändern, aber für eine angenäherte Rechnung doch angenommen werden konnte. Unter Zugrundelegung dieser Annahme ergab sich für das Verhältniss der Werth $\frac{4}{3}$.

Ein Jahr später veröffentlichte Maxwell seine bekannte schöne Abhandlung „Illustrations of the dynamical theory of gases“[1]), in welcher er sein Gesetz über die Geschwindigkeiten der einzelnen Gasmolecüle ableitete. In dieser Abhandlung beschäftigte er sich auch mit der mittlern Weglänge der Molecüle und gelangte, was die allgemeine Formel anbetrifft, zu demselben Resultate, wie ich. Die numerische Berechnung des Verhältnisses der beiden mittleren Geschwindigkeiten konnte er aber anders ausführen, wie ich, indem er ihr sein soeben abgeleitetes Geschwindigkeitsgesetz zu Grunde legen konnte, aus welchem sich für das gesuchte Verhältniss der Werth $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ergibt. Diese Abänderung des von mir berechneten Werthes $\frac{4}{3}$ ist

1) Maxwell, Phil. Mag. (4) **19.** p. 19. 1859.

offenbar nicht so aufzufassen, als ob Maxwell einen von mir begangenen Fehler berichtigt hätte, denn für den Fall, für welchen ich meinen Werth $\frac{3}{4}$ abgeleitet hatte, war er, wie ich noch besonders nachgewiesen habe[1]), vollkommen richtig. Da dieser Fall aber nur ein zur Aushülfe angenommener war, so stehe ich nicht an, den aus dem Maxwell'schen Gesetze abgeleiteten Werth $\sqrt{\frac{1}{2}}$ als einen der Wirklichkeit mehr entsprechenden anzuerkennen. Unter seiner Anwendung lautet der Ausdruck für l:

$$(4) \qquad l = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n\pi\rho^2}.$$

2. Was nun die gegen den Ausdruck erhobenen Einwände anbetrifft, so ist zunächst ein von Frowein in dem „Nieuw Archief voor Wiskunde", Deel V, unter dem Titel „Eene bekende formule van Clausius" veröffentlichter Aufsatz zu erwähnen.

Frowein bekämpft schon meine erste Entwickelung, welche sich auf den Fall bezieht, wo nur ein Molecül sich bewegt, während die anderen in Ruhe sind, und aus welcher sich die unter (1) mitgetheilte Formel ergeben hat. Er legt dabei aber meinen Aussprüchen einen so unrichtigen Sinn unter, dass ich vermuthen muss, dass er meine Abhandlung wegen der ihm fremden Sprache, in welcher sie geschrieben ist, nicht überall richtig verstanden hat.

Ich habe gesagt, man solle sich den mit Molecülen erfüllten Raum in dünne Schichten zerlegt denken, deren Dicke δ so klein sei, dass man höhere Potenzen derselben gegen die erste Potenz vernachlässigen könne. Indem ich dann von den Molecülen sprach, welche für jede dieser Schichten in Rechnung zu bringen sind, habe ich das erste Mal ausdrücklich gesagt, dass es sich dabei um diejenigen Molecüle handle, deren Centra sich in der Schicht befinden. Weiterhin aber habe ich es nicht für nöthig gehalten, dieses jedesmal zu wiederholen, sondern habe die betreffenden Molecüle kurz die in der Schicht befindlichen Molecüle genannt. An-

1) Maxwell, Phil. Mag. (4) **21.** p. 434. 1860.

statt nun dieses so zu verstehen, wie es dem Vorausgegangenen entspricht, nämlich dass es sich nur um die Lage der Centra handelt, fasst Hr. Frowein es wörtlich auf und erhebt dagegen den Einwand, eine unendlich dünne Schicht könne nicht ganze Molecüle, sondern nur Theile von Molecülen enthalten.

Ferner habe ich die Anzahl der in einer Schicht von der Dicke δ befindlichen Molecüle mit der Anzahl der in einer Schicht von der Dicke λ befindlichen verglichen, und habe gesagt, aus der letztern Anzahl erhalte man die erstere durch Multiplication mit $\frac{\delta}{\lambda}$. Da ich nun in derselben Betrachtung auch davon gesprochen habe, dass man sich alle in der Schicht von der Dicke λ befindlichen Molecüle so verlegt denken solle, dass ihre Centra in einer Ebene liegen, so meint nun Hr. Frowein, jene Multiplication mit $\frac{\delta}{\lambda}$ solle dazu dienen, einen auf eine Ebene bezüglichen Ausdruck in einen auf einen Raum bezüglichen zu verwandeln, wogegen er sich dann ausspricht. Man sieht also wohl, dass es sich bei diesen beiden Einwänden nur um Missverständnisse handelt.

Ausser diesen Einwänden macht Frowein aber noch einen andern, welcher mehr sachlicher Art ist. Er sagt nämlich, zwischen dem Falle, wo nur ein Molecül sich bewegt, während die anderen in Ruhe sind, und dem, wo alle Molecüle sich bewegen, finde in Bezug auf die mittlere Weglänge gar kein Unterschied statt. Man habe also die auf den erstern Fall bezügliche mittlere Weglänge weder mit $\frac{3}{4}$, noch mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$ zu multipliciren, sondern ganz unverändert auch auf den letztern Fall anzuwenden. Er gibt allerdings zu, dass die Anzahl der Stösse, welche ein Molecül in der Zeiteinheit erleidet, unter bewegten Molecülen grösser sei, als unter ruhenden, und zwar in demselben Verhältnisse, in welchem seine mittlere relative Geschwindigkeit zu den bewegten Molecülen grösser sei, als seine mittlere absolute Geschwindigkeit, sagt aber, bei der Ableitung der mittlern Weglänge aus der Anzahl der Stösse habe man ebenfalls die

mittlere relative Geschwindigkeit statt der mittlern absoluten Geschwindigkeit in Rechnung zu bringen, und dadurch hebe sich jener Unterschied wieder auf. Dieses ist ein Irrthum, denn es ist ohne weiteres ersichtlich, dass man, um die mittlere Weglänge eines Molecüls zu erhalten, die ganze von ihm während der Zeiteinheit durchlaufene Strecke durch die Anzahl der Wege, aus welchen die Strecke besteht, zu dividiren hat. Jene Strecke wird aber durch seine mittlere absolute Geschwindigkeit dargestellt, und die Anzahl der Wege ist gleich der Anzahl der Stösse, welche es während der Zeiteinheit erleidet. Somit ergibt sich auch dieser Einwand als ungerechtfertigt.

3. Von grösserer Bedeutung, als die vorstehenden Einwände, ist eine Veränderung, welche Korteweg mit meiner Formel vorgenommen hat[1]), weil das Irrthümliche in der von ihm gegebenen Begründung schwerer herauszufinden ist. Eine Besprechung dieser Veränderung scheint mir daher besonders nöthig zu sein.

Sie besteht in der Hinzufügung eines in meiner Formel nicht vorkommenden Factors 2, also in der Verdoppelung des von mir gegebenen Werthes der mittlern Weglänge, und die Schlussweise, durch welche er zu diesem doppelten Werthe gelangt, ist folgende.

Er betrachtet zunächst alle sich durcheinander bewegenden Molecüle in den Bewegungsstadien, in welchen sie sich in einem gewissen Momente befinden, und bestimmt den Mittelwerth der Wegstücke, welche sie von diesem Momente an bis zu ihren nächsten Stössen zurücklegen. Dann sagt er weiter, vor jenem von ihm zur Betrachtung ausgewählten Momente haben die Molecüle seit ihren letzten Stössen auch schon gewisse Wegstücke durchlaufen, deren Mittelwerth eben so gross sei, wie der von ihm bestimmte Mittelwerth der nach jenem Momente durchlaufenen Wegstücke, und demnach sei der Mittelwerth der ganzen von einem Stosse bis zum andern durchlaufenen Wege doppelt so gross, als

1) Korteweg, Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, **12.** p. 241. 1877.

jener von ihm bestimmte Mittelwerth, und dieser doppelte Werth sei somit als mittlere Weglänge anzunehmen.

Diese Schlussweise scheint auf den ersten Blick so einfach und natürlich zu sein, dass man glauben könnte, ihr ohne weiteres zustimmen zu müssen. Dessenungeachtet ist sie unrichtig. Der Mittelwerth der Wegstücke, welche die Molecüle von einem gewissen Momente an bis zu den nächsten Stössen durchlaufen, ist nicht halb so gross, sondern eben so gross, wie die Strecke, welche wir mittlere Weglänge nennen, nämlich der Mittelwerth aller im Gase vorkommenden, von einem Stosse zum andern durchlaufenen Wege.

Ich habe mich über diesen Punkt schon einmal in meiner Abhandlung über die Wärmeleitung gasförmiger Körper ausgesprochen.[1]) Dort habe ich nämlich alle Molecüle betrachtet, welche sich in einem gewissen Momente in einer unendlich dünnen Schicht befinden, und habe mir die Frage gestellt, wie gross der Mittelwerth der Wegstücke sei, welche sie von diesem Momente an bis zu ihren nächsten Stössen durchdurchlaufen müssen, und ebenso, wie gross der Mittelwerth der Wegstücke sei, welche sie vor diesem Momente seit ihren letzten Stössen durchlaufen haben. Diese beiden unter sich gleichen Mittelwerthe, welche ich mit $\bar{s}$ bezeichnete, stellten sich als eben so gross heraus, wie die ganze, früher von mir bestimmte mittlere Weglänge, welche ich dadurch erhalten hatte, dass ich, von einer grossen Anzahl von Stössen ausgehend, die Wege der Molecüle bis zu ihren nächsten Stössen betrachtete und von diesen den Mittelwerth nahm. Nachdem ich auf diesen eigenthümlichen Umstand im Texte aufmerksam gemacht hatte, fügte ich zur Erklärung desselben folgende Anmerkung hinzu.

„Es kann vielleicht auf den ersten Blick auffällig erscheinen, dass man für die Wege von den letzten Zusammenstössen bis zu einem gewissen Zeitpunkte, oder von diesem Zeitpunkte bis zu den nächsten Zusammenstössen denselben

1) Clausius, Pogg. Ann. **115.** p. 20. 1862 und Abhandlungen-Sammlung **2.** p. 292. 1867.

Mittelwerth erhält, wie für die während einer gewissen Zeit in dem Gase zurückgelegten ganzen Wege von einem Zusammenstosse bis zum nächsten. Dabei muss man aber bedenken, dass der Mittelwerth aus allen Wegen, welche während einer gewissen Zeit in dem Gase zwischen je zwei Zusammenstössen zurückgelegt werden, nicht gleichbedeutend ist mit demjenigen Mittelwerthe, den man erhalten würde, wenn man von allen Molecülen, welche sich in einem gewissen Momente gleichzeitig in einer Schicht befinden, die Wege von ihren letztvorangegangenen bis zu ihren nächstfolgenden Zusammenstössen betrachten wollte. Im letztern Falle sind nämlich die grossen Wege gegenüber den kleinen stärker vertreten, als im erstern, denn ein Molecül braucht zu einem grossen Wege mehr Zeit, als zu einem kleinen, und es ist daher für einen gewissen Moment mehr Wahrscheinlichkeit, dass es sich auf einem grossen Wege befindet, als auf einem kleinen, während im erstern Falle alle im Gase vorkommenden Wege gleich zählen. Wenn man die Rechnung ausführt, so findet man im letztern Falle einen doppelt so grossen Mittelwerth, als im erstern. Von jenem grössern Mittelwerthe ist unser oben bestimmter Werth $\bar{s}$ die Hälfte."

Hieraus erklärt es sich also, weshalb Korteweg bei seinem Verfahren, bei dem er die Molecüle in einem gewissen Momente betrachtete und die Wege von ihren letztvorangegangenen bis zu ihren nächstfolgenden Stössen bestimmte, einen Werth erhalten musste, welcher doppelt so gross ist, als die wirkliche mittlere Weglänge.

4. Während die bisher besprochenen Meinungsdifferenzen über die richtige Form des Ausdruckes der mittlern Weglänge der Art waren, dass es sich dabei um verhältnissmässig bedeutende Werthänderungen handelte, ist schliesslich noch eine Abänderung des Ausdruckes zu erwähnen, bei welcher es sich nur um einen verhältnissmässig sehr kleinen Unterschied des Werthes handelt, nämlich um einen solchen, der von der Ordnung der Moleculardimensionen ist.

Ich habe, wie schon oben erwähnt, um die gegenseitige Einwirkung der Molecüle in Rechnung bringen zu können,

ohne doch über ihre Gestalt und über die von ihnen ausgeübten Kräfte specielle Hypothesen machen zu müssen, für jedes Molecül eine gewisse Wirkungssphäre angenommen, welche ich als eine um seinen Schwerpunkt beschriebene Kugel definirte, bis zu deren Oberfläche sich der Schwerpunkt eines andern Molecüls ihm nähern könne, bevor ein Abprallen eintrete. Nach dieser Annahme konnte ich in dem zuerst von mir behandelten Falle, wo nur ein Molecül sich bewegt, während die anderen in Ruhe sind, das bewegte Molecül durch einen blossen Punkt ersetzen, welcher zwischen den Wirkungssphären der ruhenden Molecüle umherfliegt und bald hier, bald dort an eine derselben anstösst.

Um nun, wenn der Punkt sich mit einer gewissen Bewegungsrichtung einer Wirkungssphäre nähert, zu bestimmen, ob er sie trifft oder an ihr vorübergeht, dachte ich mir senkrecht zu der Bewegungsrichtung des Punktes einen grössten Kreis durch die Wirkungssphäre gelegt und sagte dann, wenn die Bahnlinie des Punktes diese Kreisfläche schneidet, so findet Zusammentreffen, im andern Falle Vorübergehen statt.

Im Zusammenhange mit dieser Betrachtung habe ich auch das Ende des Weges, welchen der Punkt bis zum Zusammentreffen zu durchlaufen hat, der Einfachheit wegen so bestimmt, als ob es in jener mittlern Kreisfläche läge. Da aber in der Wirklichkeit der Punkt sich nicht bis zur mittlern Kreisfläche, sondern nur bis zur Oberfläche der Wirkungssphäre bewegen kann, so ist durch diese Bestimmungsweise der Weg etwas zu lang gerechnet. Der unter (1) und (2) mitgetheilte Ausdruck von l' hat also einen etwas zu grossen Werth, und dieselbe Ungenauigkeit überträgt sich natürlich auch auf den aus (2) abgeleiteten Ausdruck (3), welcher die mittlere Weglänge für den Fall darstellt, wo nicht blos ein Molecül sich bewegt, sondern alle Molecüle in Bewegung sind. Da aber bei Gasen, die nicht sehr stark verdichtet sind, die mittlere Weglänge gegen den Radius der Wirkungssphäre sehr gross ist, so ist die auf diese Weise entstandene Ungenauigkeit im Verhältniss zur ganzen mittlern Weglänge sehr klein.

Später sind verschiedene Versuche gemacht, diese kleine Ungenauigkeit noch zu corrigiren und die wirkliche Lage der Stosspunkte in den Oberflächen der Wirkungssphären zu berücksichtigen. Die erste derartige Rechnung wurde von van der Waals in seiner schönen Schrift: „Over de continuiteit van den gas-en vloeistoftoestand" (Leiden 1873) ausgeführt. Ein Jahr später habe ich selbst, ohne damals den Inhalt jener in holländischer Sprache verfassten Schrift zu kennen, bei Gelegenheit einer andern Untersuchung[1]) eine erneute Bestimmung der mittlern Weglänge der Molecüle vorgenommen, bei der jene Verlegung der Stosspunkte in die mittleren Kreisflächen nicht vorkommt. Ferner hat Korteweg in seiner schon oben citirten Abhandlung[2]), in welcher er den Factor 2 in die Formel eingeführt hat, gleichzeitig den hier in Rede stehenden Umstand mit berücksichtigt, und endlich ist auch van der Waals noch einmal auf den Gegenstand zurückgekommen.[3])

Die Resultate dieser verschiedenen Untersuchungen stimmen untereinander nicht ganz überein, sondern es ist in ihnen noch ein Differenzpunkt geblieben. Ich glaube aber kaum, dass eine Erörterung desselben für die Leser von erheblichem Interesse sein würde, da selbst eine vollkommen genaue Berücksichtigung des in Rede stehenden Umstandes die Sache noch nicht zum Abschluss bringen würde. Ich habe nämlich bei weiterer Betrachtung des Gegenstandes gefunden, dass, wenn man einmal so kleine Unterschiede, wie den durch die Lage des Stosspunktes bedingten, in Rechnung ziehen will, man auch noch auf einen andern die mittlere Weglänge beeinflussenden Umstand Rücksicht nehmen muss.

Die vorher definirten Wirkungssphären der Molecüle sind nämlich grösser als die Molecüle selbst. Denkt man sich z. B. die Molecüle als harte elastische Kugeln, so

1) Clausius, Sitzungsberichte der Niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1874, und Pogg. Ann. Ergzbd. 7. p. 215. 1876.

2) Korteweg, Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, 12. p. 241. 1877.

3) van der Waals, Archives Néerlandaises. 12. p. 201. 1877.

haben bei diesen, wie schon oben einmal erwähnt wurde, die Wirkungssphären einen doppelt so grossen Radius und daher ein achtmal so grosses Volumen, als die elastischen Kugeln. Daraus folgt, dass, wenn zwei Molecüle einander sehr nahe liegen, ihre Wirkungssphären sich zum Theil gegenseitig decken können. Dieser Umstand ist bei der zur Ableitung der Gleichung (2) angestellten Betrachtung des Falles, wo ein Punkt sich zwischen den ruhenden Wirkungssphären umherbewegt, nicht berücksichtigt, sondern es ist stillschweigend angenommen, dass die Oberflächen aller Wirkungssphären vollkommen frei seien, sodass sie in jedem ihrer Punkte von dem bewegten Punkte getroffen werden können. Hierdurch ist nun ebenfalls eine Ungenauigkeit in dem durch die Gleichung (2) bestimmten Werthe von l' und demgemäss auch in dem durch die Gleichung (3) bestimmten Werthe von l veranlasst, welche von derselben Ordnung ist, wie die vorher besprochene, sodass eine Correction der einen ohne gleichzeitige Correction der andern gar nichts nützen kann.

Man könnte nun freilich durch eine erweiterte Rechnung auch die zweite Correction noch hinzufügen, und in der That habe ich für mich eine solche Rechnung ausgeführt. Ich muss aber sagen, dass ich wenig Gewicht darauf lege. Es ist nämlich zu beachten, dass die ganze Annahme von scharf abgegrenzten Wirkungssphären nur eine angenäherte ist. Bei harten elastischen Kugeln, welche beim Zusammentreffen plötzlich voneinander abprallen, lässt sich allerdings der Vorgang durch Einführung von Wirkungssphären von bestimmt angebbarer Grösse genau darstellen. Die wirkliche gegenseitige Einwirkung der Molecüle ist aber wahrscheinlich von dem Verhalten harter elastischer Kugeln sehr verschieden und lässt sich durch die Einführung von scharf begrenzten Wirkungssphären nur unvollkommen darstellen. Wenn hiernach schon in der Annahme, auf welcher die Rechnung beruht, eine Ungenauigkeit liegt, so würde es meiner Ansicht nach keinen Nutzen haben, wenn man die Rechnung selbst bis zur äussersten Genauigkeit treiben wollte.

Es scheint mir vielmehr, solange uns nähere Kenntnisse

über die Molecüle fehlen, am angemessensten, sich bei der Bestimmung ihrer mittlern Weglänge mit einer Annäherung zu begnügen und bei der ursprünglich von mir abgeleiteten Gleichung (3), welche die einfachste Form hat, stehen zu bleiben, dabei aber im Auge zu behalten, dass sie nicht vollkommen genau, sondern mit einer Ungenauigkeit von der Ordnung der Moleculardimensionen behaftet ist. Diese Ungenauigkeit fällt dann in dieselbe Kategorie, wie die Abweichung der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze und von den anderen für den vollkommenen Gaszustand geltenden Gesetzen, welche trotzdem, dass sie für die wirklichen Gase nicht ganz genau sind, doch ihren Werth als angenäherte und durch ihre Einfachheit ausgezeichnete Gesetze behalten.

Bonn, Februar 1880.

VII. *Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten; von H. F. Weber.*

Der Vorgang der Wärmeleitung in Flüssigkeiten ist in den letzten zehn Jahren wiederholt messenden Untersuchungen unterworfen worden, welche theils in absolutem, theils in relativem Maasse die Grösse der Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten feststellen sollten.

Eine kritische Durchsicht dieser verschiedenen Untersuchungen führt zu dem Resultat: so viele Male die Wärmeleitung der Flüssigkeiten untersucht wurde, ebenso viele verschiedene, einander total widersprechende Resultate wurden gewonnen.

Ich übergehe die Resultate, welche Hr. Guthrie in einer ausgedehnten Arbeit[1]) über die relativen Leitungs-

1) On the Thermal Resistance of Liquids. By Frederick Guthrie, Communicated by Prof. Tyndall. Phil. Trans. **159.** p. 637. 1869.

fähigkeiten der Flüssigkeiten für Wärme erhalten hat, weil sie sich sofort als völlig irrig herausstellen. Hr. Guthrie hat eine im Princip leistungsfähige Methode in gänzlich fehlerhafter Weise gehandhabt und hat die durch diese Methode gewonnenen Beobachtungsdaten in ebenso fehlerhafter Weise interpretirt.

Die ersten absoluten Messungen der Wärmeleitungsfähigkeit einer Reihe verschiedener Flüssigkeiten hat Hr. Lundquist[1]) mit Hülfe der Methode ausgeführt, welche Ångström einige Jahre früher zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle ausgebildet hatte. Die hauptsächlichsten Resultate, welche Hr. Lundquist durch Anwendung dieser ausserordentlich zuverlässigen, nur etwas zeitraubenden Methode erhalten hat, mögen in folgender kleiner Tabelle Platz finden. Das absolute Wärmeleitungsvermögen von Wasser, Kochsalzlösung und Zinkvitriollösung (Gramm, Centimeter, Minute und 1° C. als Einheiten zu Grunde gelegt) wurde bei einer mittlern Temperatur $\bar{t}$ und bei den angeführten Werthen der Dichte ϱ und der specifischen Wärme c gleich folgenden Werthen gefunden:

	k	$\bar{t}$	ϱ	c
Wasser	0,0933	40,8°	1,000	1,000
Kochsalzlösung	0,0895	43,9°	1,178	0,785
Zinkvitriollösung . . .	0,0964	44,1°	1,242	0,816
Zinkvitriollösung . . .	0,0949	45,2°	1,382	0,770

Fünf Jahre später hat Hr. Winkelmann den von Hrn. Stefan zur Bestimmung des absoluten Wärmeleitungsvermögens der Gase angegebenen Apparat dazu benutzt, das Wärmeleitungsvermögen von sechs Flüssigkeiten in absolutem Maasse festzustellen.[2]) Die definitiven Werthe der absoluten Wärmeleitungsvermögen (ausgemessen mit Hülfe der oben angegebenen Einheiten), welche Hr. Winkelmann aus seinen Beobachtungen ableitete, sind in der folgenden Tafel enthalten:

1) Lundquist, Undersökning af några vätskors ledningsförmåga for värme. Upsala Universitets arsskrift. p. 1. 1869.

2) Winkelmann, Pogg. Ann. **153.** p. 481—498. 1874.

Wasser	0,0924	Glycerin	0,0448
Kochsalzlösung . .	0,1605	Alkohol	0,0904
Chlorkaliumlösung .	0,1147	Schwefelkohlenstoff .	0,1202

Diese Resultate sind mit denen des Hrn. Lundquist unvereinbar: während beide Beobachter für das Leitungsvermögen des Wassers nahezu denselben Werth gefunden haben, ist für Kochsalzlösung das von Hrn. Winkelmann gefundene Leitungsvermögen fast doppelt so gross als das von Hrn. Lundquist gefundene; nach den Ergebnissen des einen Beobachters würden die wässerigen Salzlösungen die Wärme nur wenig anders leiten als Wasser, nach den Resultaten des andern Beobachters würden im Gegentheil wässerige Salzlösungen bei weitem bessere Wärmeleiter sein als ihr Lösungsmittel.

In nicht viel besserer Uebereinstimmung stehen die von Hrn. Winkelmann erhaltenen Resultate mit den Ergebnissen einer ausgedehnten Arbeit, welche Hr. Beetz in neuester Zeit über die relativen Wärmeleitungsfähigkeiten der Flüssigkeiten ausgeführt hat.[1]) Hr. Beetz ermittelte mit Hülfe eines Apparates, der im Princip mit dem von Hrn. Winkelmann benutzten identisch ist, die relativen Werthe der Wärmeleitungsvermögen einer grossen Anzahl von Flüssigkeiten für die beiden Temperaturintervalle 8° bis 14° und 28° bis 36° C. Für das erstere Temperaturintervall fand er für folgende (auch von Hrn. Winkelmann bei derselben Temperatur untersuchte) Flüssigkeiten folgende Werthe des relativen Wärmeleitungsvermögens:

	Beetz	Winkelmann
Wasser	100	100
Kochsalzlösung . .	105	174
Glycerin	82	48
Alkohol	87	98
Schwefelkohlenstoff	124	130

Die Arbeit des Hrn. Winkelmann gibt dagegen denselben Flüssigkeiten bei derselben Temperatur als relative Werthe

1) Beetz, Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der k. b. Academie der Wissenschaften, Heft 1. p. 86—115, 1879 und Wied. Ann. 8. p. 435—460. 1879.

des Wärmeleitungsvermögens Zahlenwerthe, welche die letzte Spalte der vorstehenden Tabelle enthält. Eine Vergleichung der Zahlen beider Spalten lässt sofort erkennen, wie weit die Ergebnisse dieser beiden Untersuchungen auseinander laufen. Während z. B. Hr. Beetz dem Glycerin ein doppelt so grosses Wärmeleitungsvermögen gibt als Hr. Winkelmann, ertheilt der letztere Beobachter der Kochsalzlösung fast den zweifachen Werth des Leitungsvermögens, welches Hr. Beetz derselben zukommen lässt.

Diese Angaben werden genügen, die Richtigkeit der eingangs gemachten Bemerkung über die grosse Divergenz der bisher über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten festgestellten Resultate zu belegen und hinreichend zur Evidenz zu bringen, dass im Gebiete der Wärmeleitung der Flüssigkeiten trotz der angeführten Untersuchungen wohl noch alles fraglich ist.

Diese Sachlage deutet an, dass entweder ein Theil oder die Gesammtheit der bisher zur Untersuchung der Wärmeleitung benutzten Methoden fehlerhaft ist, oder dass die durch richtige Methoden gewonnenen Beobachtungen falsch ausgelegt wurden.

Um Klarheit in diesen Widerstreit der Angaben zu bringen, ist nothwendig, eine von den bisher benutzten Untersuchungsmethoden verschiedene und möglichst fehlerfreie neue Untersuchungsmethode in Anwendung zu bringen und die durch die neue Beobachtungsmethode gelieferten Daten einer vollkommen strengen, auf die Principien der Theorie der Wärmeleitung basirten Berechnung zu unterwerfen. Die meinen Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion zu Grunde liegende Methode führte mich auf den Gedanken, eine ganz analoge Untersuchungsform auf den Vorgang der Wärmeleitung in Flüssigkeiten anzuwenden. Schon die ersten Probeversuche liessen erkennen, dass man mit Hülfe dieser Methode den Verlauf der Wärmeleitung in Flüssigkeitslamellen mit derselben Schärfe, derselben Sicherheit und demselben minimalen Zeitaufwande messend verfolgen kann, mit der ich früher den Verlauf der Hydrodiffusion untersuchen konnte. Und bei der definitiven Durch-

führung dieser Untersuchungsmethode stellte sich heraus, dass dieselbe eine erheblich feinere Messung der sehr kleinen Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten gestattet, als die bisher zur Bestimmung der viele hundertmal grösseren Wärmeleitungsfähigkeiten der Metalle benutzten Methoden zu geben vermögen.

In der folgenden Abhandlung gebe ich

1) eine eingehende Beschreibung und eine möglichst vollständig entwickelte Theorie dieser benutzten Versuchsmethode;

ich theile sodann 2) die Resultate mit, welche ich bei Anwendung dieser Methode auf die Wärmeleitung in 14 verschiedenen nichtmetallischen Flüssigkeiten erhalten habe;

ich leite 3) aus diesen Resultaten ein allgemeines Gesetz ab, welches die Grösse des Wärmeleitungsvermögens nichtmetallischer Flüssigkeiten in einen einfachen Zusammenhang mit der specifischen Wärme der Volumeneinheit bringt;

4) löse ich die Widersprüche auf, welche einerseits zwischen meinen Resultaten und denen der Hrn. Lundquist, Winkelmann und Beetz, und welche andererseits zwischen den Resultaten dieser Beobachter bestehen

und füge 5) eine Reihe von Messungen über die Wärmeleitungsfähigkeit einer metallischen Flüssigkeit, des Quecksilbers, bei, um den fundamentalen Unterschied zwischen den Vorgängen der Wärmeleitung in metallischen und nichtmetallischen Flüssigkeiten vor Augen zu führen.

I. Beschreibung und Theorie der Untersuchungsmethode.

1. Auf eine circa 0,5 cm dicke, planparallele cylindrische Kupferplatte von etwa 200 qcm. Basisfläche werden drei genau gleich dicke, und zwar nur einige mm. dicke, planparallele Stückchen — von je 0,1 qcm Fläche — einer sehr schlecht wärmeleitenden festen Substanz (Glas, Hartgummi, etc.) gelegt; auf diese wird hierauf eine in ihrer untern Fläche genau eben geschliffene cylindrische Kupferplatte von circa 1 bis 1,5 cm. Dicke und einem Radius genau gleich

dem Radius der untern Platte gesetzt. Nachdem dieses Plattensystem genau horizontal gestellt worden ist, wird der dünne Zwischenraum zwischen den beiden Kupferplatten mit der auf die Wärmeleitung zu untersuchenden Flüssigkeit so weit ausgefüllt, dass die Flüssigkeit mit leicht gekrümmtem capillaren Bauche rings an den Plattenrändern hervortritt.

Das so vorgerichtete Plattensystem wird einer mässig hohen constanten Temperatur, etwa der Zimmertemperatur, solange ausgesetzt, bis es dieselbe durch seine ganze Masse hindurch angenommen hat. Darauf wird das Plattensystem in irgend einem Zeitmomente, den wir als Moment Null bezeichnen wollen, bei genau horizontaler Stellung vorsichtig auf eine planparallel geschliffene, 3 bis 8 cm dicke und exact horizontal gestellte Eisplatte von 0^0 herabgelassen, rasch mit einer auf 0^0 abgekühlten Hülle von Kupferblech überdeckt und der Abkühlung überlassen. Nach Ablauf einer sehr kurzen Zeit ist die untere Kupferplatte auf Null Grad abgekühlt und bleibt von da an genau auf dieser Temperatur, da das bedeutende Gewicht des Plattensystems das sich unter der untern Fläche der untern Platte bildende Schmelzwasser unmittelbar nach seiner Bildung herauspresst und die untere Fläche der letztgenannten Platte so kräftig an die Eisfläche andrückt, dass es Mühe macht, diese Verbindung zu lösen. Es entsteht nun eine stetige Wärmeströmung aus der obern, wärmern Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch nach der untern Kupferplatte hin. Dadurch sinkt die Temperatur der obern Kupferplatte und jeder horizontalen Schicht der Flüssigkeitslamelle im Laufe der Zeit nach einem leicht zu ermittelnden Gesetz, und es lässt sich aus dem gemessenen zeitlichen Verlaufe der Temperatur irgend einer Flüssigkeitsschicht die Grösse des Wärmeleitungsvermögens der Flüssigkeit berechnen. Als Flüssigkeitsschicht, deren zeitlichen Temperaturverlauf wir messend verfolgen, wählen wir die obere Grenzschicht der Lamelle, weil sich für diese der Temperaturverlauf in einfachster und schärfster Weise ermitteln lässt. Die Temperatur dieser obern Grenzfläche ist nämlich in jedem Zeitmomente gleich der Temperatur der untern Grenzfläche

der obern Kupferplatte; von der letztern Temperatur aber lässt sich leicht einsehen, dass sie in jedem beliebigen Zeitmomente gleich der gleichzeitigen Temperatur irgend eines beliebigen Massenelementes der obern Kupferplatte ist. Misst man also den zeitlichen Verlauf der Temperatur einer beliebigen Stelle der obern Kupferplatte, so erhält man damit zugleich den zeitlichen Verlauf der Temperatur der obern Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle.

Bei dieser Versuchsanordnung sind die dichtesten Flüssigkeitsschichten immer am tiefsten gelegen; diese Versuchsanordnung lässt also den hauptsächlichsten Fehler, der die Vorgänge der Wärmeleitung in Flüssigkeiten leicht trüben kann, und der in der That die Resultate mehrerer der bisher ausgeführten Untersuchungen in der erheblichsten Weise gefälscht hat — die Wärmefortführung auf dem Wege der Flüssigkeitsströmungen — principiell fortfallen. Ein weiterer Vortheil dieser Versuchsmethode besteht darin, dass die eine Voraussetzung in der zu entwickelnden Theorie der Methode — die untere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle habe permanent die Temperatur 0^0 — immer erfüllt ist; die Schwere des Apparats sorgt selbst dafür, dass alles Schmelzwasser durch Verdrängung beseitigt wird, und keine allmähliche Temperatursteigerung der untern Grenzfläche der Lamelle durch Stagnation des Schmelzwassers eintritt.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Anwesenheit der drei kleinen planparallelen Stückchen eines festen schlechten Wärmeleiters den Vorgang der Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle kaum modificirt. Diese Substanzen haben ein Wärmeleitungsvermögen, das nahezu von gleicher Grössenordnung ist wie das der Flüssigkeiten, und die Summe der diesen drei Stückchen zukommenden Flächen macht noch nicht den fünfhundertsten Theil der Fläche aus, durch welche die Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle vor sich geht.

2. Die Annahme, dass in jedem beliebigen Zeitmomente die Temperatur aller Massenpunkte der obern Kupferplatte dieselbe ist, bildet eine der Grundlagen der benutzten Methode. Da man vielleicht wegen der ganz be-

trächtlichen Dicke der benutzten Platte geneigt sein dürfte, diese Annahme nur als grobe Annäherung gelten zu lassen, halte ich es für angemessen, die volle Richtigkeit dieser Annahme jedem Zweifel zu entrücken.

Sämmtliche Volumenelemente der beiden Kupferplatten und der eingeschalteten Flüssigkeitslamelle mögen die anfängliche Temperatur U haben. In dem Zeitmomente $t = 0$ werde das ganze Plattensystem in horizontaler Stellung auf eine ebene Eisplatte gestellt und gleichzeitig einer Umgebung von 0^0 ausgesetzt. Die untere Kupferplatte (und damit auch die untere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle) wird in sehr kurzer Zeit auf Null Grad abgekühlt, und es entwickelt sich ein continuirlicher Wärmestrom von abnehmender Stärke aus der obern Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch gegen die untere Kupferplatte hin. Gleichzeitig gibt die obere Kupferplatte von ihrer obern Basisfläche und ihrer Mantelfläche Wärme auf dem Wege der äussern Wärmeleitung an die kühlere Umgebung ab. Es soll die Temperaturvertheilung bestimmt werden, die infolge dieser Vorgänge der Wärmeleitung in irgend einem Zeitmomente in der obern Kupferplatte stattfindet.

Es möge ein cylindrisches Coordinatensystem (x, r, φ) der Betrachtung zu Grunde gelegt werden, dessen Axe mit der Axe der cylindrischen Platte coincidirt, und dessen Nullpunkt in der untern Basisfläche der Kupferplatte liegt. Die Dicke der Platte sei Δ_1, ihr Radius sei R; die Dichte, die specifische Wärme und die innere Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers sollen mit ϱ_1, c_1, k_1 bezeichnet sein. Da bei den soeben geschilderten Vorgängen der Wärmeleitung die Wärmeströmung von der Richtung φ unabhängig ist, so hat die Temperatur u in jedem Zeitmomente t und in jedem Massenelemente im Innern der Platte folgende partielle Differentialgleichung zu erfüllen:

$$\varrho_1 c_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}. \tag{1}$$

Dieser linearen partiellen Differentialgleichung liegt natürlich die Annahme zu Grunde, dass die drei Elemente:

Dichte, specifische Wärme und Wärmeleitungsvermögen des Kupfers von der Temperatur unabhängig sind. Die bisherigen Erfahrungen lehren, dass diese Annahme für keines dieser drei Elemente genau zutrifft, dass vielmehr die Dichte und das Wärmeleitungsvermögen ausserordentlich langsam mit steigender Temperatur abnehmen, während die specifische Wärme in messbarer Weise mit wachsender Temperatur ansteigt. Die Folgerungen aus der oben gemachten Annahme können also nur Annäherungen an den wirklichen Sachverhalt sein; sie werden aber sehr grosse Annäherungen sein, da das Intervall, innerhalb dessen sich die Temperatur der Kupferplatte in unseren Versuchen bewegt, nur wenige Grade umfasst.

Ausserdem hat die Temperatur u vier Grenzgleichungen Genüge zu leisten. Für die an Luft grenzenden Elemente der obern Basisfläche muss in jedem Momente die Gleichung erfüllt sein:

$$k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\Delta_1} + h_1 u_{x=\Delta_1} = 0, \tag{2}$$

wo h_1 die Grösse des äussern Wärmeleitungsvermögens von Kupfer in Luft bedeutet.

Für alle Elemente der Mantelfläche gilt die analoge Gleichung:

$$k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} + h_1 u_{r=R} = 0. \tag{3}$$

Die auf die untere Basisfläche der Platte bezügliche Grenzgleichung enthält die Thatsache, dass der Wärmegewinn jedes Elementes dieser Grenzfläche in jedem Zeitelement gleich Null ist, dass also jedem Elemente dieser Grenzfläche in jedem Zeitelemente soviel Wärme durch die Flüssigkeitsleitung in der Lamelle entzogen wird, als es durch die metallische Leitung aus der Kupfermasse heraus zugeführt bekommt. Nennen wir die Temperatur in dieser untern Basisfläche $u_{x=0}$, und bezeichnen wir die Dicke und das innere Wärmeleitungsvermögen der äusserst dünnen Flüssigkeitslamelle mit Δ und k, so ist der Inhalt dieser Grenzgleichung:

$$(4) \qquad k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} - \frac{k}{\Delta} \cdot u_{x=0} = 0.$$

Die letzte Grenzgleichung bildet die Anfangsbedingung:

$$(5) \qquad u = U \left\{ \begin{matrix} \text{für } t = 0 \\ \text{und für alle } x \text{ und } r \end{matrix} \right\}.$$

Eine einfache Lösung, welche der Differentialgleichung (1) genügt, ist:

$$u = \left[A \cos qx + B \sin qx\right] I^0_{mr} \, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}(q^2+m^2)t}$$

wo I^0_{mr} die Bessel'sche Function erster Gattung mit dem Index 0 und dem Argument mr bezeichnet, und wo die A, B, q und m 4 Constante bedeuten, deren Werthe aus den obigen vier Grenzgleichungen heraus zu bestimmen sind.

Die Grenzgleichung (4) liefert zunächst die Beziehung:

$$B = \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q} \cdot A,$$

wodurch die angegebene einfache Lösung die Form annimmt:

$$u = A\left(\cos qx + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q} \sin qx\right) I^0_{mr} \, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}(q^2+m^2)t}$$

Zur Bestimmung der Grösse q dient die Grenzgleichung (2). Soll die vorliegende einfache Lösung der Grenzgleichung (2) genügen, so müssen für q diejenigen Werthe gewählt werden, welche sich aus der Gleichung ergeben:

$$-k_1 q \sin q\Delta_1 + \frac{k}{\Delta} \cos q\Delta_1 + h_1 \cos q\Delta_1 + h_1 \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q} \sin q\Delta_1 = 0$$

oder:

$$-q\Delta_1\left[1 - \frac{h_1}{k_1} \cdot \frac{k}{k_1}\frac{\Delta_1^2}{\Delta}\frac{1}{(q\Delta_1)^2}\right] \sin q\Delta_1 + \frac{k}{k_1}\frac{\Delta_1}{\Delta}\left[1 + \frac{h_1}{k}\Delta\right] \cos q\Delta_1 = 0.$$

In unseren Versuchen war Δ_1 in runder Zahl gleich 1 cm; die Dicke Δ der Flüssigkeitslamelle betrug ca. 0,2 cm. Aus den weiter unten angeführten Beobachtungsreihen ergibt sich für h_1 0,006 und für k im Mittel für alle Flüssigkeiten etwa 0,050, falls für die Auswerthung dieser beiden Wärmeleitungsvermögen die Einheiten: Gramm, Centimeter, Minute

und 1° C. benutzt werden. Der Werth von k_1 liegt, in denselben Einheiten ausgedrückt, nach meinen und anderer Messungen für die verschiedenen Kupfersorten zwischen 45 und 66. Unter diesen Umständen darf man, ohne einen erheblichen Fehler in die Rechnung einzuführen, die vorstehende Gleichung durch die folgende einfachere ersetzen:

$$q\Delta_1 \sin q\Delta_1 = \frac{k}{k_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot \cos q\Delta_1 = 0{,}004 \cos q\Delta_1,$$

in welcher für k_1 der Mittelwerth 55 eingeführt ist.

Der erste Wurzelwerth dieser transcendenten Gleichung ist angenähert $q\Delta_1 = \frac{1}{16}$; die zweite Wurzel ist ein wenig grösser als π, die dritte etwas grösser als 2π u. s. w.

Ertheilen wir also der Grösse q der obigen einfachen Lösung die (nur angenähert berechneten) Werthe $\frac{1}{16}\frac{1}{\Delta_1}$, $\frac{\pi}{\Delta_1}$, $\frac{2\pi}{\Delta_1}$, ... [diese Wurzelwerthe sollen Kürze halber von jetzt an mit q_1, q_2, q_3, ... bezeichnet werden], so erhalten wir eine einfache Lösung der Differentialgleichung, welche zugleich auch die Bedingungsgleichung (2) erfüllt. Eine allgemeinere Lösung ist dann:

$$u = \left\{ A_1 \left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_1} \sin q_1 x \right) e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} q_1^2 t} + \right.$$

$$\left. + A_2 \left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_2} \sin q_2 x \right) e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} q_2^2 t} + \ldots \right\} I^0_{mr} e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} m^2 t}.$$

Diese allgemeinere Lösung hat nun weiter der Grenzgleichung (3) zu entsprechen. Sie entspricht dieser Gleichung, sobald die in ihr vorkommende Grösse m aus der transcendenten Gleichung bestimmt wird:

$$mR \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h_1}{k_1} R.$$

Die verschiedenen Wurzelwerthe (mR) dieser Gleichung können aus den von Hansen berechneten Tafeln der Bessel'schen Functionen I^0_{mr} und I^1_{mr} entnommen werden. Da $\frac{h_1}{k_1}$ nach den oben gemachten Angaben den Werth von

etwa $\frac{1}{9000}$ besitzt, und der Radius R der Kupferplatte 8 cm beträgt, so hat die rechte Seite der letzten Gleichung den abgerundeten Werth $\frac{1}{1100}$. Die unendlich vielen reellen Wurzelwerthe dieser Gleichung sind:

$$mR = 0{,}043;\ 3{,}84;\ 7{,}02;\ 10{,}7;\ \ldots$$

und daraus ergeben sich die folgenden unendlich vielen reellen Werthe von m, welche die Bedingungsgleichung (3) befriedigen:

$$m_1 = \frac{0{,}043}{R},\ m_2 = \frac{3{,}84}{R},\ m_3 = \frac{7{,}02}{R},\ m_4 = \frac{10{,}17}{R},\ \ldots$$

Die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (1), welche sämmtliche Grenzgleichungen (2) bis (4) erfüllt, ist demnach:

$$u = \left\{ A_1 \left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_1} \sin q_1 x \right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_1^2 t} + \right.$$

$$\left. + A_2 \left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_2} \sin q_2 x \right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_2^2 t} + \ldots \right\} \times$$

$$\left\{ B_1 I^0_{m_1 r} e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m_1^2 t} + B_2 I^0_{m_2 r} e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} \cdot m_2^2 t} + \right.$$

$$\left. + B_3 I^0_{m_3 r} e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m_3^2 t} + \ldots \right\} \ldots\ (6).$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die letzte Aufgabe zu lösen: die Constanten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ so zu bestimmen, dass der Anfangsbedingung (5):

$$u = U \text{ für } t = o \text{ und für alle } x \text{ und } r$$

Rechnung getragen wird. Die gegebene allgemeine Lösung wird dieser Anfangsbedingung genügen, sobald die Constanten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ so gewählt werden, dass:

$$(7)\quad U = A_1 \left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_1} \sin q_1 x \right) + A_2 \left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_2} \sin q_2 x \right) + \ldots$$

und

$$(8)\quad 1 = B_1 I^0_{m_1 r} + B_2 I^0_{m_2 r} + B_3 I^0_{m_3 r} + \ldots$$

ist. Die strenge Bestimmung der Constanten A in der Gleichung (7) führt auf verwickelte Rechnungen; hier möge nur

eine sehr angenäherte Lösung der Aufgabe gegeben werden. Die Grössen:

$$\frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_1}\sin q_1 x,\ \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_2}\sin q_2 x,\ \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_3}\sin q_3 x, \ldots$$

sind sehr klein gegenüber den Grössen

$$\cos q_1 x,\ \cos q_2 x,\ \cos q_3 x, \ldots\ldots$$

indem sie höchstens die Werthe $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{600}$, $\frac{1}{1380}$, ... erreichen. Mit sehr grosser Annäherung wird daher die Gleichung (7) durch die folgende ersetzt werden dürfen:

(7a) $$U = A_1 \cos q_1 x + A_2 \cos q_2 x + A_3 \cos q_3 x + \ldots$$

Für diese Gleichung lässt sich die Constantenbestimmung leicht ausführen. Wie Fourier zuerst gezeigt hat, gelten die Relationen:

$$\int_0^{\Delta_1} \cos q_n x \,.\, \cos q_m x \, dx = 0 \text{ für } n \text{ verschieden von } m$$

$$\text{und } \int_0^{\Delta_1} \cos q_n x \,.\, \cos q_n x \,.\, dx = \frac{1}{2}\left(\Delta_1 + \frac{\sin 2 q_n \Delta_1}{2 q_n}\right)$$

Demnach ist

$$\int_0^{\Delta_1} U \cos q_n x \, dx = U \frac{\sin q_n \Delta_1}{q_n} = A_n \cdot \frac{1}{2}\left(\Delta_1 + \frac{\sin 2 q_n \Delta_1}{2 q_n}\right)$$

oder

$$A_n = 2\,U \frac{\sin q_n \Delta_1}{q_n \Delta_1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin 2 q_n \Delta_1}{2 q_n \Delta_1}\right)}.$$

Zur Bestimmung der Constanten B_n der Gleichung:

$$1 = B_1 I^0_{m_1 r} + B_2 I^0_{m_2 r} + B_3 I^0_{m_3 r} + \ldots.$$

in welcher die m_1, m_2, m_3, ... die successiven Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$m R \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{k_1}{k_1} \cdot R$$

bedeuten, dienen die aus der Theorie der Bessel'schen Functionen bekannten Beziehungen:

$$\int_0^R r \cdot I^0_{m_n r} \cdot I^0_{m_i r} \cdot dr = 0 \text{ für } n \text{ verschieden von } i$$

$$\int_0^R r \cdot I^0_{m_n r} \cdot I^0_{m_n r} \cdot dr = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{k_1^2}\frac{1}{m_n^2}\right) R^2 \cdot \left(I^0_{m_n R}\right)^2.$$

Durch Anwendung dieser Relationen auf die Gleichung (8) erhalten wir:

$$\frac{R}{m_n} I^1_{m_n R} = B_n \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{k_1^2}\frac{1}{m_n^2}\right) R^2 \left(I^0_{m_n R}\right)^2$$

und daraus: $$B_n = \frac{2 I^1_{m_n R}}{\left(I^0_{m_n R}\right)^2} \cdot \frac{1}{m_n R\left(1 + \frac{k_1^2}{k_1^2 m_n^2}\right)}.$$

Zieht man die oben gegebenen Wurzelwerthe $q_1 \Delta_1$, $q_2 \Delta_1$, $q_3 \Delta_1$, ... in Betracht, so erkennt man leicht, dass der Coëfficient A_1 fast genau gleich U, die Coëfficienten A_2, A_3, A_4, ... aber von Null nur sehr wenig verschieden sind.

Aehnliches gilt von den Coëfficienten B_1, B_2, B_3, ... Durch Einführung der oben gegebenen Wurzelwerthe $m_1 R$, $m_2 R$, $m_3 R$, ... in den für B_n angegebenen Werth ersieht man, dass B_1 nahezu gleich 1 ist und B_2, B_3, B_4 ... nahezu den Nullwerth haben.

Daraus folgt, dass in der oben gegebenen allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1):

$$u = \left\{ A_1 \left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_1} \sin q_1 x\right) e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} q_1^2 t} + \right.$$

$$\left. + A_2 \left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_2} \sin q_2 x\right) e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} q_2^2 t} + \cdots \right\} \times$$

$$\times \left\{ B_1 I^0_{m_1 r} e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} m_1^2 t} + B_2 I^0_{m_2 r} e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} m_2^2 t} + B_3 I^0_{m_3 r} e^{-\frac{k_1}{c_1 c_1} m_3^2 t} + \cdots \right\}$$

alle auf das erste Glied folgenden Glieder in beiden Klammern sehr klein sind gegenüber dem ersten Gliede. Da aber die Wurzelwerthe q_1, q_2, q_3, ... nahezu in dem Verhältniss 1:20:40... und die Wurzelwerthe m_1, m_2, m_3, ...

ungefähr in dem Verhältniss 1:90:175 zunehmen, so sind diese auf das erste Glied folgenden Glieder in jeder der beiden Klammern sogar nach äusserst kurzen Zeitlängen völlig bedeutungslos gegenüber dem ersten Gliede jeder Klammer.

Die gesuchte Temperaturvertheilung in der cylindrischen Kupferplatte ist daher in jedem beliebigen Zeitmomente t (mit Ausschluss der allerersten Zeitmomente nach Beginn des Processes der Wärmeleitung) durch die folgende Form gegeben:

$$u = U\left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_1}\sin q_1 x\right) I^0_{m_1 r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}(q_1^2 + m_1^2)t}$$

oder, wenn die Werthe $q_1 = \frac{1}{16}\frac{1}{\Delta_1}$ und $m_1 = \frac{0{,}043}{R}$ und $\frac{k}{k_1}\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{230}$ eingesetzt werden:

$$u = U\left[\cos\left(\frac{1}{16}\frac{x}{\Delta_1}\right) + \frac{1}{230}\frac{\sin\left(\frac{1}{16}\frac{x}{\Delta_1}\right)}{\left(\frac{1}{16}\frac{x}{\Delta_1}\right)}\right] I^0_{\frac{0{,}043}{R}\,.\,r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}\left[\left(\frac{1}{16\Delta_1}\right)^2 + \left(\frac{0{,}043}{R}\right)^2\right]t}.$$

Diese Form des Schlussresultats lässt aber sofort erkennen, dass sich die Temperatur keines Massenpunktes der cylindrischen Kupferplatte in irgend einem Zeitmoment von dem Mittelwerthe der Temperatur der Platte um mehr als höchstens $\frac{1}{500}$ dieses Mittelwerths entfernt. Der von der Kupferplatte erfüllte Raum ist also in jedem Zeitmomente ein isothermischer; die untere Begrenzungsfläche der Kupferplatte und mithin auch die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle ist in jedem Augenblicke eine isotherme Fläche. Messen wir in irgend einem Zeitmomente die Temperatur irgend eines Massenpunktes der Kupferplatte, so erhalten wir in dieser Temperatur die in diesem Momente vorhandene Temperatur der oberen Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle.

3. Nachdem der Nachweis gegeben worden ist, dass in jedem Augenblicke die obere Kupferplatte ein isothermer Raum und die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle eine isotherme Fläche von demselben Temperaturwerthe ist, soll jetzt die Temperaturvertheilung näher betrachtet werden, die

sich in einem beliebigen Zeitmomente während des Processes der Leitung der Wärme aus der obern Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch in der letzteren herstellt. Zur Aufstellung der Differentialgleichung und der verschiedenen Grenzgleichungen, aus denen heraus diese Temperaturvertheilung ermittelt werden kann, legen wir, wie oben, ein cylindrisches Coordinatensystem zu Grunde (x, r, φ), dessen Axe mit der Axe der Flüssigkeitslamelle zusammenfällt, und dessen Nullpunkt in der untern Grenzfläche der Lamelle liegt. Nach unserer Versuchsanordnung ist auch in der Wärmeleitung innerhalb der Flüssigkeitslamelle die Wärmeströmung unabhängig von der Richtung der φ, und es hat daher die partielle Differentialgleichung, welche die Temperaturbewegung innerhalb der Lamelle ausdrückt, die Form:

$$\varrho . c . \frac{\partial u}{\partial t} = k \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \tag{1}$$

wenn ϱ und c Dichte und specifische Wärme und k die Grösse der inneren Wärmeleitungsfähigkeit der betrachteten Flüssigkeit bedeuten. Von diesen drei Grössen nehmen wir zunächst an, dass sie unabhängig von der Temperatur u sind.

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung hat fünf Grenzgleichungen zu genügen:

(2) Für $x = 0$ ist $u = 0$ für alle t,

(3) für $x = \Delta$ ist u unabhängig von r für alle t.

Eine weitere für $x = \Delta$ gültige Grenzgleichung hat die Thatsache auszudrücken, dass sich der Wärmevorrath der obern Kupferplatte auf zweifache Weise vermindert: durch innere Wärmeleitung innerhalb der Flüssigkeitslamelle gegen die untere, auf 0^0 abgekühlte Kupferplatte hin und durch äussere Wärmeleitung von der an Luft grenzenden obern Basis- und der Mantelfläche aus in die auf 0^0 abgekühlte Umgebung hinein. Die Wärmemenge, welche die Platte auf dem ersten Wege in der Zeiteinheit verliert, ist gleich $F . k . \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\Delta}$, wenn F die Grösse der Basisfläche der Platte bedeutet; machen wir die Annahme, dass die äussere Wärme-

leitungsgrösse h_1 unabhängig von der Temperatur ist, und bezeichnen wir die Summe von oberer Basisfläche und Mantelfläche der oberen Kupferplatte mit F_1, so ist die Wärmemenge, welche die obere Platte durch die äussere Wärmeleitung in derselben Zeit verliert, gleich $h_1 F_1 . u_{x=\Delta}$ zu setzen. Die Summe dieser beiden in der Zeiteinheit erfolgenden Wärmeverluste ist gleich der gesammten, während dieser Zeit erfolgenden Wärmeabnahme der obern Platte, d. h. gleich $-M_1 c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=\Delta}$, wo M_1 die Masse und c_1, wie oben, die specifische Wärme der Kupferplatte bezeichnet. Als weitere Grenzgleichung gilt also:

(4) für $x = \Delta$ ist: $-M_1 c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=\Delta} = kF\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\Delta} + h_1 F_1 u_{x=\Delta}$.

Für alle Orte der Mantelfläche der cylindrischen Flüssigkeitslamelle hat die Lösung der obigen Differentialgleichung die Bedingung zu erfüllen:

(5) für $r = R$: $k\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} + h u_{r=R} = 0$.

Endlich muss die gesuchte Lösung der Differentialgleichung auch die anfängliche, die zur Zeit $t = 0$, bestehende Temperaturvertheilung enthalten. Es möge zu Anfang durch das ganze Plattensystem dieselbe constante Temperatur U geherrscht haben. Dann lautet die letzte zu erfüllende Grenzgleichung:

(6) für $t = 0$: $u = U =$ unabhängig von x und r.

Eine einfache Lösung der Differentialgleichung (1) ist:

(7) $u = Ae^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t} \sin qx + Be^{-\frac{k}{\varrho c}(p^2+m^2)t} \sin px\, I^0_{mr}$.

Diese Lösung genügt der Grenzgleichung (2); damit sie zugleich auch die Bedingungsgleichung (3) erfülle, muss die Constante p als Wurzel der Gleichung $\sin(p\Delta) = 0$ gewählt werden, muss die Constante p also den Werth $\frac{n\pi}{\Delta}$ haben, wo n der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... bezeichnet. Der Bedingungsgleichung (5) ist genügt, sobald die Constante m als Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$mR\frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h}{k}R$$

gewählt wird. Belegen wir die unendlich vielen reellen Werthe von m, welche dieser Gleichung entsprechen, der Reihe nach mit den Zeichen m_1, m_2, m_3 ..., so können wir als allgemeinere Lösung der obigen Differentialgleichung, welche dreien der obigen fünf Grenzgleichungen genügt, die folgende Form nehmen:

$$(8)\quad \begin{cases} u = Ae^{-\frac{k}{\varrho c}q^2 t}\sin qx + \left\{B_1 \sin\left(\frac{\pi}{\Delta}x\right)e^{-\frac{k}{\varrho c}\frac{\pi^2}{\Delta^2}t} + B_2\sin\left(\frac{2\pi}{\Delta}x\right)e^{-\frac{k}{\varrho c}\frac{4\pi^2}{\Delta^2}t}\right. \\ \qquad \left. + B_3\sin\left(\frac{3\pi}{\Delta}x\right)e^{-\frac{k}{\varrho c}\frac{9\pi^2}{\Delta^2}t} + \cdots\right\}\times \\ \left\{C_1 I^0_{m_1 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c}m_1^2 t} + C_2 I^0_{m_2 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c}m_2^2 t} + C_3 I^0_{m_3 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c}m_3^2 t} + \cdots\right\}. \end{cases}$$

In diesem Ausdrucke wären nun noch die Constanten A und q, die B_n und die C_n so zu bestimmen, dass den beiden Grenzgleichungen (4) und (6) Genüge geleistet wird. Diese Bestimmung mit aller Strenge durchzuführen, ist mir nicht gelungen. Ich habe diese Schwierigkeit in folgender Weise, unbeschadet der Genauigkeit der Berechnung der auszuführenden Versuche, zu umgehen vermocht. Die zuletzt angegebene Lösung für u lässt ersehen, dass durch passende Wahl der Dicke Δ der Flüssigkeitslamelle die Grösse $\frac{k}{\varrho c}\frac{n^2}{\Delta^2}\pi^2$ so gross gemacht werden kann, dass schon nach Ablauf einiger Secunden seit Anfang des Processes der Wärmeleitung jedes Glied innerhalb der ersten Klammer einen verschwindend kleinen Werth annimmt. In den weiter unten mitgetheilten Versuchen war Δ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ cm; die Grösse $\frac{k}{\varrho c}$ ergab sich für alle untersuchten Flüssigkeiten als nahezu constant und zwar nahezu gleich 0,070 (unter Zugrundelegung der oben genannten Einheiten der Länge und der Zeit). Es war also für alle untersuchten Flüssigkeiten $\frac{k}{\varrho c}\frac{\pi^2}{\Delta^2}n^2 = 17{,}5\,n^2$. Unter diesen Umständen hatte jedes der

innerhalb der ersten der obigen beiden Klammern stehenden Glieder schon nach Ablauf weniger Secunden einen ausserordentlich geringen Werth. Von dieser Zeit an ist die Temperaturvertheilung in der Lamelle unabhängig von r; die isothermen Flächen laufen dann den ebenen Grenzflächen der Lamelle parallel, und der Ausdruck der Temperaturvertheilung reducirt sich auf das erste Glied der zuletzt angegebenen Lösung:

$$u = A e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t} \sin qx.$$

Zur Bestimmung der Constante q dient nun die Grenzgleichung (4):

$$-M_1 c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=\Delta} = kF \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\Delta} + h_1 F_1 u_{x=\Delta}.$$

Der vorstehende Ausdruck für u erfüllt diese Grenzgleichung, falls für die Constante q eine der Wurzeln der Gleichung:

$$M_1 c_1 \cdot \frac{k}{\varrho c} \cdot q^2 \cdot \sin(q\Delta) = kFq \cos(q\Delta) + h_1 F_1 \sin(q\Delta),$$

d. h. der Gleichung:

$$q\Delta \operatorname{tg} q\Delta = \frac{F\Delta\varrho c}{M_1 c_1 \left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c \Delta^2}{k M_1 c_1} \cdot \frac{1}{(q\Delta)^2}\right)} \cdots\cdots\cdots$$

gesetzt wird. Auf die Berechnung der unendlich vielen Wurzeln q dieser Gleichung, sie mögen mit $q_1, q_2, q_3 \ldots$ bezeichnet werden, soll hier nicht näher eingegangen werden; wir werden weiter unten darauf zurückkommen. Einstweilen brauchen wir nur zu wissen, dass q_1 im ersten, q_2 im dritten, q_3 im fünften Quadranten u. s. w. liegt. Wird irgend eine dieser Wurzeln für q in die Form:

$$A \sin qx e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t}$$

eingesetzt, so resultirt eine singuläre Lösung unserer Aufgabe. Die allgemeine Lösung hat also die Form:

$$(9) \quad \begin{cases} u = A_1 \sin q_1 x e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} + A_2 \sin q_2 x e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^2 t} + \\ \qquad + A_3 \sin q_3 x e^{-\frac{k}{\varrho c} q_3^2 t} + \cdots\cdots \end{cases}$$

In dieser allgemeinen Lösung wären nun noch die Con-

stanten A_1, A_2, A_3, ... so zu bestimmen, dass der Anfangsbedingung:

$$u = U \text{ für } t = 0 \text{ und für alle } x$$

Rechnung getragen wird. Es wären also die Werthe für A_1, A_2, A_3, ... zu ermitteln, welche die Gleichung:

$$u_0 = A_1 \sin q_1 x + A_2 \sin q_2 x + A_3 \sin q_3 x + \ldots\ldots$$

richtig machen. Die Berechnung dieser Constanten mag indess hier unausgeführt bleiben, da für die auszuführenden Versuche die numerischen Werthe dieser Constanten gar nicht bekannt zu sein brauchen.

Die Quadrate der Wurzelwerthe q_1, q_2, q_3, ... nehmen mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse zu; in den später zu besprechenden Versuchen über die Wärmeleitung des Wassers war z. B.:

$$q_1^2 = 4{,}778,\ q_2^2 = 194{,}88,\ q_3^2 = 751{,}31.$$

Die Werthe der einzelnen singulären Lösungen in dem allgemeinen Ausdrucke (9) nehmen demnach mit grösser werdender Indexzahl ausserordentlich rasch ab, und um so rascher, je länger der Zeitraum t ist, der seit Beginn des Processes der Wärmeleitung abgelaufen ist. Nach Ablauf einer gewissen Zeit kann also schon das zweite Glied des Ausdruckes (9) neben dem ersten vernachlässigt werden. Diese Zeitlänge war wegen der sehr klein gewählten Dicke Δ der Flüssigkeitslamelle in allen ausgeführten Beobachtungsreihen eine ausserordentlich kurze. In der Untersuchung der Wärmeleitung des Wassers war z. B. schon nach Ablauf von 30 Secunden seit Beginn der Wärmeleitung der Werth des Exponentialfactors des zweiten Gliedes des obigen Ausdrucks auf die kleine Grösse $\frac{1}{1050}$ herabgesunken. Und selbst für die schlechtesten der untersuchten flüssigen Wärmeleiter trat das nämliche schon nach Verlauf von circa 60 Secunden ein.

Es ergibt sich also: Wird von dem Vorgange der Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle während der ersten 60 Secunden abgesehen — diese Zeitlänge möge mit T bezeichnet werden — und wird nur der Verlauf der Temperaturbewegung in den auf die ersten 60 Secunden folgenden Zeitmomenten in Betracht gezogen, so ist der exacte

Ausdruck derjenigen Temperaturvertheilung, die in irgend einem Zeitmomente, der um t Zeiteinheiten später als der Endpunkt von T eintritt, in der Flüssigkeitslamelle stattfindet, der folgende:

$$u = A_1 e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^1 T} \sin q_1 x \,.\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^1 t} = U_1 \,.\, \sin q_1 x \,.\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^1 t}.$$

Die benutzte Beobachtungsmethode gestattet nur die Messung der Temperatur der oberen Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle (die Messung der Temperatur der oberen Kupferplatte); der zeitliche Verlauf dieser Temperatur ist durch den Ausdruck gegeben:

$$u_{x=\Delta} = u' = U_1 \sin q_1 \Delta \,.\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^1 t} = U'_1 \,.\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^1 \,.\, t}.$$

Aus dem gemessenen zeitlichen Verlaufe dieser Temperatur kann sodann das Wärmeleitungsvermögen k ermittelt werden, sobald die Grössen ϱ und c, sowie die Constante q_1 bekannt sind. Sind für eine Reihe von (etwa gleichweit von einander abstehenden) Zeitmomenten t_0, t_1, t_2, t_3, ... die Temperaturen der oberen Kupferplatte gleich u'_0, u'_1, u'_2, u'_3, .. gefunden worden, so ist das Wärmeleitungsvermögen k aus diesem System beobachteter Grössen durch folgende Formel ableitbar:

$$k = \frac{1}{t_{i+n} - t_i} \cdot \frac{1}{q_1^2} \cdot \varrho c \,.\, \lg \left(\frac{u'_i}{u'_{i+n}} \right).$$

4. Die kleine Dicke Δ der benutzten Flüssigkeitslamellen hat zur Folge, dass trotz der verhältnissmässig geringen Wärmeleitungsfähigkeit aller Flüssigkeiten die Temperatur der obern Kupferplatte so rasch abfällt, dass sie schon in einigen Minuten von ihrem anfänglichen Werthe (Zimmertemperatur) auf nahezu Null Grad herabsinkt. Zur Messung des zeitlichen Verlaufes dieser Temperatur muss daher ein Verfahren benutzt werden, das im Stande ist, richtige Momentanwerthe dieser Temperatur liefern zu können. Dieses leistet eine thermoelectrische Bestimmung der Temperatur der obern Kupferplatte.

In der Gegend der Mitte der obern Basisfläche dieser

Kupferplatte wurden zwei sehr dünne Drähte zweier verschiedener Metalle eingelöthet. Die andere Löthstelle dieser Drähte wurde dauernd in Eis auf 0^0 erhalten. Diese Thermoelemente waren aus solchen Metallen gebildet, dass innerhalb der nur um wenige Grade voneinander abstehenden Temperaturen der beiden Löthstellen die erregten thermoelectromotorischen Kräfte den wirkenden Temperaturdifferenzen der Löthstellen bis auf verschwindend kleine Abweichungen proportional waren. In dem Zeitmomente, den wir oben als Moment T bezeichnet haben, wurde das Thermoelement in den Kreis eines aperiodisch gestellten Galvanometers eingeschaltet und nach Verlauf von weiteren 20 Secunden wurde der Stand des Galvanometermagnets mit Hülfe von Fernrohr, Spiegel und Scala bei gut wärmeleitenden Flüssigkeiten von 10 zu 10 Secunden, bei schlechter leitenden von 15 zu 15 Secunden abgelesen. Es lässt sich leicht einsehen, dass die in den einzelnen Zeitmomenten abgelesenen Abweichungen des Galvanometermagnets von seiner Ruhelage ein genaues relatives Maass der Temperaturen geben, welche die obere Kupferplatte, mithin auch die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle in diesen Zeitmomenten besitzt.

Der Galvanometermagnet möge sich zu Anfang im Ruhezustande befunden haben. Im Zeitmomente T werde das Galvanometer plötzlich in den thermoelectrischen Kreis eingeschaltet und dauernd darin gelassen. Um den Ausschlag zu erhalten, welchen der Galvanometermagnet nach Verlauf der Zeitlänge t seit dem Momente der Schliessung zeigt, gehen wir von der allgemeinen Gleichung aus, welche die Bewegung des durch den thermoelectrischen Strom abgelenkten Magnets bestimmt. Zur Zeit t ist die Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen des Thermoelements:

$$u' = U'_1 \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t};$$

die in diesem Zeitmomente wirksame thermoelectromotorische Kraft ist dann nach der oben gemachten Bemerkung:

$$E = \alpha \cdot U' \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 \cdot t}.$$

Nennen wir W die Summe aller Widerstände des thermoelectrischen Kreises, so ist die Intensität des zur Zeit t erzeugten thermoelectrischen Stromes:

$$i = \alpha \frac{U'}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 \cdot t};$$

das Drehungsmoment, welches dieser Strom auf den Galvanometermagnet ausübt, ist [sobald die Ablenkung einige Grade nicht übersteigt]:

$$M \cdot G \cdot \frac{\alpha U^1}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t};$$

wo M das Moment des Magnets und G die Constante des Galvanometers bezeichnet. Wird das Trägheitsmoment des Magnets Q, die Grösse des Dämpfungsmomentes für die Einheit der Winkelgeschwindigkeit D, die horizontale Componente der wirksamen magnetischen Richtkraft H und die Grösse des zur Zeit t vorhandenen Ausschlages des Magnets x genannt, so ist die allgemeine Bewegungsgleichung des Galvanometermagnets:

$$Q\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + MHx - MG \cdot \frac{\alpha U'}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} = 0,$$

$$\text{oder } \frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx - Ce^{-gt} = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{D}{Q} \quad \Big| \quad B = \frac{MH}{Q} \quad \Big| \quad C = \frac{MG\,\alpha\,U'}{Q \cdot W} \quad \Big| \quad g = \frac{k}{\varrho c} q_1^2$$

gesetzt wird. Das allgemeine Integral dieser Bewegungsgleichung hat die Form:

$$x = P_1 e^{-\lambda_1 t} + P_2 e^{-\lambda_2 t} + Ne^{-gt},$$

wo λ_1 und λ_2 die (reellen) Grössen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} \\ \lambda_2 &= \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} \end{aligned}\right\} \text{ bezeichnen, } N \text{ den Werth } \frac{C}{g^2 - Ag + B}$$

darstellt, und wo P_1 und P_2 Constante sind, welche durch den Anfangszustand des Magnets bestimmt werden müssen.

Zur Zeit $t = 0$ war der Ausschlag des Magnets Null, seine Winkelgeschwindigkeit hatte aber einen von Null verschiedenen Werth, etwa den Werth γ_0. Die beiden Constanten P_1 und P_2 sind also durch die Gleichungen bestimmt:

$$0 = P_1 + P_2 + N$$
$$-\gamma_0 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + gN,$$

und der Ausschlag des Galvanometers zur Zeit t ist:

$$x = \left(-\frac{\gamma_0}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{N(g-\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{-\lambda_1 t} +$$
$$+ \left(\frac{\gamma_0}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{N(g-\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{-\lambda_2 t} + Ne^{-gt}.$$

Die Werthe λ_1 und λ_2 wurden in bekannter Weise möglichst gross gegenüber g gemacht; in allen den ausgeführten Versuchsreihen waren λ_1 und λ_2 gegen 160 bis 290 mal so gross als g. Infolge davon waren schon wenige Secunden nach der Schliessung des thermoelectrischen Stromes die beiden ersten Glieder des vorstehenden Ausdruckes völlig bedeutungslos gegenüber dem letzten Gliede; der Ausschlag des Galvanometermagnets war also (abgesehen von den ersten Secunden nach der Schliessung) in jedem Zeitmomente t durch die Form gegeben:

$$x = Ne^{-gt} = \frac{MG \cdot \alpha \cdot U'_1}{Q \cdot W} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{\varrho c} q_1^2\right)^2 - A\frac{k}{\varrho c} q_1^2 + B} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t}.$$

Die Ablenkung des Galvanometermagnets ist also unter diesen Umständen in jedem Zeitmomente der Temperatur proportional, die in diesem Zeitmomente in der obern Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle vorhanden ist. Aus den Galvanometerausschlägen x_0, x_1, x_2, ..., die in den Zeitmomenten t_0, t_1, t_2, ... auftreten, lässt sich daher die Wärmeleitung der untersuchten Flüssigkeit nach der Formel berechnen:

$$k = \frac{\varrho \cdot c}{q_1^2} \frac{1}{t_{n+i} - t_i} \lg\left(\frac{x_i}{x_{n+i}}\right).$$

Die Grösse q_1 der rechten Seite dieser Gleichung ist die kleinste Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$q\Delta \operatorname{tg} q\Delta = \frac{F\Delta\varrho c}{M_1 c_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c \Delta^2}{k M_1 c_1} \frac{1}{(q\Delta)^2}\right)},$$

deren rechte Seite durch die Ersetzung der Masse M_1 durch das Product $\Delta_1 F \varrho_1$ in die mehr symmetrische Form gebracht werden kann:

$$q\Delta \operatorname{tg} q\Delta = \frac{\Delta\varrho c}{\Delta_1 \varrho_1 c_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c \Delta^2}{k F \varrho_1 c_1 \Delta_1} \frac{1}{(q\Delta)^2}\right)}.$$

Da das nur mit Hülfe der bekannten Wurzelwerthe q_n ermittelbare Wärmeleitungsvermögen k in diese Gleichung eingeht, ist eine exacte, ganz allgemeine Bestimmung dieser Wurzelwerthe unmöglich. Indess lässt sich sofort übersehen, dass sich diese Wurzeln q_n bei passender Gestaltung der Versuchsmethode durch ein Annäherungsverfahren mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen lassen. Da die Grösse h_1 durch ein sogleich zu besprechendes Verfahren gleich 0,0057 und der Werth von k für die untersuchten Flüssigkeiten gleich 0,02 bis 0,08 gefunden wurde, da ferner die Lamellendicke Δ nur den kleinen Werth von 0,23 cm, Δ_1 dagegen die beträchtliche Grösse 1,02 cm besass, und die Flächengrössen F und F_1 wegen der Plattengestalt nur wenig voneinander verschieden sind, war in den ausgeführten Versuchen der Factor $\frac{h_1 F_1 c \Delta^2}{k F \varrho_1 c_1 \Delta_1}$ nur eine sehr kleine Grösse; in den Versuchen über die Wärmeleitung des Wassers betrug er z. B. nur 0,0063. Der erhebliche Grössenwerth des Factors $\frac{\Delta\varrho c}{\Delta_1 \varrho_1 c_1}$ lässt die kleinste Wurzel $q\Delta$ nie sehr klein ausfallen; für Wasser war z. B. der kleinste Wurzelwerth $(q\Delta)_1$ gleich 0,5. Zur Bestimmung des kleinsten Wurzelwerthes $(q\Delta)_1$ der obigen transcendenten Gleichung kann man also in erster, ziemlich grosser Annäherung von dem Gliede $\frac{h_1 F_1 \varrho c \Delta^2}{k F \varrho_1 c_1 \Delta_1} \cdot \frac{1}{(q\Delta)^2}$ absehen. Man berechnet die erste Wurzel der Gleichung:

$$q\Delta \operatorname{tg} q\Delta = \frac{\Delta\varrho c}{\Delta_1 \varrho_1 c_1},$$

ermittelt daraus die Grösse q_1^2, sucht mit Hülfe derselben aus den gemachten Temperaturbeobachtungen den (bis auf

einige Procente angenähert richtigen) Grössenwerth des Wärmeleitungsvermögens k, setzt diesen angenäherten Werth von k in die unverkürzte transcendente Gleichung ein und leitet jetzt den exacteren Werth von q_1 und daraus den richtigen Werth von k ab.

5. Zur genauen Berechnung des Wärmeleitungsvermögens k aus den angestellten Beobachtungen ist zunächst die Kenntniss der Grösse des äussern Wärmeleitungsvermögens h_1 der obern Kupferplatte erforderlich. Diese Grösse wurde wiederholt durch besondere Versuchsreihen ermittelt. Die Kupferplatte mit dem eingelötheten Thermoelemente wurde an zwei dünnen Fäden in derselben auf 0° abgekühlten Hülle aufgehangen, in welcher die Wärmeleitung der Flüssigkeiten vor sich ging. Ist die Temperatur der Kupfermasse M_1 in dem Momente t gleich u, und besitzt die Kupferplatte die gesammte Oberfläche O, so besteht in dem Zeitmomente t folgender Differentialzusammenhang zwischen u und t:

$$-M_1 c_1 du = h_1 O.u.dt,$$

woraus sich der folgende Integralzusammenhang ergibt:

$$\lg\left(\frac{u_0}{u}\right) = \frac{h_1 O}{M_1 c_1} \cdot t,$$

sobald mit u_0 die zur Zeit $t=0$ vorhandene Temperatur bezeichnet und gleichzeitig die (sehr angenähert richtige) Annahme getroffen wird, dass die Grösse h_1 innerhalb des engen Temperaturintervalles der Abkühlung constant ist. Zur Bestimmung des Temperaturquotienten $\frac{u_0}{u}$ wurde die andere Löthstelle des Thermoelements dauernd auf 0° abgekühlt und das Thermoelement dauernd in den Kreis eines aperiodisch gestellten Galvanometers eingeschaltet. Da nach der oben geführten Rechnung die Temperaturen u_0 und u den in denselben Zeitmomenten stattfindenden Ausschlägen x_0, x der Galvanometernadel proportional sind, so lässt sich an die Stelle der letzten Gleichung auch die folgende setzen:

$$\lg\left(\frac{x_0}{x}\right) = \frac{h_1 . O}{M_1 c_1} \cdot t,$$

In den ausgeführten Versuchsreihen überliess man die Kupferplatte der Abkühlung von Zimmertemperatur an ca.

60—80 Minuten hindurch und notirte von zwölfter Minute zu zwölfter Minute die vorhandene Ablenkung der Galvanometernadel. Um etwa eintretende Aenderungen der Ruhelage eliminiren zu können, wurde von funfzehn zu funfzehn Minuten diese Ruhelage von neuem bestimmt.

Die folgende Tabelle gibt die Resultate der ersten zur Bestimmung von h_1 ausgeführten Versuchsreihe. In der ersten Spalte stehen die Zeitmomente der Ablesungen; die zweite Spalte gibt die auf Bögen reducirten Ablenkungen des Galvanometermagnets in Einheiten der benutzten Millimeterscala; die dritte Spalte enthält die den Ablenkungen entsprechenden Temperaturen der Kupferplatte; die vierte Spalte liefert die gewöhnlichen Logarithmen der Ablenkungen, und die letzte Spalte gibt die Differenzen dieser aufeinander folgenden Logarithmen.

3h 6′	392,5 mm	23,03°	2,59384	
18′	326,4 „	19,20°	2,51375	0,08009
30′	271,7 „	15,99°	2,43409	0,07966
42′	227,1 „	13,36°	2,35622	0,07787
54′	190,0 „	11,18°	2,27875	0,07747
66′	158,3 „	9,31°	2,19948	0,07927
78′	132,7 „	7,80°	2,12287	0,07661

Hieraus ergibt sich im Mittel für die Differenz der natürlichen Logarithmen je zweier um 1 Minute auseinander liegender Temperaturen:

$$\frac{h_1 O}{M_1 c_1} = 0{,}01504.$$

Zwei andere, später ausgeführte Versuchsreihen ergaben für dieselbe Grösse die Mittelwerthe 0,01518 und 0,01515. Aus dem allgemeinen Mittelwerthe 0,01512 und den weiteren Daten: $O = 456{,}43$ qcm., $M_1 = 1851{,}2$ g und $c_1 = 0{,}0932$ resultirt für das äussere Wärmeleitungsvermögen der Kupferplatte der Werth:

$$h_1 = 0{,}00570,$$

welchem Werthe Gramm, Centimeter, Minute und 1° C. als Einheiten zu Grunde liegen.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

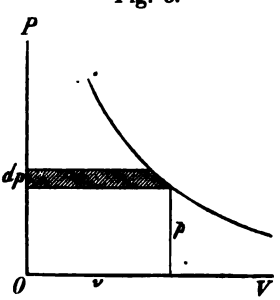
VIII. *Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper; von A. Ritter in Aachen.*

Siebente Abtheilung.

§ 27. Einfluss der Condensirbarkeit der Gase auf die Höhe einer aus denselben gebildeten Atmosphäre.

Nach § 2 und § 16[1]) kann man das Gesetz, nach welchem der atmosphärische Druck mit der Höhe über der Erdoberfläche sich ändert (indem man wieder $z = H - x$ setzt) darstellen durch die Differentialgleichung:

Fig. 3.



$$(246) \qquad dp = \gamma\, dx \quad \text{oder} \quad dx = v\, dp,$$

welche in der letzteren Form zeigt, dass die Grösse dx mittelst des in Fig. 3 schraffirten Flächenstreifens geometrisch dargestellt werden kann. Die ganze Atmosphärenhöhe:

$$(247) \qquad H = \int_0^{p_0} v\, dp = F$$

entspricht demnach der in Fig. 4 schraffirten Fläche, deren Inhalt F berechnet werden kann, sobald die Zustandslinie gegeben ist, d. h. sobald das Gesetz bekannt ist, nach welchem der Druck p als Function von v mit letzterer Grösse sich ändert.

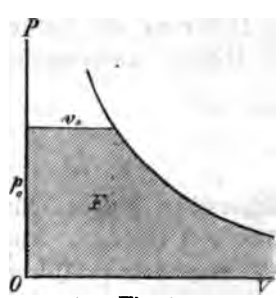


Fig. 4.

Für eine Atmosphäre von constanter Dichtigkeit würde man $v = v_0$ zu setzen haben und die Gleichung erhalten:

$$(248) \qquad H = v_0 \int_0^{p_0} dp = p_0 v_0 = R T_0,$$

welche zeigt, dass in diesem Falle die Höhe der Atmosphäre durch die in Fig. 5 schraffirte Rechteckfläche geometrisch dargestellt werden kann. Die Isotherme, als gleich-

1) s. Wied. Ann. **5.** p. 405 u. flgde. 1878.

seitige Hyperbel, bildet den geometrischen Ort für die dem Punkte *O* gegenüberliegenden Eckpunkte aller Rechtecke von gleichem Flächeninhalte. Folglich hat z. B. das in Fig. 5 punktirte Rechteck denselben Flächeninhalt wie das schraffirte Rechteck. Der in § 2 gefundene Satz, nach welchem die Atmosphärenhöhe nur von dem Producte $p_0 v_0$, d. h. von der Temperatur der untersten Schicht, abhängt, gilt daher auch für eine Atmosphäre von constanter Dichtigkeit.

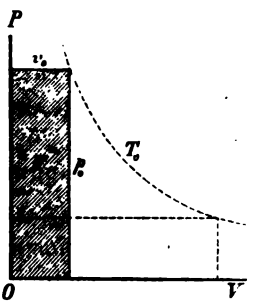


Fig. 5.

Der letzterwähnte Satz gilt überhaupt immer dann, wenn die Zustandslinie sich darstellen lässt durch eine Gleichung von der Form:

$$p v^k = p_0 v_0^k, \tag{249}$$

in welcher der Exponent k eine beliebige, zwischen den Grenzen $+1$ und $+\infty$ liegende constante Zahl bedeuten kann. Denn nach Substitution des hieraus für v zu entnehmenden Werthes erhält man aus Gleichung (247) für die Atmosphärenhöhe $H = F$ den folgenden Ausdruck:

$$H = p_0^{\frac{1}{k}} v_0 \int_0^{p_0} p^{-\frac{1}{k}} dp, \quad \text{oder:} \tag{250}$$

$$H = \frac{k p_0 v_0}{k-1} = \frac{k R T_0}{k-1} = F. \tag{251}$$

Wenn man hierin dem Buchstaben k wieder die frühere Bedeutung $k = \frac{c_p}{c_v}$ beilegt, so kann nach der mechanischen Wärmetheorie:

$$\frac{A k R}{k-1} = c_p \tag{252}$$

gesetzt werden. Der Werth $k = \frac{c_p}{c_v}$ entspricht dem Falle der adiabatischen Zustandslinie, und für diesen Fall erhält man wieder die schon in § 2 gefundene Gleichung:

$$H = \frac{c_p T_0}{A} = F. \tag{253}$$

Da jedoch die in den Gleichungen (250) und (251) angedeutete Berechnung der Grösse $H = F$ ganz unabhängig von der dem Buchstaben k beigelegten Bedeutung ausgeführt werden konnte, so behalten die obigen Gleichungen auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn für k irgend ein anderer zwischen den Grenzen $+1$ und $+\infty$ liegender constanter Zahlenwerth eingesetzt wird, in welchem Falle natürlich auch der in Gleichung (252) mit c_p bezeichnete Ausdruck eine andere Bedeutung annimmt.

Der Werth $k = 1$ würde dem Falle der isothermischen Zustandslinie entsprechen; für diesen Fall wird $H = \infty$ und auch $c_p = \infty$. Der Werth $k = \infty$ entspricht dem Falle der isoplerischen Zustandslinie; für diesen Fall erhält man wie oben den Werth $H = p_0 v_0$, und nach Gleichung (252) wird in diesem Falle $c_p = AR$. Wenn man ein anderes mal $k = 2$ und dem entsprechend $c_p = 2AR$ setzt, so wird $H = 2p_0 v_0 = 2RT_0$. Da für trockene atmosphärische Luft $R = 29{,}27$ zu setzen ist, so könnte man im letzteren Falle die Atmosphärenhöhe auch wieder nach der (schon in § 2 gefundenen) Gleichung (253) berechnen, indem man die Zustandslinie als eine adiabatische Curve ansieht, zugleich aber für die specifische Wärme der Luft bei constantem Drucke statt des wirklichen Werthes $c_p = 0{,}2375$ den kleinern Werth: $c_p = 2AR = 0{,}138$ in Rechnung bringt.

Mittelst der in Fig. 3 und Fig. 4 angedeuteten graphischen Methode würde man auch für ein beliebiges anderes Gas die Atmosphärenhöhe ermitteln können, sobald die Zustandslinie gegeben ist. Wenn die Form der Adiabate des gesättigten Wasserdampfes (insbesondere für niedrige Temperaturen) genauer bekannt wäre, so würde man die Höhe der gesättigten adiabatischen Wasserdampfatmosphäre durch Berechnung des Flächeninhaltes der von dieser Adiabate begrenzten Fläche bestimmen können; und wenn man statt der Adiabate die in Fig. 6 punktirte Grenzcurve des gesättigten Dampfes als obere Begrenzungslinie der schraffirten Fläche wählte, so würde man auf gleiche Weise die (grössere) Höhe der klaren, d. h. von Condensationsproduc-

ten befreiten, gesättigten Wasserdampfatmosphäre bestimmen können.

Da der adiabatische Zustand nicht als Gleichgewichtszustand gelten kann, insofern die Condensationsproducte vermöge ihres grössern specifischen Gewichtes unmittelbar nach ihrer Entstehung zu Boden sinken müssten, so würde dem für die Höhe der adiabatischen gesättigten Wasserdampfatmosphäre auf solche Weise gefundenen Werthe nur die Bedeutung eines untern Grenzwerthes für die wirkliche Höhe der gesättigten Wasserdampfatmosphäre beizulegen sein. Der adiabatische Zustand einer verticalen Säule gesättigten Dampfes würde nur dann als Gleichgewichtszustand fortbestehen können, wenn die einzelnen Horizontalschichten der Säule durch gewichtlose, unendlich dünne Horizontalplatten getrennt wären. Mit dem Hinwegnehmen dieser Platten würde eine Störung des Gleichgewichtes eintreten. Um bei unverändert bleibender Temperatur der untersten Schicht den Gleichgewichtszustand wieder herzustellen, müsste der ganzen Masse gerade so viel Wärme zugeführt werden, als zur Verdampfung sämmtlicher Condensationsproducte erforderlich sein würde.

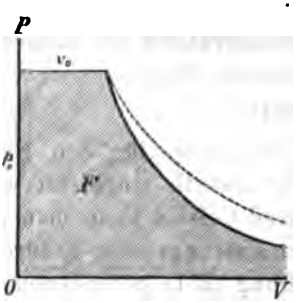


Fig. 6.

Der auf solche Weise herbeigeführte Gleichgewichtszustand der klaren gesättigten Dampfsäule würde jedoch nicht eigentlich als ein auf längere Dauer sich erhaltender Beharrungszustand gelten können, insofern jede Mischung der unteren mit den höher liegenden Schichten, wie sie nicht nur durch Verticalströmungen, sondern (nach der kinetischen Gastheorie) höchst wahrscheinlich auch durch die natürlichen Molecularbewegungen bedingt wird, auf Wiederherbeiführung des adiabatischen Zustandes hinwirken würde. Man darf daher annehmen, dass die sich selbst überlassene Atmosphäre gesättigten Wasserdampfes in Wirklichkeit einen zwischen jenen zwei Grenzzuständen liegenden eigenthümlichen Zwischenzustand annehmen wird, welcher sich durch ein an allen

Orten gleichzeitig stattfindendes fortwährendes Entstehen und Wiederverschwinden von Condensationsproducten charakterisirt.

So weit die Form der Adiabate des gesättigten Wasserdampfes bereits bekannt ist, kann dieselbe für kurze Strecken annäherungsweise dargestellt werden durch eine Gleichung von der Form:

$$p v^k = \text{Const.}, \tag{254}$$

wenn darin für den Exponenten k ein passend gewählter Mittelwerth eingesetzt wird. Für Temperaturen unter Null Grad Celsius kann man den für k einzusetzenden Mittelwerth annäherungsweise dadurch bestimmen, dass man den in Gleichung (251) gefundenen Werth von H demjenigen Werthe gleichsetzt, welcher in § 3 aus den Gesetzen der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet wurde. Man erhält dann die Gleichung:

$$\frac{k p_0 v_0}{k-1} = \frac{L_0 + \zeta T_0}{A}. \tag{255}$$

Für $T_0 = 273$ ist $p_0 = 62{,}5$ und $v_0 = 205{,}3$ zu setzen (entsprechend dem Werthe der Constanten $R = \frac{p_0 v_0}{T_0} = 47$). Die Verdampfungswärme des Eises hat bei dieser Temperatur die Grösse $L_0 = 606{,}5 + 80$. Wenn also für die Grösse ζ, als mittlere specifische Wärme des Eises zwischen den Temperaturgrenzen $T = 0$ und $T = 273$ der Annäherungswerth $\zeta = 0{,}5$ gesetzt wird, so ergibt sich aus obiger Gleichung der Werth $k = 1{,}038$. Diesem Werthe von k würde nach Gleichung (252) der Werth $c_p = 3{,}015$ entsprechen. So weit es sich lediglich um die Ermittelung eines unteren Grenzwerthes für die Atmosphärenhöhe bei niedrigen Temperaturen handelt, kann man sich hiernach das Verhalten des gesättigten Wasserdampfes annäherungsweise veranschaulichen, indem man sich denselben durch ein ideales Gas ersetzt denkt, von solcher Beschaffenheit, dass für die Constanten desselben die Werthe:

$$R = 47, \qquad k = 1{,}038, \qquad c_p = 3{,}015$$

anzunehmen sein würden. Wenn zwar den numerischen Ergebnissen einer solchen Betrachtungsweise nur die Bedeu-

tung von vorläufigen Annäherungswerthen beizulegen sein wird, so berechtigt die obige Untersuchung doch jedenfalls zu dem Schlusse, dass die Eigenschaft der Condensirbarkeit eines Gases hinsichtlich der Höhe einer aus demselben bestehenden Atmosphäre einen ähnlichen Einfluss hat, wie bei einem idealen Gase eine sehr beträchtliche Vergrösserung seiner specifischen Wärme.

Nach Regnault's Beobachtungen ist für gasförmigen Wasserdampf die Grösse $c_p < 0{,}5$. Die Eigenschaft der Condensirbarkeit hat also bei dem Wasserdampfe unter den oben vorausgesetzten Umständen denselben Einfluss, welchen bei einem idealen Gase eine Vergrösserung der specifischen Wärme auf mehr als das Sechsfache haben würde. Man darf annehmen, dass bei den sogenannten permanenten Gasen die erst vor kurzem experimentell nachgewiesene Eigenschaft der Condensirbarkeit in ähnlicher Weise ihren Einfluss geltend machen wird, und dass die wirkliche Höhe einer aus solchen Gasen bestehenden Atmosphäre stets beträchtlich grösser sich ergeben wird als die aus der Voraussetzung des idealen Gaszustandes berechnete Höhe. Diese Annahme stützt sich auf die Erfahrung, insofern die wirkliche Höhe der Erdatmosphäre erfahrungsmässig beträchtlich grösser ist als diejenige Höhe, welche in § 2 und § 4 aus der Voraussetzung des idealen Gaszustandes der Gase Sauerstoff und Stickstoff berechnet wurde.

§ 28. Grenzbedingungen für die Möglichkeit des Vorhandenseins einer Atmosphäre.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen können zur Berechnung der Höhe, welche die Erdatmosphäre unter gewissen gegebenen Umständen annehmen würde, benutzt werden, so lange als die Atmosphärenhöhe H im Verhältniss zum Erdhalbmesser r sehr klein vorausgesetzt werden darf. Bei grösserer Atmosphärenhöhe würde auf die Veränderlichkeit der mit wachsendem Abstande vom Erdmittelpunkte abnehmenden Intensität der Schwerkraft Rücksicht genommen werden müssen, und für diesen Fall würde man der Gleichung (246) die folgende Form zu geben haben:

$$dp = -\gamma \frac{r^2}{\varrho^2} d\varrho. \tag{256}$$

Hierin bedeutet p den atmosphärischen Druck im Abstande ϱ vom Erdmittelpunkte, und γ das Gewicht, welches die Masse eines an jener Stelle der Atmosphäre befindlichen Cubikmeters Luft an der Erdoberfläche besitzen würde. Man kann daher wieder $\gamma v = 1$ setzen, und wenn man ausserdem mit Benutzung der in den Figuren des vorigen Paragraphen angewendeten Bezeichnungsweise $v\,dp = -dF$ setzt, so erhält man die Gleichungen:

$$dF = r^2 \frac{d\varrho}{\varrho^2}, \tag{257}$$

$$F = r^2 \int_r^{r+H} \frac{d\varrho}{\varrho^2}, \tag{258}$$

$$F = r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+H} \right). \tag{259}$$

aus welcher letzteren für die Atmosphärenhöhe der folgende Werth sich ergibt:

$$H = \frac{F}{1 - \frac{F}{r}}. \tag{260}$$

Diese Gleichung gilt für die isolirt im Raume schwebend gedachte Erdkugel unter der Voraussetzung, dass dieselbe keine Drehbewegung besitzt. Ausserdem ist die Gültigkeit der Gleichung an die Bedingung geknüpft, dass die Masse der Atmosphäre sehr klein ist im Verhältniss zur Erdmasse, weil nur in diesem Falle die von der Atmosphäre selbst ausgeübte Gravitationswirkung gegen die von der Erdmasse ausgeübte Gravitationswirkung vernachlässigt werden darf. Im übrigen gilt die obige Gleichung für jede beliebige gegebene Zustandslinie der Atmosphäre und zeigt, dass die Höhe derselben unendlich gross wird, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$F = r. \tag{261}$$

Für den speciellen Fall der adiabatischen Zustandslinie hat man hierin für F den in Gleichung (253) gefundenen Ausdruck zu substituiren, und für diesen Fall erhält man die Bedingungsgleichung:

$$c_p T_0 = Ar. \tag{262}$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck repräsentirt das Wärmeäquivalent der mechanischen Arbeit, welche erforderlich sein würde, um 1 kg Luft von der Erdoberfläche bis zu unendlich grosser Höhe emporzuheben, und der linksseitige Ausdruck repräsentirt die Wärmequantität, welche diesem Luftkilogramm zugeführt führt werden müsste, um dasselbe bei constantem Drucke von der absoluten Temperatur Null bis zur Temperatur der untersten Schicht zu erwärmen. Die obige Gleichung hätte daher auch direct aus dem am Schlusse des § 1 aufgestellten Satze abgeleitet werden können.

Denkt man sich die Temperatur der Erdoberfläche allmählich zunehmend und infolge dessen die Höhe der (aus einem idealen Gase bestehend vorausgesetzten) Atmosphäre allmählich grösser werdend, so erkennt man, dass in dem Augenblicke, wo die Oberflächentemperatur den Werth:

$$T_0 = \frac{Ar}{c_p} \tag{263}$$

erreicht und überschreitet, die Möglichkeit der Existenz einer im Gleichgewichtszustande befindlichen Atmosphäre ganz aufhören würde, insofern alsdann bei jeder, wenn auch noch so grossen, endlichen Höhe der Atmosphäre die Expansionsbewegung derselben immer noch weiter sich fortsetzen würde. Für Wasserstoff würde $c_p = 3{,}409$ zu setzen sein. Die Grenze der Oberflächentemperatur für die Möglichkeit der Existenz einer Wasserstoffatmosphäre entspricht daher dem Werthe:

$$T_0 = \frac{6\,366\,198}{3{,}409 \,.\, 424} = 4404{,}4\,. \tag{264}$$

Um für einen beliebigen andern kugelförmigen Weltkörper, an dessen Oberfläche die Gravitationsbeschleunigung gleich Ng ist, und dessen Halbmesser λ mal so gross ist als der Erdhalbmesser, die Atmosphärenhöhe zu berechnen, würde man resp. die Werthe $N\gamma$ statt γ, und λr statt λ, einzusetzen haben in Gleichung (256), welche alsdann die folgende Form annimmt:

$$dp = -N\gamma\,\lambda^2 r^2 \frac{d\varrho}{\varrho^2}\,. \tag{265}$$

Wenn man hiernach die Rechnung auf dieselbe Weise wie

oben fortsetzt, so erhält man für die Höhe der Atmosphäre die Gleichung:

$$H = \frac{F}{N - \frac{F}{\lambda r}}, \tag{266}$$

und für diejenige Oberflächentemperatur, bei welcher die Atmosphäre eine unendlich grosse Höhe annehmen würde, erhält man den Werth:

$$T_0 = \frac{AN\lambda r}{c_p}. \tag{267}$$

Die auf solche Weise zu berechnende Grenztemperatur kann man die „Dispersionstemperatur" des betreffenden Weltkörpers nennen, insofern beim Ueberschreiten dieser Temperaturgrenze die Gravitationskraft des Weltkörpers nicht mehr ausreichen würde die Atmosphäre an denselben zu fesseln und eine „Zerstreuung" derselben im unendlichen Raume zu verhindern. Wenn für eine bestimmte Gasart die Dispersionstemperatur der Erde bereits bekannt ist, so kann man, wie obige Gleichung zeigt, für dieselbe Gasart die Dispersionstemperatur eines beliebigen andern Weltkörpers berechnen, indem man den für die Erde gefundenen Werth mit dem Producte $N\lambda$ multiplicirt. Hiernach würde man z. B. für eine reine Wasserstoffatmosphäre die in der nachfolgenden Tabelle [1]) angegebenen Zahlenwerthe erhalten:

Weltkörper	N	λ	T_0
Erde	1	1	4404,4
Mars	0,382	0,540	908,5
Merkur . . .	0,521	0,378	867,4
Mond	0,164	0,273	197,2

Bei der Berechnung dieser Zahlenwerthe wurde der Wasserstoff als ein ideales Gas behandelt. Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass die Eigenschaft der Condensirbarkeit eines Gases stets eine Atmosphärenhöhe bedingt, welche beträchtlich grösser ist als diejenige, welche dem idealen Gaszustande entsprechen würde. Die oben für die

1) Der obigen Tabelle wurden die im „Annuaire du Bureau des Longitudes" vom Jahre 1879 angegebenen Zahlenwerthe zu Grunde gelegt.

Temperatur T_0 gefundenen Werthe sind daher jedenfalls beträchtlich grösser als die wirklichen Dispersionstemperaturen. Hieraus folgt: dass auf einem Weltkörper von der Grösse und Masse des Mondes die Existenz einer reinen Wasserstoffatmosphäre auf die Dauer nur dann möglich sein würde, wenn die Oberflächentemperatur desselben beträchtlich niedriger wäre als „minus 75,8 Grad Celsius".

Auf dem Monde selbst würde (infolge des störenden Einflusses der Drehbewegung des Mondes und der Anziehungskraft der Erde) die Dispersion der Atmosphäre schon beginnen bei einer Oberflächentemperatur, welche für den isolirt im Raume ruhenden Mond eine Atmosphärenhöhe von ungefähr 21 Mondhalbmessern bedingen würde. Aus der Gleichung (266) erhält man für diese Temperatur, indem man $H = 21\,\lambda r$ und $F = \frac{c_p T_0}{A}$ setzt, den Werth:

$$T_0 = \tfrac{11}{32} \cdot \frac{AN\lambda r}{c_p} = \tfrac{11}{32} \cdot 197{,}2 = 188{,}2. \tag{268}$$

Hieraus folgt, dass auf dem Monde selbst die Existenz einer reinen Wasserstoffatmosphäre auf die Dauer nur dann möglich sein würde, wenn die Oberflächentemperatur desselben beträchtlich niedriger wäre als „minus 84,8 Grad Celsius."

§. 29. Dispersionstemperatur einer kosmischen Eiskugel.

Die Gültigkeit der im vorigen Paragraphen für die Dispersionstemperaturen gefundenen Gleichungen ist an die Bedingung geknüpft: dass die Masse der Atmosphäre sehr klein ist im Verhältniss zur Masse des Weltkörpers selbst. Bei Voraussetzung des idealen Gaszustandes konnte diese Bedingung stets als erfüllbar angesehen werden, insofern für die Masse der idealen Gasatmosphäre ein von der Oberflächentemperatur unabhängiger, constanter, beliebig klein zu wählender Werth als gegeben angenommen werden durfte. Wenn dagegen die Atmosphäre des Weltkörpers aus gesättigtem Wasserdampfe bestände, so würde das Erfülltsein der obigen Bedingung in jedem concreten Falle eines besonderen Nachweises bedürfen, insofern bei stets gesättigt bleibendem Wasserdampfe mit zunehmender Temperatur der untersten

Schicht zugleich die Dichtigkeit derselben, und infolge dessen auch die Masse der ganzen Atmosphäre zunehmen würde.

In § 27 wurde gezeigt, dass die Zustandslinie der gesättigten Wasserdampfatmosphäre bei Temperaturen unter Null Grad Celsius annäherungsweise sich darstellen lässt durch die Gleichung:

$$p v^k = p_0 v_0^k, \text{ oder } \frac{p}{\gamma^k} = \frac{p_0}{\gamma_0^k}, \tag{269}$$

in welcher der Exponent $k = 1{,}038$ zu setzen ist. Wenn man den hieraus für die Grösse γ zu entnehmenden Werth in Gleichung (265) substituirt und alsdann die Integration derselben ausführt, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\gamma_0} \int_p^{p_0} p^{-\frac{1}{k}} dp = -N\lambda^2 r^2 \int_\varrho^{\lambda r} \frac{d\varrho}{\varrho^2}, \tag{270}$$

$$\frac{k p_0^{\frac{1}{k}}}{(k-1)\gamma_0} \left(p_0^{1-\frac{1}{k}} - p^{1-\frac{1}{k}} \right) = N\lambda r \left(1 - \frac{\lambda r}{\varrho} \right). \tag{271}$$

Da an der äusseren Grenzfläche der Atmosphäre der Druck gleich Null ist, so entspricht dem Werthe $\varrho = \lambda r + H$ der Werth $p = 0$; folglich ist:

$$\frac{k p_0^{\frac{1}{k}}}{(k-1)\gamma_0} \left(p_0^{1-\frac{1}{k}} - 0 \right) = N\lambda r \left(1 - \frac{\lambda r}{\lambda r + H} \right), \tag{272}$$

und wenn man die vorhergehende Gleichung durch die letztere dividirt, so erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{\frac{\lambda r}{\varrho} - \frac{\lambda r}{\lambda r + H}}{1 - \frac{\lambda r}{\lambda r + H}}. \tag{273}$$

Für eine Atmosphäre von unendlich grosser Höhe ist $\frac{\lambda r}{\lambda r + H} = 0$ zu setzen, und für diesen Fall wird:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\lambda r}{\varrho} \right)^{k-1}. \tag{274}$$

Wenn mit P das Gewicht bezeichnet wird, welches die Masse der ganzen Wasserdampfatmosphäre, gewogen an der Erdoberfläche, besitzen würde, so ist:

$$dP = 4\pi\gamma\varrho^2 d\varrho, \quad \text{oder:} \tag{275}$$

$$dP = 4\pi\gamma_0\varrho^2 d\varrho \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{276}$$

zu setzen, und für eine Atmosphäre von unendlich grosser Höhe erhält man hieraus mit Benutzung des oben für $\frac{p}{p_0}$ gefundenen Werthes, indem man zugleich $\frac{\varrho}{\lambda r} = x$ und nachher $k = 1{,}038$ setzt, die folgenden Gleichungen:

$$dP = 4\pi\gamma_0\lambda^3 r^3 x^2 dx \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{277}$$

$$P = 4\pi\gamma_0\lambda^3 r^3 \int_1^x x^{\frac{2k-3}{k-1}} dx, \tag{278}$$

$$\frac{P}{\frac{1}{3}\pi\lambda^3 r^3 \gamma_0} = \frac{1}{7{,}77}. \tag{279}$$

Das in dieser letztern Gleichung gefundene Resultat lässt sich durch den folgenden Satz ausdrücken:

Die Masse der im Gleichgewichtszustande befindlichen gesättigten Wasserdampfatmosphäre eines isolirt im Raume ruhenden kugelförmigen Weltkörpers, dessen Oberflächentemperatur unter Null Grad Celsius liegt, kann niemals mehr betragen als den 7,77-ten Theil von derjenigen Masse, welche eine Kugel vom Radius des Weltkörpers besitzen würde, wenn die Dichtigkeit derselben so gross wäre wie die Dichtigkeit des Dampfes an der Oberfläche des Weltkörpers.

Da die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur von Null Grad Celsius ungefähr den 200,000-ten Theil von der Dichtigkeit des gewöhnlichen Eises beträgt, so wird die Masse der Dampfatmosphäre einer kosmischen Eiskugel demnach niemals mehr als den 1400 000-ten Theil von der Masse der Eiskugel betragen können. Hieraus folgt, dass die Gleichung (267) bei Weltkörpern, deren mittlere Dichtigkeit nicht kleiner ist als die des Eises, auch für die gesättigte Wasserdampfatmosphäre als gültig betrachtet wer-

den darf, solange jene Gleichung zu Werthen von T_0 führt, welche kleiner als 273 sind.

Nach § 27 kann man bei der Berechnung der Atmosphärenhöhe für gesättigten Wasserdampf unter obiger Voraussetzung annäherungsweise $c_p = 3{,}015$ setzen. Hiernach erhält man mit Benutzung der im vorigen Paragraphen angegebenen Zahlenwerthe für einen Weltkörper von der Grösse und Masse des Mondes aus Gleichung (267) den Werth:

$$T_0 = 223 \text{ Grad.} \tag{280}$$

Auf einem isolirt im Weltenraume ruhenden Weltkörper von der Grösse und Masse des Mondes würde daher die Existenz einer reinen gesättigten Wasserdampfatmosphäre auf die Dauer nur dann möglich sein, wenn die Oberflächentemperatur niedriger wäre als „minus 50 Grad Celsius".

Eine Eiskugel von der Grösse des Mondes würde zwar unter Einwirkung ihrer eigenen Gravitationskraft in ihrem centralen Theile eine Dichtigkeit annehmen, welche höchst wahrscheinlich beträchtlich grösser ist als die Dichtigkeit des (an der Erdoberfläche unter atmosphärischem Drucke befindlichen) gewöhnlichen Eises. Da jedoch die mittlere Dichtigkeit des Mondes fast viermal so gross ist als die des gewöhnlichen Eises, so ist wohl nicht als wahrscheinlich anzunehmen, dass eine solche Eiskugel eine mittlere Dichtigkeit besitzen würde, welche die des Mondes erreicht. Aber selbst wenn man dies annehmen wollte, so würde man behaupten dürfen: dass eine Eiskugel von der Grösse des Mondes im Laufe der Zeit allmählich vollständig als Dampf im unendlichen Raume sich zerstreuen müsste, wenn durch Wärmezustrahlung an ihrer festen Oberfläche eine constante Temperatur unterhalten würde, welche höher ist als „minus 50 Grad Celsius". Wenn eine solche Eiskugel als Komet in das Sonnensystem einträte, so würde die Schweifbildung beginnen ungefähr zu der Zeit, wo die Oberflächentemperatur infolge der Annäherung an die Sonne jenen Grenzwerth überschreitet.

Für den wirklichen Mond würde man, mit Berücksichtigung des Einflusses seiner Drehbewegung und der An-

ziehungskraft der Erde, nach Gleichung 268) den noch kleineren Grenzwerth erhalten:

$$281)\quad T_0 = \frac{21}{22} . 223 = 213 \text{ Grad.}$$

Hieraus folgt, dass der Mond selbst — wenn derselbe eine Eiskugel wäre — schon bei einer constanten Oberflächentemperatur von „minus 60 Grad Celsius" allmählich in einen die Erde umkreisenden Dampfring sich verwandeln müsste.

Wenn das vorliegende Beobachtungsmaterial gestattete, auch für andere Substanzen die Dispersionstemperaturen zu berechnen, so könnten diese Rechnungen möglicher Weise zu dem Resultate führen: dass das Suchen nach intramerkuriellen Planeten vielleicht aus dem Grunde bisher als vergeblich sich erwiesen hat, weil bei sehr kleinem Abstande von der Sonne überhaupt kein Planet existiren kann, insofern jeder Planet als solcher verschwinden müsste, wenn seine Oberflächentemperatur grösser wäre als seine Dispersionstemperatur.

IX. *Ueber ultraviolette Strahlen; von J. L. Schönn.*

(Fortsetzung.)[1])

Beim Natrium und den beiden folgenden Metallen wandte ich ein Kalkspathprisma mit brechender Kante von 60° an zum Zwecke genauerer Messungen. — Der zwischen Natriumelectroden überspringende Funke liefert ein sehr einfaches ultraviolettes Spectrum. Dasselbe besteht aus einer intensiven Linie, die man bei Tage im mässig verdunkelten Zimmer deutlich wahrzunehmen vermag. Der Brechungswinkel, d. h. der Winkel zwischen dem aus dem Prisma austretenden Strahl und dem Lothe beträgt für Kalkspath 58° 30′ 35″. Der zugehörige Brechungsexponent ist 1,705 46, und wenn man Mascart's Wellenlängen zu Grunde legt, so würde demselben die Wellenlänge 0,000 330 16 entsprechen. Diese Linie würde zwischen den Fraunhofer'schen Linien *P* und *Q*, näher an *Q* zu suchen sein.

1) s. Wied. Ann. 9. p. 483. 1880.

Diese breite Linie vermochte ich nicht durch Hinzufügung eines rechtwinkligen Bergkrystallprismas zu zerlegen. Ob zwei andere sehr schwache ultraviolette Linien dem Natrium angehören, vermag ich nicht zu sagen. Im Folgenden gebe ich auch für diese die Brechungswinkel. Die rothe Lithiumlinie und die gelbe Natriumlinie führe ich mit ihren Brechungswinkeln und Brechungsexponenten an, um so gleichzeitig eine Scala herzustellen:

		Brechungsexponenten für Kalkspath
rothe Li-Linie	= 55° 46′ 45″	= 1,65375
gelbe Na-Linie *D*	= 56° 1′ 15″	= 1,65848
		[Mascart = 1,65846]
feine schwache Linie. ? Na	= 58° 10′ 50″	
feine schwache Linie. ? Na	= 58° 25′ 20″	
unzweifelhafte Na-Linie	= 58° 30′ 35″	= 1,70546
	Wellenlänge	= 0,000 330 16

Strontiummetall, aus Amalgam dargestellt, gibt ein sehr intensives ultraviolettes Spectrum, dessen Linien sich leicht messen lassen. Die ersten vier scharfen Linien fallen noch in das Bereich des ultravioletten Sonnenspectrums.

Im Folgenden gebe ich die Winkel und Brechungsexponenten zuerst für Kalkspath, dann die Winkel für ein rechtwinkliges Bergkrystallprisma. Durch gleiche Ziffern, die vor den Winkeln stehen, werden gleiche Linien bezeichnet. In der Kalkspathreihe, die übrigens wegen der grössern Dispersion genauer ist, sind einige schwächere Linien und Gruppen weggelassen, während die Linie 13) durch das Kalkspathprisma in zwei Linien aufgelöst wird. Die fünfte Decimale der Brechungsexponenten kann nicht als sicher betrachtet werden, da die Ablesungen höchstens auf 10 Secunden genau sind.

			Brechungsexponenten für Kalkspath
rothe Li-Linie		= 55° 46′ 45″	= 1,653 75
gelbe Na-Linie	*D*	= 56° 1′ 15″	= 1,658 48
ultraviolettes Strontium-spectrum	1)	= 57° 45′ 30″	= 1,691 61
	2)	= 58° 7′	= 1,698 25
	3)	= 58° 18′ 45″	= 1,701 85
	4)	= 58° 58′ 15″	= 1,713 81
	5)	nicht gemessen	

ultraviolettes Strontiumspectrum

6) = 59° 35′ = 1,723 28
7) = 60° 4′ 45″ = 1,733 43
8) = 61° 8′ 45″ = 1,751 70
9) = 61° 59′ 45″ = 1,765 83
10) nicht gemessen
11) nicht gemessen
12) nicht gemessen
13α) = 65° 6′ 15″ = 1,814 15 viel stärker als β
13β) = 65° 13′ 45″ = 1,815 98
14) = 65° 41′ 15″ = 1,822 63

Für Bergkrystall.

gelbe Na-Linie D = 50° 33′
1) = 51° 21′ scharfe deutliche Linie
2) = 51° 30′ „ „ „
3) = 51° 35′ „ „ „
4) = 51° 53′ „ „ „
5) = 52° 1′ schwache Linie
6) = 52° 6′ weniger deutliche Linie
7) = 52° 17′ deutlicher als die beiden vorhergehenden
8) = 52° 42′ schwächere Linie
9) = 53° 1′ helle leuchtende Linie
10) = 53° 11′ schwächere Gruppe von Linien
11) = 53° 26′ „ „ „ „
12) = 53° 45′ etwas stärkere Gruppe v. Linien
13) = 54° 3′ starke Linie; bei Kalkspath doppelt
14) = 54° 14′ 30″ hell leuchtende Linie.

Das ultraviolette Lithiumspectrum ist schwer zu sehen und zu messen. Die Winkel für Kalkspath sind folgende:

1) = 58° 11′ 15″
2) = 58° 25′ 30″
3) = 58° 41′ 15″
4) = 58° 51′ 30″
5) = 58° 55′ 30″
6) = 60° 19′

Schliesslich gebe ich noch das Spectrum der Gaskohle. Die mit 1) 2) 3) 6) bezeichneten Linien gehören höchst wahrscheinlich dem Stickstoff an. Die ersten drei haben einen

übereinstimmenden und von den anderen Linien ganz abweichenden Charakter. An eine scharfe Linie schliesst sich nämlich ein Lichtband nach der ultravioletten Seite hin an. Die Linie 6) ist breit und sehr verwaschen.

gelbe Na-Linie $D = 50^0\ 33'$
1) $= 51^0\ 23'$, ein Band, das mit einer intensiven Linie beginnt, wahrscheinlich *N*.
2) $= 51^0\ 32'$ desgl. wahrscheinlich *N*.
3) $= 51^0\ 46'$ desgl. wahrscheinlich *N*.
4) $= 52^0\ 23'$ helle feine Linie
5) $= 52^0\ 29'$ helle starke Linie
6) $= 52^0\ 50'$ sehr verwaschene Linie. *N*?
7) $= 53^0\ 7'$ scharfe feine Linie
8) $= 53^0\ 14'$ etwas starke breitere Linie
9) $= 53^0\ 55'$ scharfe Linie.

Die Absorption der ultravioletten Strahlen habe ich für folgende Substanzen untersucht: Glimmer, Gyps, Glas, Steinsalz, Alaun, Kandiszucker, Magdalaroth; (abgesehen von Wasser und Eis, deren Absorption schon im ersten Aufsatze erörtert wurde). — Einen interessanten Anblick gewährte Folgendes. Ein so feines Glimmerblättchen, als ich nur immer durch Abspalten erhalten konnte, wurde so vor den Spalt geklebt, dass dessen eine Hälfte von demselben bedeckt war. Dann sah man auf der einen Seite, die dem unbedeckten Theile des Spaltes entsprach, das ultraviolette Cadmiumspectrum vollständig. Dagegen setzten sich nur die beiden ersten starken ultravioletten Cadmiumlinien auf der andern Seite fort; die dritte und vierte starke Cadmiumlinie erschien auf der Glimmerseite nur äusserst schwach. Von da ab war die Glimmerseite des Spectrums vollständig schwarz. Ein grosser Theil des ultravioletten Spectrums wird also durch das feinste Glimmerblatt absorbirt.

Wenn man dies Verhalten des Glimmers mit der vollständigen Durchsichtigkeit des oben erwähnten 21 cm dicken Eisblocks, der alle Strahlen ohne bemerkbare Schwächung

durchlässt, vergleicht, so ermisst man die enorme Verschiedenheit der durchsichtigen farblosen Medien in optischer Hinsicht. Wie viel unbedeutender kann dagegen die optische Differenz zweier Substanzen sein, die z. B. im durchfallenden Lichte röth und blau aussehen. Wenn einst eine grosse Zahl farbloser Substanzen in dieser Hinsicht untersucht sein wird, dann werden sich gewiss Beziehungen zwischen Absorption und molecularer Structur ergeben. —

Ganz durchsichtige Gypsblättchen, wie dieselben als Gypsblättchen I., II., III., IV. Ordnung für Polarisationszwecke angewandt werden, lieferten ganz ähnliche Resultate wie Glimmerblättchen.

Die feinsten Deckgläser, wie sie Hartnack zu seinen Mikroskopen liefert, zeigten ebenfalls starke Absorption. Von dem ultravioletten Cadmiumspectrum waren die beiden ersten starken Linien von 110 der Miller'schen Scala zu sehen; dagegen die dritte starke von 130 nicht mehr. Von dem ultravioletten Magnesiumspectrum war die sehr starke Linie bei 125 zu sehen. Vom ultravioletten Calciumspectrum war die erste Doppellinie zu sehen, dagegen nichts von der zweiten Doppellinie, und da diese etwa bei 125 liegt, so sieht man auch hieraus, dass die zweite ultraviolette Calcium-Doppellinie schwächer ist als die genannte Magnesiumlinie. Vom ultravioletten Zinkspectrum sieht man nur die beiden ersten stärkeren Linien, sonst nichts. Da demnach schon durch die feinsten Glasplatten ein grosser Theil des ultravioletten Spectrums absorbirt wird, so müsste man für die Geissler'schen Röhren zum Theil wenigstens Bergkrystall oder Kalkspath anwenden, wenn man die brechbareren ultravioletten Strahlen erhalten will.

Eine Steinsalzplatte von 3,5 mm Dicke liess alle Cadmiumlinien durch; das Licht der letzten war allerdings etwas geschwächt; das Steinsalz war nicht ganz klar. Da Steinsalz bekanntlich auch für ultrarothe Strahlen durchlässig ist, so ergibt sich für dasselbe eine ungemein grosse Permeabilität für Strahlen jeder Art.

Auch Alaun lässt ultraviolette Strahlen gut durch. Eine Alaunplatte von 9 mm Dicke lässt noch die Cadmiumlinie

bei 155 durch. Eine Platte von 5 mm lässt die letzte Cadmiumlinie vor 170 nur sehr geschwächt sehen, und bei Anwendung einer Platte von 4 mm wurde diese letzte Linie vor 170 nicht viel deutlicher. Es scheint von dieser Stelle des Spectrums ab stärkere Absorption einzutreten. Die Alaunplatten waren allerdings nicht sehr klar.

Eine sehr dünne Platte Kandiszucker schwächte zwar schon vom Violett ab das Licht, allein äusserst schwach waren selbst noch die letzten Cadmiumlinien zu sehen. Der Kandiszucker war nicht recht klar.

Eine Magdalarothlösung von etwa 2 mm Dicke absorbirte alle ultravioletten Cadmiumlinien.

Durch eine Kerzenflamme hindurch gehen die ultravioletten Strahlen ohne bemerkbare Schwächung.

Zum Schluss möchte ich noch gelegentlich einen kleinen Versuch in Betreff der Verbreiterung der Wasserstofflinien *C* und *F* mittheilen. — Wenn man nach Einschaltung einer Leydener Flasche den Funken zwischen Platin- oder Kohlenspitzen überspringen lässt, während man in einem unmittelbar darunter befindlichen Gefässe Wasser verdampft, so erhält der Funke eine rosafarbene Umsäumung. Im Spectrum erscheint dann die rothe Wasserstofflinie breiter als bei der Geissler'schen Röhre. Viel mehr verbreitert sieht man noch die grünblaue Wasserstofflinie *F*, wohl fünfmal so breit als bei Anwendung einer Geissler'schen Wasserstoffröhre unter Beibehaltung derselben Spaltbreite. Es kann ja kaum einem Zweifel unterliegen, dass diese Verbreiterung durch die grössere Dichtigkeit des Wasserstoffgases bedingt wird, etwa wie der untere dichtere Theil der Sonnenprotuberanzen die beiden Linien verbreitert zeigt, die Linie *C* auch in geringerem Grade als die Linie *F*.[1]). Andere Wasserstofflinien habe ich nicht bemerkt. — Dasselbe Resultat erhält man, wenn man den Funken zwischen Platinelectroden durch eine Alkoholflamme überspringen lässt.

1) Vgl. Secchi, die Sonne. p. 472.

X. *Ueber ein neues einfaches Condensationshygrometer; von A. Matern.*

In der Beschreibung meines Condensations- und Absorptionshygrometers[1]) erwähnte ich, dass ich dasselbe nur für Condensation geprüft habe. Durch vielfache Versuche habe ich seitdem gefunden, dass der Apparat als Absorptionshygrometer gleich vortheilhaft zu brauchen ist. Hiernach ergibt sich auch seine Anwendbarkeit für die Ermittelung der Spannung des gesättigten Wasserdampfes, wenn die Luft in dem einen Gefässe mit Wasserdampf gesättigt, im andern durch Schwefelsäure ausgetrocknet wird.[2])

Obgleich nun dieser Apparat durch die Art seiner Zusammensetzung so verschiedenen Zwecken dienen kann und bei Temperaturgleichheit beider Gefässe grosse Genauigkeit gewährt, so wird doch für den regelmässigen Gebrauch eine leichter und schneller zu handhabende Construction vorzuziehen sein, welche eben nur bei günstigen Beobachtungsbedingungen, wie sie sich nicht immer herstellen lassen, dem complicirteren Apparate nachsteht. Für solche Zwecke möchte ich ein Hygrometer in folgender Form vorschlagen.

Den Hauptbestandtheil bildet ein eigenthümlich geformter Glasboden (Taf. I Fig. 12), welcher unten in einen $1^1/_2$ cm

---

1) Matern, Wied. Ann. **9.** p. 157. 1880.

2) Die hierfür gültige Formel lautet mit den Bezeichnungen jenes Aufsatzes:

$$E = h \cdot \left\{ \frac{s}{\sigma} + (b - e) \cdot \eta \cdot \frac{V + V'}{V V'} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} \right\}$$

und setzt voraus, dass e annähernd bekannt ist. Um beide Gefässe gleichzeitig zu schliessen, sind die Pipetten mit einem weitern Ausflussrohre zu versehen, welches in einen abgeflachten und mit einem getalgten Glasplättchen verschliessbaren Rand ausläuft. In jede der beiden Pipetten wird nach ihrer Füllung ein Glasstäbchen von solcher Länge gestellt, dass es, auf dem Bodenplättchen stehend, nach der Befestigung der Pipette im Deckelrohre noch ein wenig aus letzterem hervorragt. Beim gleichzeitigen Aufdrücken der Glasplättchen auf die Rohrmündungen wird der Pipettenverschluss durch die Stäbchen abgestossen, und die Wirkung der Flüssigkeiten beginnt erst nach dem völligen Schluss des Apparates.

langen, 1 cm weiten, inwendig matt gedrehten Hals endet, der zur Aufnahme eines Kautschukcylinders bestimmt ist. Vom obern Ende des Halses an erweitert sich der Boden in einen 3 cm weiten und 3 cm hohen cylindrischen Raum, der zur Füllung mit Wasser dient. Die Wand dieses Behälters geht in einen möglichst geebneten, horizontal abstehenden Rand von 1 cm Breite über, erhöht sich dann noch um etwa 1 cm, bei welcher Stelle eine Weite von 5 cm erreicht ist, und läuft dann in einen rechtwinklig abstehenden flachen Rand von 1 cm Breite aus, der mit Smirgel sorgfältig eben geschliffen ist.

In einer Durchbohrung des Kautschukpfropfens lässt sich ein $2^1/_2$ mm starker Glasstab mit Reibung auf- und abschieben, dessen oberes Ende zu einem Knopf verdickt ist. Auf diesen Stab ist zunächst ein mitten durchbohrtes Metallkreuz von 2 cm Armlänge und darunter eine ebene, leicht biegsame Kautschukscheibe von 4 cm Durchmesser geschoben. Beide Theile werden unterhalb des Knopfes durch einen mit starker Reibung auf den Stab geschobenen kurzen Kautschukcylinder von 2 cm Durchmesser festgehalten, an welchem ein den Stab umgebendes, etwa 15 cm langes Säckchen von dünner Leinwand befestigt ist.

In den geöffneten Behälter ist bis zu einer markirten Stelle soviel Wasser zu giessen, dass es nach dem Herabziehen des Stabes durch die eingetauchte Leinwand und den Kautschukcylinder noch nicht bis an den Rand des Behälters gehoben wird. Wenn das Kreuz die Kautschukscheibe gegen diesen Rand andrückt, ist der Wasserbehälter genügend geschlossen, um den Feuchtigkeitsgehalt der ausserhalb befindlichen Luft unverändert zu lassen. Der ebengeschliffene Rand des Bodens wird dann mit Talg bestrichen und ein mit ebensolchem Rande versehener 12 cm hoher, 5 cm weiter Recipient fest darauf gedrückt, in welchen oben ein $2^3/_4$ bis 3 mm weites und 30 cm langes Manometer, das zur Hälfte mit Rüböl gefüllt wird, entweder eingeschmolzen oder in einen Hohlconus eingesetzt ist.

Der Stab ist dann in die Höhe zu schieben, und die mit ihm emporgezogene feuchte Leinwand sättigt die Luft

sehr bald mit Wasserdampf, dessen Druckerhöhung sich am Manometer zeigt. Um eine grosse Verdunstungsfläche herzustellen, ist es zweckmässig, an einigen Stellen Drahtringe einzuheften, welche bewirken, dass das Säckchen, zu voller Weite und Länge ausgedehnt, aus dem Wasser gehoben wird und ebenso bei der Abwärtsbewegung ohne Hinderniss in den Behälter sinkt.

Um ein Thermometer im Innern des Apparates anzubringen, ist oben in den Recipienten ein schwach conischer Tubus so eingeschmolzen, dass das Thermometer mitten zwischen der Leinwandfläche und der Gefässwand zu stehen kommt. Das Thermometer wird entweder mit Klebwachs eingekittet, oder noch besser an einer verdickten Stelle seines Umhüllungsrohrs mit Smirgel in den Tubus eingedreht, sodass die Quecksilberkugel etwa in halber Gefässhöhe sich befindet, und dann mit Talg dicht eingesetzt. Die bis etwa 30° reichende Scala muss, soweit sie zu verwenden ist, ausserhalb des Apparates abzulesen sein. Der Apparat wird mit seinem Wasserbehälter in einen mit Tuch ausgekleideten gleichhohen Metallcylinder eines Dreifusses gesetzt, und der Recipient durch eine Papprolle vor äusseren Einflüssen geschützt. Am Manometer lässt sich mit zwei Klemmen ein leichter Maassstab befestigen, dessen Intervalle Zehntelmillimetern Quecksilberdruck entsprechen.

Die Reinigung des Apparates und seine Vorbereitung für eine neue Messung ist äusserst einfach. Man hat nur durch Herabziehen des Stabes das Wasserreservoir zu schliessen, den Recipienten vom Boden abzuschieben, das von beiden Randflächen abgeschabte Talg wieder auf den Rand des Bodens zu streichen und allenfalls noch den Recipienten auszutrocknen.

Wenn nur der Kautschukpfropfen an den Bodenhals und den durchgezogenen Stab wasserdicht anschliesst, so sorgt das darüber befindliche Wasser selbst für luftdichten Verschluss; Thermometer und Manometer bleiben in steter Verbindung mit dem Recipienten. Zur Sicherung der Dichtigkeit ist also beim Gebrauch nur auf die sorgfältige Eintalgung des Bodenrandes zu achten. Jedesmal ist der Re-

cipient so aufzusetzen, dass das Thermometer beim Heben des Stabes nicht von einem Arm des Kreuzes, sondern vom Rande der Kautschukscheibe getroffen wird, welche dem Thermometer durch Abwärtsbiegen leicht ausweicht.

Der ganze mit Luft gefüllte innere Raum bis zur Manometerflüssigkeit betrage V ccm, wie überhaupt in der folgenden Berechnung alle Dimensionen in Centimetern zu verstehen sind; die durch den eingeschobenen Stab bewirkte Raumverminderung sei v, der Querschnitt des Manometers q. Beim Andrücken des Recipienten sei durch innere Compression das Oel im Manometer um h gestiegen. Diese Druckänderung könnte nur durch Anbringen einer zuletzt zu schliessenden kleinen Oeffnung ganz beseitigt werden, was den Gebrauch umständlicher machen würde. Das anfängliche Volumen der Luft ist also $V+\frac{qh}{2}$, der innere Gesammtdruck $b+h\cdot\frac{s}{\sigma}$, wenn der äussere Luftdruck b, das specifische Gewicht des Oels s, des Quecksilbers σ ist. Der Druck der trocknen Luft ergibt sich $(b-e)\cdot\frac{b+h\cdot\frac{s}{\sigma}}{b}$, wenn e den herrschenden Dunstdruck bezeichnet. Hat sich vom Schluss des Apparates bis zur Ablesung die Temperatur t in T geändert, ist dabei der Manometerstand von h bis auf H gestiegen, und bezeichnet E den für die Temperatur T geltenden Maximaldruck des Wasserdampfes, so ergibt sich die Gleichung:

$$E+(b-e)\cdot\frac{b+h\cdot\frac{s}{\sigma}}{b}\cdot\frac{V+\frac{qh}{2}}{V+\frac{qH}{2}-v}\cdot\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}=b+H\cdot\frac{s}{\sigma}\quad\text{oder:}$$

$$E+(b-e)\cdot\left(1+\frac{h}{b}\cdot\frac{s}{\sigma}\right)\cdot\left(1+\frac{v-\frac{q}{2}\cdot(H-h)}{V+\frac{qH}{2}-v}\right)\cdot\left(1+\alpha\cdot\frac{T-t}{1+\alpha t}\right)=b+H\cdot\frac{s}{\sigma}.$$

Für die angegebenen Dimensionen des Appárates fallen in den drei eingeklammerten Summen auf der linken Seite der Gleichung die zweiten Summanden im Vergleich zum ersten Summandus 1 so klein aus, dass in dem Product dieser

Klammergrössen als Coëfficient für b die kleinen Grössen 2. Ordnung, und als Coëfficient für e sogar diejenigen 1. Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Es ist demnach:

$$E+b\cdot\left\{1+\frac{h}{b}\cdot\frac{s}{\sigma}+\frac{v-\frac{q}{2}\cdot(H-h)}{V+\frac{qH}{2}-v}+\frac{\alpha\cdot(T-t)}{1+\alpha t}\right\}-e=b+H\cdot\frac{s}{\sigma},$$

also:

$$e=E+\frac{bv}{V+\frac{qH}{2}-v}+\frac{b\alpha\cdot(T-t)}{1+\alpha t}-(H-h)\cdot\left(\frac{s}{\sigma}+\tfrac{1}{2}\frac{bq}{V+\frac{qH}{2}-v}\right).$$

In dieser Gleichung darf noch $V+\frac{qH}{2}-v$ durch V, und b durch einen mittlern Werth 76 ersetzt werden, weil die hieraus entstehenden kleinen Fehler unter denjenigen liegen, welche im letzten Gliede $\frac{b\alpha(T-t)}{1+\alpha t}$ durch die möglichen Fehler der Temperaturbeobachtung sich ergeben können. Aus diesem Grunde sind auch Correctionen für die Ausdehnung des Rüböls und für Abweichungen des Barometerstandes ganz unnöthig, wenn der letztere nur während der Dauer der Beobachtung sich nicht geändert hat. Es ist also:

$$e=E+76\cdot\frac{v}{V}+76\cdot\frac{T-t}{273+t}-(H-h)\cdot\left(\frac{s}{\sigma}+\frac{76q}{2V}\right).$$

Wird der Maassstab so eingerichtet, dass die Intervalle $\frac{1}{\frac{s}{\sigma}+\frac{38q}{V}}$ mm gross sind, so sind dieselben gleichbedeutend mit Millimetern Quecksilberdruck und können wegen ihrer Grösse von etwa 13 mm noch in Zehntel getheilt werden. Dann ist es zweckmässig, auch die Grössen e, E und den mittleren Barometerstand in Millimetern auszudrücken, sodass die Formel lautet:

$$e\doteq E+760\cdot\frac{v}{V}+760\cdot\frac{T-t}{273+t}-(H-h),$$

worin $760\cdot\frac{v}{V}$ eine Constante ist, welche jedesmal zu der Grösse E addirt wird; $760\cdot\frac{T-t}{273+t}$ ist für jede Beobachtung zu berechnen, $H-h$ ergibt sich als Differenz der beiden Manometerablesungen direct in ganzen und zehntel Milli-

metern. Wegen des bedeutenden Einflusses einer Temperaturänderung auf den Manometerstand ist die Differenz $T-t$ mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln und deshalb ein in Fünftelgrade getheiltes Thermometer nöthig, dessen Theile gross genug sind, um noch eine sichere Schätzung von Fünfteln zuzulassen, welche etwa Zehntelmillimetern in Druck gleichwerthig sind. Sollte die Zeit zwischen beiden Ablesungen ausnahmsweise gross sein, und der Barometerstand sich etwas geändert haben, so wird diese Aenderung mit entgegengesetztem Vorzeichen zu dem berechneten Werthe von e hinzugefügt.

Hamburg, im Januar 1880.

XI. *Ueber einen allgemeinen Satz von Hrn. R. Clausius in Bezug auf electrische Influenz; von G. J. Legebeke.*

In Bd. 1. dieser Annalen theilte Hr. R. Clausius einen Satz mit über den Zusammenhang zwischen den electrischen Ladungen einer willkürlichen Anzahl von Conductoren, welche influenzirend aufeinander einwirken. Der Autor erachtet diesen Satz als sehr allgemein und neu und nimmt ihn auch im zweiten Theile seiner mechanischen Wärmetheorie auf, p. 33. Ich wünsche darauf hinzuweisen, dass der Satz von Clausius ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes ist, der selbst wieder als eine Erweiterung einer bekannten Gleichung von Gauss betrachtet werden kann.

Ueber jeder der geschlossenen, C_1, C_2 etc., im allgemeinen C genannten Oberflächen, ist eine Schicht von einem gewissen Agens ausgebreitet, welches nach den gewöhnlichen Gesetzen anziehend oder abstossend wirkt, und zwar wird die Dichtigkeit des Agens in Punkten von:

C_1, C_2 etc. C

dargestellt durch:

$$h_1,\ h_2 \text{ etc. } h,$$

und das Potential aller dieser Schichten in denselben Punkten durch:

$$V_1,\ V_2 \text{ etc. } V.$$

Zweitens werden die Schichten auf C_1, C_2 etc. C, durch Schichten mit den Dichtigkeiten:

$$\mathfrak{h}_1,\ \mathfrak{h}_2 \text{ etc. } \mathfrak{h}$$

ersetzt, deren Potentiale sind:

$$\mathfrak{V}_1,\ \mathfrak{V}_2 \text{ etc. } \mathfrak{V}.$$

Nun gilt allgemein, wenn dw_1, dw_2 etc. dw die Oberflächenelemente von C_1, C_2 etc. C vorstellen:

$$\int V_1 \mathfrak{h}_1\, dw_1 + \int V_2 \mathfrak{h}_2\, dw_2 + \text{etc.}$$

$$= \int \mathfrak{V}_1 h_1\, dw_1 + \int \mathfrak{V}_2 h_2\, dw_2 + \text{etc.}$$

oder auch:

$$\sum \int V \mathfrak{h}\, dw = \sum \int \mathfrak{V} h\, dw. \tag{1}$$

Vor dem Beweise dieses Satzes bemerke ich, dass er unmittelbar auf eine Anzahl leitender Körper C_1, C_2 etc. angewandt werden kann, die auf zwei verschiedene Weisen mit Electricität geladen sind und influenzirend aufeinander einwirken. Dann nämlich sind die Potentiale V und $\mathfrak{V}$ Constanten, welche die Potentialniveaux der Leiter ausdrücken, und die Gleichung (1) geht über in die Gleichung von Clausius.

Um die obenstehende Gleichheit zu beweisen, wird ebenso wie bei Clausius von der bekannten Gleichung von Green ausgegangen. Diese Gleichung wird für den durch die Oberfläche C eingeschlossenen Raum angewandt, und für die beiden Functionen, welche darin vorkommen, nehme ich V_i und $\mathfrak{V}_i$, wovon die erste das Potential aller Schichten mit Dichtigkeiten h und die zweite das Potential der Schichten mit Dichtigkeiten $\mathfrak{h}$, — beide Potentiale in Punkten innerhalb C genommen — vorstellt.

Man hat dann:

$$\int V_i \frac{d\mathfrak{V}_i}{dn} dw = \int \mathfrak{V}_i \frac{dV_i}{dn} dw.$$

Die Operation $\frac{d}{dn}$ ist die Differentiation nach der innerhalb C gezogenen Normale. Durch aufeinander folgende Anwendung des Theorems von Green auf die durch alle Oberflächen eingeschlossenen Räume erhalten wir nach der Summation:

$$\sum \int V_i \frac{d\mathfrak{V}_i}{dn} dw = \sum \int \mathfrak{V}_i \frac{dV_i}{dn} dw'. \tag{2}$$

Ferner wird der Satz von Green auf den Raum ausserhalb der Oberflächen C angewandt, welchen Raum man erst durch eine Kugeloberfläche begrenzt hat, deren Mittelpunkt und Radius so angenommen sind, dass alle Oberflächen C innerhalb dieser Kugel liegen. Die Potentiale der Schichten h und $\mathfrak{h}$ in Punkten ausserhalb der Oberflächen C werden resp. dargestellt durch V_a und $\mathfrak{V}_a$, und diese Functionen in der Gleichung von Green substituirt. Auf gewöhnliche Weise findet man dann, wenn der Radius der Kugel unendlich gross genommen wird:

$$\sum \int V_a \frac{d\mathfrak{V}_a}{dN} dw = \sum \int \mathfrak{V}_a \frac{dV_a}{dN} dw. \tag{3}$$

Die Operation $\frac{d}{dN}$ ist die Differentiation nach der ausserhalb der Oberfläche C gezogenen Normale. Die Functionen V_i und V_a in den Gleichungen (2) und (3) haben für denselben Punkt von einer der Oberflächen C natürlich denselben Werth und zwar V, ebenso die Functionen $\mathfrak{V}_i$ und $\mathfrak{V}_a$, die beide in $\mathfrak{V}$ übergehen. Nicht so ist es mit den Differentialquotienten nach der Normale.

Sei bei den Dichtigkeiten h das Potential der Schicht auf der Oberfläche C in Punkten innerhalb C dargestellt durch P_i und das Potential der übrigen Schichten durch Π_i, ebenso das Potential der Schicht auf C in Punkten ausserhalb C durch P_a und das der übrigen Schichten durch Π_a, so ist:

$$\frac{dV_i}{dn} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{d\Pi_i}{dn} \quad \text{und} \quad \frac{dV_a}{dN} = \frac{dP_a}{dN} + \frac{d\Pi_a}{dN}.$$

Offenbar ist für Punkte von C:

$$\frac{d\Pi_i}{dn} = -\frac{d\Pi_a}{dN},$$

und nach einer bekannten Eigenschaft:

$$\frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_a}{dN} = -4\pi\varepsilon h,$$

worin ε eine Constante vorstellt. Man findet daher:

$$\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_a}{dN} = -4\pi\varepsilon h$$

und vollkommen auf dieselbe Weise:

$$\frac{d\mathfrak{V}_i}{dn} + \frac{d\mathfrak{V}_a}{dN} = -4\pi\varepsilon\mathfrak{h}.$$

Durch Summirung beider Glieder der Gleichungen (2) und (3) erhält man also:

$$\sum \int V\mathfrak{h}\, dw = \sum \int \mathfrak{V} h\, dw.$$

Schliesslich bemerke ich, dass diese allgemeine Gleichung als eine Erweiterung einer von Gauss gegebenen Eigenschaft anzusehen ist. Stelle V das Potential eines Systems von Massen m_1, m_2 etc. vor, die sich in den Punkten p_1, p_2 etc. befinden, und $\mathfrak{V}$ das Potential von Massen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ etc. in den Punkten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ etc.; ferner V_1, V_2 etc. die Werthe von V in den letzteren Punkten und $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ etc. die Werthe von $\mathfrak{V}$ in den Punkten p_1, p_2 etc., so ist nach Gauss:

$$V_1\mathfrak{m}_1 + V_2\mathfrak{m}_2 + \text{etc.} = \mathfrak{V}_1 m_1 + \mathfrak{V}_2 m_2 + \text{etc.}$$
$$\Sigma V\mathfrak{m} = \Sigma\mathfrak{V} m.$$

Diese Gleichung ist identisch, da beide Glieder Aggregate derselben Combinationen darstellen. Dass der Satz noch gültig bleibt, wenn man zuerst die Massen m auf einer Oberfläche C ausbreitet und hernach die Massen $\mathfrak{m}$ auf derselben Oberfläche, wird von Gauss[1]) nicht vollständig bewiesen, sondern „die Art, wie diese Erweiterung des Satzes

1) Gauss. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. §. 19.

streng gerechtfertigt werden kann, nur nach ihren Hauptmomenten" angedeutet.

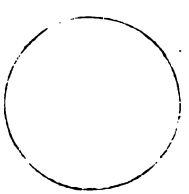
Im Obigen ist dieser Satz für eine willkürliche Anzahl von Oberflächen als eine einfache Folgerung aus der Green'schen Gleichung bewiesen.

Utrecht, Jan. 1880.

XII. *Ueber eine Augentäuschung beim Anblick geometrischer Figuren; von W. Holtz.*

Ich glaube wohl, dass die Augentäuschung, von der ich im Folgenden handeln will, vor mir schon manchem Anderen aufgefallen ist, aber ich weiss nicht, dass dieselbe bisher öffentlich besprochen, oder der Versuch gemacht ist, eine Erklärung dafür zu geben. Mir bot sich die fragliche Wahrnehmung und gleichzeitig die Erklärung, als ich mich mit körperlichen Zeichnungen befasste.

Es handelt sich nämlich darum, dass uns geometrische Figuren in der Richtung von links nach rechts kürzer erscheinen, als sie wirklich sind, ein Quadrat also mehr oder weniger als ein Rechteck, eine Kugel in gleicher Weise wie eine Ellipse. Eine unmittelbare Folge dieser Täuschung ist, dass, wenn wir solche Figuren nach dem Augenmaasse zeichnen, wir umgekehrt die horizontalen Dimensionen unbewusst länger nehmen, als wir in Wirklichkeit sollten. Drehen wir dann aber das Blatt um einen Winkel von 90°, so tritt die Verkehrtheit der Zeichnung um so deutlicher hervor. Die nebenstehenden Figuren sind solchergestalt gezeichnet; in der einen wollte ich einen Kreis darstellen, in der andern ein Quadrat. Ich hoffe auch, dass die Figuren bei der gewöhnlichen Haltung des Buches so erscheinen, während jeder bei einer Drehung um 90° leicht erkennen wird, dass jene eine Ellipse, und diese ein Rechteck ist.



Der Grund gedachter Täuschung liegt nun wohl ohne Zweifel darin, dass wir im gewöhnlichen Leben viel häufiger Körpern, als geometrischen Figuren zu begegnen pflegen, und infolge dessen geneigt sind, die Umrisse solcher Figuren für die Umrisse wirklicher Körper hinzunehmen. Von einem Körper aber sehen wir allemal in horizontaler Richtung mehr, als in verticaler, weil wir mit zwei Augen sehen, und diese in einer horizontalen Linie liegen. Der Umriss einer Kugel erscheint uns wirklich als eine Ellipse, weil wir in der Richtung von links nach rechts mehr als die Hälfte der Kugel sehen. Schauen wir einen wirklichen Kreis, so erscheint uns dieser also, weil wir ihn für den Umriss einer Kugel halten, horizontal verkürzt, und wollen wir einen wirklichen Kreis darstellen, so zeichnen wir unbewusst den Umriss einer Kugel.

Daher geschieht es denn auch, dass die Täuschung noch viel vollständiger, aber auch gewissermassen mehr berechtigt wird, wenn wir den Figuren oder dem Blatt Papier, auf welchem sie stehen, irgend welche Schattenstriche geben, weil wir hierdurch die Vorstellung bestärken, als ob es sich nicht um Figuren, sondern um wirkliche körperliche Gebilde handelte.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit daran erinnern, dass die Darstellung von Kugeln in perspectivischen Zeichnungen, wenn dieselben nicht wie Ellipsoide erscheinen sollen, auch nur durch freihändige Zeichnung möglich ist, oder, wenn man durchaus den Zirkel benutzen will, allenfalls dadurch, dass man von zwei in horizontaler Richtung ein wenig entfernten Punkten zwei Halbkreise schlägt. Es bedarf eben einer Ellipse als Umrisses, wenn das Gebilde nicht als ein Ellipsoid, sondern als eine Kugel erscheinen soll.

XIII. *Reflexion und Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen unter Voraussetzung endlicher Einfallswinkel; von F. Lippich.*

Unter dieser Ueberschrift hat Reusch[1]) Untersuchungen veröffentlicht, in denen Sätze und Formeln enthalten sind, zu denen ich in meinen Arbeiten: „Ueber Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlenbündel an Kugelflächen“[2]), und „Ueber den Gang der Lichtstrahlen in einer homogenen Kugel“[3]), ebenfalls gelangt bin. Obgleich von mir hauptsächlich die räumlichen Beziehungen zwischen Object und Bild bei endlichem Einfallswinkel des Strahlensystemes in Betracht gezogen werden, so bildet doch die speciellere Abhängigkeit conjugirter Punkte, die auf den Axen der Bündel liegen, den Ausgangspunkt meiner Untersuchungen, und ich bedauere lebhaft, erst jetzt die Abhandlung von Reusch kennen gelernt zu haben, in welcher diese grundlegenden Sätze, wenn auch theilweise in anderer Art als bei mir entwickelt, sich vorfinden. Ich hätte sonst gewiss nicht ermangelt, an betreffender Stelle die ihm gebührende Priorität bezüglich der fraglichen Sätze entsprechend hervorzuheben, was ich hiermit nachzutragen mich verpflichtet fühle.

Prag, den 16. Februar 1880.

1) Reusch, Pogg. Ann. **130.** p. 497. 1867.
2) Lippich, Denkschr. d. Wien. Acad. **38.** 1877.
3) Lippich, Wien. Ber. **79.** 1879.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1880. ANNALEN № 6.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND X.

I. *Ueber electrische Ausdehnung; von G. Quincke.*

(Die Resultate dieser Untersuchung wurden der k. Akad. der Wissensch. in Berlin mitgetheilt den 19. Febr. 1880.)

§ 1. Dass der Hohlraum einer Leydener Flasche grösser ist in geladenem als in ungeladenem Zustande wurde zuerst von Fontana beobachtet. Alexander Volta[1]) suchte 1776 diese Volumenänderung durch electrische Compression zu erklären, herrührend von der Anziehung der entgegengesetzten Electricitäten an der Oberfläche des Glases.

Govi[2]) füllte im Jahre 1864 Thermometer mit verschiedenen Flüssigkeiten, stellte dieselben in schmelzenden Schnee, electrisirte die Flüssigkeit im Innern und beobachtete eine Senkung der Flüssigkeit in der Capillarröhre. Die Grösse der Contraction war bei Alkohol grösser als bei Salpetersäure, bei Salpetersäure etwas grösser als bei Wasser. Aether stieg erst und sank dann. Bei Quecksilber und Olivenöl war keine Wirkung zu bemerken.

Das Wasser im Innern eines solchen Thermometercondensators sank momentan bei der Ladung und ging ebenso momentan in die frühere Stellung zurück bei der Entladung; für positive und negative Electricität in derselben Weise.

Govi suchte den Grund der Erscheinung in einer Condensation der Flüssigkeiten an der Oberfläche der Gefässwand.

Duter[3]) fand die Volumenänderung der Flüssigkeit

1) Volta, Lettere inedite di Volta. Pesaro p. 15. 1834.

2) Govi, Nuovo Cimento 21—22. p. 18—26. 1865—1866. Compt. rend. 87. p. 857. 1878.

3) Duter, Compt. rend. 87. p. 828. 1878.

innerhalb und ausserhalb der Kugel eines Thermometercondensators gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Er schloss daraus, dass die isolirende Glaswand der Thermometerkugel sich ausgedehnt, und das innere und äussere Volumen der Thermometerkugel um dieselbe Grösse zugenommen habe. Die electrische Ausdehnung wäre aber nicht durch eine Temperaturerhöhung oder electrischen Druck zu erklären.

Die Volumenänderung war, in Widerspruch mit den Angaben von Govi, dieselbe, mochten Quecksilber oder andere Flüssigkeiten die innere Belegung des Thermometercondensators bilden.

Bei seinen früheren Versuchen[1]) fand Duter die Volumenzunahme umgekehrt proportional dem Quadrat der Dicke der Glaswand, später[2]) umgekehrt proportional der Dicke und proportional dem Quadrate des Potentialunterschiedes der Condensatorbelegungen.

Righi[3]) bestimmte die electrische Verlängerung langer Glasröhren mit flüssigen Belegungen durch die Verschiebung eines Spiegels, in welchem sich das mit einem Fernrohre beobachtete Bild einer Mire verschob, bei verschiedenen electrischen Potentialunterschieden der Belegungen, welcher mit einem Funkenmikrometer oder einem Reflexionselectrometer gemessen wurde.

Die Verlängerung setzte sich aus einer augenblicklichen und einer bleibenden zusammen. Die bleibende Verlängerung, welche nach der Entladung des Condensators zurückblieb, war mehr oder weniger gross, je nachdem der Röhrencondensator langsam oder sehr schnell geladen wurde; die augenblickliche Verlängerung war davon unabhängig. Die bleibende Verlängerung war unabhängig von der Anzahl der vorausgegangenen Ladungen und Entladungen des Condensators, konnte also nicht von dem electrischen Rückstande der Condensatorladung herrühren. Den Grund der bleibenden Verlängerung sucht Righi in einer Erwärmung der

1) Duter, Compt. rend. **87.** p. 1036. 1878.
2) l. c. **88.** p. 1261. 1879.
3) Righi, Compt. rend. **88.** p. 1262. 1879.

Glasmasse, den Grund der augenblicklichen Verlängerung in einer Polarisation, vielleicht einer electrischen Compression der Glasmasse.

Die augenblickliche Verlängerung war proportional dem Quadrate des electrischen Potentialunterschiedes der Belegungen, umgekehrt proportional der Glasdicke und betrug zwei Milliontel der ursprünglichen Länge bei 1 mm Glasdicke und einer Schlagweite von 10 mm zwischen Messingkugeln von 15 mm Durchmesser.

Eine Temperaturerhöhung von $^1/_4{}^0$ C. würde dieselbe Verlängerung bewirkt haben.

Righi führt auch die Erscheinung des singenden Condensators von Varley auf augenblickliche Ausdehnungen bei jeder Ladung und Entladung zurück.

Uebrigens sind die Töne beim Laden und Entladen der Leydener Batterie schon 1853 von Knochenhauer[1]) beobachtet und von de la Rive[2]) durch die zuerst von Faraday[3]) angenommene electrische Polarisation des Glases erklärt worden.

W. Thomson[4]) hat beim Laden und Entladen eines Luftcondensators mit einer 800gliedrigen Daniell'schen Säule ebenfalls Töne wahrgenommen.

Werner Siemens[5]) zeigte, dass die 5 mm dicke Glaswand einer Leydener Flasche bei aufeinander folgenden Ladungen (1 Zoll Schlagweite entsprechend) und Entladungen merklich erwärmt wurde. Die Ursache der Erwärmung wäre nicht in einer electrischen Compression des Glases oder einem Eindringen der Electricitäten in die den Belegungen zunächst liegende Glasmasse zu suchen, sondern in einem den Faraday'schen Anschauungen entsprechenden molecularen Bewegungsvorgange im Innern des Glases.

Dr. Kerr fand, dass feste[6]) Körper und Flüssigkei-

1) Knochenhauer, Pogg. Ann. **90.** p. 189. 1853.
2) De la Rive, Arch. sc. phys. **25.** p. 64. 1863.
3) Faraday, Exper. research. **1.** § 1371. 1838.
4) Thomson, Cosmos **23.** p. 519. Berl. Ber. **19.** p. 409. 1863.
5) Siemens, Berl. Monatsber. Oct. 1864. Pogg. Ann. **125.** p. 138. 1865.
6) Kerr, Phil. Mag. (4) **50.** p. 337 u. 446. 1875.

ten[1]) unter dem Einflusse electrischer Kräfte, wie sie auf das Glas einer Leydener Flasche wirken, optisch doppeltbrechend werden, dass eine Reihe negativer Substanzen (Glas, fette Oele) sich wie ein optisch negativer Krystall verhalten, mit der optischen Axe parallel der kürzesten electrischen Kraftlinie und eine Reihe positiver Substanzen (Schwefelkohlenstoff) wie ein optisch positiver Krystall mit der optischen Axe parallel der kürzesten electrischen Kraftlinie.

Bei Schwefelkohlenstoff fand Dr. Kerr[2]) die Grösse der doppeltbrechenden Wirkung proportional dem Quadrate der electrischen Potentialdifferenz und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes der Metallelectroden.

J. E. H. Gordon[3]) und J. J. Mackenzie[4]) konnten für Glas von Franklin'schen Tafeln die Beobachtungen von Dr. Kerr nicht bestätigen, während W. C. Röntgen[5]) bei Flüssigkeiten zu denselben Resultaten gelangte wie Dr. Kerr und auch bei Glycerin, Aether und Wasser einen Einfluss der Flüssigkeit auf das hindurchgehende Licht auffinden konnte.

Dr. Kerr sieht den Grund der electrischen Doppelbrechung bei Flüssigkeiten in einer Polarisation der Flüssigkeitstheilchen, analog den Ansichten von Faraday. Bei festen Körpern könnte eine durch Temperaturerhöhung[6]) bedingte Spannung die electrische Doppelbrechung modificiren.

Warren de la Rue und Hugo Müller[7]) haben bei Entladungen der grossen galvanischen Kette von 11000 Elementen durch Luft von bestimmter Verdünnung (56 mm Quecksilberdruck) eine plötzliche Drucksteigerung von 16 mm beobachtet, die mit dem Aufhören des Entladungsstromes augenblicklich wieder verschwand. Die Ursache soll nicht

1) Kerr, Phil. Mag. (5) **8.** p. 85 u. 229. 1879.
2) ib. (5) **9.** p. 157. 1880.
3) Gordon, Phil. Mag. (5) **2.** p. 203. 1876.
4) Mackenzie, Wied. Ann. **2.** p. 356. 1877.
5) Röntgen, Ber. d. Oberh. Ges. für Natur u. Heilk. **19.** p. 1. 1880.
6) Kerr, Phil. Mag. (4) **50.** p. 348. 1875; ib. (5) **8.** p. 245. 1879.
7) Warren de la Rue u. H. Müller, Compt. rend. **89.** p. 640. 1879.

in einer Temperaturerhöhung des Gases gesucht werden können, da diese dann über 16000° C. betragen haben müsste.

Diese Angaben der verschiedenen Beobachter stehen zum Theil in Widerspruch miteinander; theilweise auch in Widerspruch mit einer Reihe ähnlicher Untersuchungen, die mich längere Zeit beschäftigt haben, und die ich im Folgenden mittheilen werde.

Man wird daraus ersehen, dass feste und flüssige Isolatoren ihr Volumen ändern, wenn man sie, ähnlich wie das Glas einer Leydener Flasche, electrischen Kräften aussetzt.

Das Volumen kann dabei vermehrt werden, was das gewöhnlichste ist, oder auch vermindert werden. Die Volumenänderung rührt nicht von electrischer Compression her.

Die von electrischen Kräften hervorgerufene Ausdehnung des Glases erfolgt nach allen Richtungen gleichmässig, wie durch Erwärmung, rührt aber nicht von Erwärmung her.

Gleichzeitig mit den Dimensionen ändert sich auch die elastische Kraft des Isolators unter dem Einflusse der electrischen Kräfte. Bei einer Reihe Substanzen nimmt sie dadurch ab, bei einer andern Reihe zu.

Die durch electrische Kräfte herbeigeführte Ausdehnung oder Contraction kann als secundäre Wirkung eine electrische Durchbohrung des Isolators oder (electrische) optische Doppelbrechung hervorrufen.

I. Thermometercondensatoren.

§ 2. Apparate und Anordnung der Versuche. — Aus einer dickeren Glasröhre wurde eine dünnwandige Glaskugel von 40 bis 60 mm Durchmesser geblasen. Aus dem Gewichte K der leeren Kugel, dem specifischen Gewichte σ des Glases (2,4555 bei Thüringer Glas; 3,1702 bei Englischem Flintglas oder Bleiglas) und dem Durchmesser $2R$ der Kugel liess sich angenähert die Dicke D der Glaswand bestimmen mit der Gleichung:

$$D^{\text{mm}} = \frac{K^{\text{mg}}}{4\pi\sigma \cdot R^2}.$$

Die Wanddicke, welche zwischen 0,2 mm und 1 mm schwankte, wird auf diese Weise zu gross gefunden, da

die an der Kugel befindlichen Glasröhrchen mitgewogen werden.

Die Kugeln wurden hierauf an eine Thermometerröhre von 200 mm Länge und 0,2 bis 0,4 mm Durchmesser im Lichten angeschmolzen, deren mittlerer Theil eine erbsengrosse Erweiterung mit eingeschmolzenem Platindraht trug. Ein Quecksilberfaden wurde in die Thermometerröhre gesogen, Länge l und Gewicht G desselben bestimmt und daraus der Querschnitt oder das Volumen der Röhre auf der Strecke eines Millimeters ermittelt mit der Gleichung:

$$r^2\pi = \frac{G^{\,mg}}{13{,}54\, l^{mm}}.$$

Der untere Theil der Thermometerröhre zwischen dem Platindraht B und der Glaskugel A (Taf. II Fig. 1a und 1b) wurde mit geschmolzenem Schellack überzogen.

Da mir anfänglich keine passenden Capillarröhren aus Flintglas zu Gebote standen, wurde bei Flintglas dem Theile AB des Rohres eine Weite von 3 mm gegeben und die heisse Flüssigkeit durch einen Trichter eingefüllt, der bis zum Boden der Kugel reichte, sodass keine Luftblasen zurückblieben. Nach dem Erkalten setzte man dann bei A mit einem Kitt aus Canadabalsam und Schellack ein Capillarrohr ein, dessen unterer Theil in einer passenden Erweiterung einen eingeschmolzenen Platindraht trug.

Bei den Apparaten mit angeschmolzenen Capillarröhren wurde durch Saugen bei C die Glaskugel mit ausgekochtem Wasser, Quecksilber oder Alkohol gefüllt, indem die betreffende Flüssigkeit in dem Glasfaden am untern Ende der Glaskugel in die Höhe stieg. Mit einer spitzen Flamme der Glasbläserlampe wurde der mit Flüssigkeit gefüllte Glasfaden durchgeschmolzen, sodass keine Luftblase zurück blieb.

Auf das obere Ende der Thermometerröhre wurde ein Glasröhrchen C mit durchbohrtem Kork gesteckt, die Glaskugel über einer Alkoholflamme erwärmt, und wenn alle Luft aus der Röhre vertrieben war, in das Glasröhrchen C Flüssigkeit gebracht. Das Thermometer wurde mit der Kugel in einen Metallbecher mit Wasser gehängt, in welchem möglichst viel Schnee oder Eis in kleinen Stücken vertheilt war.

Die Thermometerröhre ward dabei in einem passend durchbohrten und in zwei Theile zerschnittenen Kork *K* gefasst und in einem Holzbrettchen mit passender Oeffnung befestigt, welches, sobald es erforderlich schien, noch mit Bleigewichten beschwert wurde.

Bei Quecksilberthermometern, die etwa 1 kg wogen, ruhte die Thermometerkugel ausserdem lose auf einem eisernen Dreifusse, dessen horizontale Stäbe mit Kautschukröhren bezogen waren.

Der Metallbecher stand auf drei Korkscheiben in einer flachen Glasschale, die das an der Aussenseite condensirte Wasser auffing und durch zwei horizontale Siegellackstangen von einer ähnlichen umgekehrten Glasschale getrennt war.

Hatte das Thermometer die Temperatur 0° angenommen, so wurde das Glasröhrchen *C* entfernt, die Aussenfläche der Thermometerröhre sorgfältig getrocknet und erwärmt, und mit einer kleinen Alkoholflamme die Flüssigkeit bei *C* so stark erhitzt, dass ein Theil verdampfte, und der Flüssigkeitsmeniscus etwa in der Mitte zwischen *B* und *C* sich befand.

Bei dünnwandigen Thermometern lässt sich die letztere Operation umgehen, indem man ein reines leinenes Taschentuch über die Oeffnung *C* der Capillarröhre breitet und einen Theil der Flüssigkeit mit dem Munde in dieses hineinsaugt.

Die Flüssigkeitskuppe im Capillarrohr wurde an einem in 100 Theile getheilten Ocularmikrometer mit einem horizontalen Mikroskop beobachtet, dessen Objectiv 80 mm von dem Capillarrohr abstand. 1 Scalentheil war 0,06 mm und entsprach bei den meisten Apparaten etwa 0,000 0001 des ganzen Flüssigkeitsvolumens. Es konnte noch 0,1 Scalentheil mit Sicherheit geschätzt werden, so dass die einzelne Messung bis auf 0,01 des ganzen Volumens genau war.

Uebrigens hätte sich die Empfindlichkeit noch bedeutend erhöhen lassen, wenn dies wünschenswerth erschienen wäre. Die Flüssigkeit im Innern des Thermometers bildete die innere, das Eiswasser im Metallbecher die äussere Belegung einer Leydener Flasche oder eines Condensators.

Dieser Thermometercondensator wurde durch einen

Fallapparat und Commutator[1]) mit einer Leydener Batterie verbunden (Taf. II Fig. 6), deren Flaschen je 1000 qcm wirksame Oberfläche und eine mittlere Glasdicke von 3,2 mm hatten. Die 20 mm dicken Kugeln der Lane'schen Maassflasche von 490 qcm Oberfläche und 2,4 mm Glasdicke hatten 1 mm Abstand.

10 Funken der Maassflasche in der Leydener Batterie von 6 Flaschen entsprachen einer electrischen Potentialdifferenz von etwa 5000 Daniell'schen Elementen.

Im Folgenden wird die Anzahl der Flaschen in der Leydener Batterie durch s, die Anzahl der Funken der Maassflasche durch q bezeichnet werden. Die Leydener Batterie war dieselbe, die ich bei Versuchen über electrische Fortführung[2]) benutzt hatte. Die Ladung geschah mit einer Holtz'schen Electrophormaschine in der von Riess[3]) angegebenen Form.

Gleichzeitig mit dem Auslösen des Fallapparates, welcher die Verbindung des Thermometercondensators mit der Leydener Batterie herstellte, deren äussere Belegung zur Erde (den Gasröhren des Hauses) abgeleitet war, wurde mit der linken Hand ein Chronoskop in Gang gesetzt, und dessen Secundenzeiger durch einen zweiten Druck der Hand festgestellt, wenn die Senkung der Flüssigkeitskuppe ihren Maximalwerth erreicht hatte. Die Geschwindigkeit, mit der die Senkung eintrat, liess sich auf diese Weise bestimmen, ohne dass das Auge des Beobachters vom Mikroskop entfernt wurde.

Es ist dafür zu sorgen, dass Kugel und Thermometerröhre keine Luftblasen enthalten, weil sonst die Senkung der Flüssigkeit zu klein gefunden wird.

§ 3. Positive und negative Electricität. Bei allen Apparaten senkt sich die Flüssigkeitskuppe im Thermometerrohr sofort nach der Verbindung mit der Leydener Batterie, entsprechend einer Vergrösserung der Glaskugel.

Die Senkung ist dieselbe, mag die innere oder äussere

1) Berl. Monatsber. **16.** 1874. p. 194.
2) Quincke, Pogg. Ann. **118.** p. 513. 1861.
3) Riess, Berl. Monatsber. 16/3. 1874. p. 196.

Belegung des Thermometercondensators zur Erde abgeleitet sein, und die andere Belegung freie positive oder negative Electricität enthalten. So fand ich bei dem

Flintglasthermometer Nr. 17 mit 55,82 g Wasser:

Tabelle 1.

(Wanddicke 0,346 mm)

Freie Electricität	Innen	Aussen	Aussen	Innen
Electricitätsmenge q: in 3 Flaschen.	+20	−20	+20	−20
Senkung:	87,5 Sc.	88,95 Sc.	84,5 Sc.	87,6 Sc.

Mittel 87,39 Sc. = 10,45 Vol. $= \frac{\Delta v}{v} 10^6$.

was einer Volumenänderung von 10,45 Milliontel des ganzen Flüssigkeitsvolumens entsprechen würde.

Die Flüssigkeit sank bei diesem Apparate nach Auslösen des Fallapparates in etwa 1 Secunde bis zum tiefsten Stande. Nach der Entladung stieg sie wieder nahezu in derselben Zeit oder ein wenig langsamer bis 0,5 oder 1 Sc. unter der ursprünglichen Lage. Diese 0,5 oder 1 Sc. rühren zum Theil von elastischer Nachwirkung, zum Theil von electrolytischer Zersetzung des Glases her, wie noch später näher erörtert werden wird, und verschwinden sehr langsam oder gar nicht.

So lange die Batterie electrisch ist, bleibt der Stand des Thermometers ungeändert, abgesehen von dem schwachen Steigen, das der unvermeidliche Electricitätsverlust an die umgebende Luft herbeiführt.

Je länger das Thermometer electrisirt blieb, um so grösser war die Nachwirkung. Bei 4 Minuten dauernder Ladung betrug sie 4 Scalentheile.

Die Erscheinungen sind bei Thüringer Glas ähnlich, wie bei Flintglas. Jedoch tritt die Volumenänderung unter sonst gleichen Umständen langsamer ein und verschwindet weit langsamer. Die Nachwirkung ist bei Thüringer Glas weit grösser als bei Flintglas, denn es bleibt nach der Entladung der Batterie und des Thermometercondensators eine Senkung der Flüssigkeitskuppe zurück, die bei starken electrischen

Ladungen mehr als $^1/_3$ der ganzen durch die electrischen Kräfte plötzlich herbeigeführten Senkung betragen kann, und die selbst nach Minuten nur theilweise und langsam verschwindet.

Bleibt die Leydener Batterie bei leitender Verbindung mit dem Thermometercondensator nicht längere Zeit mit grosser Schlagweite geladen, oder zeigen sich mit der Stromrichtung Unterschiede in der Senkung, so kann man sicher sein, dass die Wandung der Glaskugel durchbrochen ist und electrische Fortführung durch die in anderer Weise oft gar nicht wahrnehmbare Oeffnung stattfindet, wie ich dies früher [1]) ausführlich beschrieben habe.

§ 4. Einfluss des Widerstandes des Schliessungsbogens. — Durch Einschalten von grossen Widerständen in den sonst metallischen Schliessungsbogen der Leydener Batterie wird die Senkung und die Geschwindigkeit, mit der dieselbe eintritt, verkleinert.

Eingeschaltet wurden dünne hohle Flintglasfäden mit eingeschmolzenen Platindrähten an den Enden, die eine Säule destillirtes Wasser oder absoluten Alkohol von l mm Länge und $2r$ mm Durchmesser enthielten. Die folgende Tabelle gibt die Senkung u in Milliontel des Flüssigkeitsvolumens und die Zeit, in der das Maximum der Senkung eintrat in Secunden bei zwei Apparaten aus Englischem Flintglas und Thüringer Glas, die diese Behauptung bestätigen.

Tabelle 2.

Volumenänderungen in Milliontel des Flüssigkeitsvolumens durch den Entladungsstrom einer Leydener Batterie von 6 Flaschen.

Funken der Maass-flasche	Metalldraht	Schliessungsbogen. Metalldraht + Wassersäule $l=100$ mm $2r=1{,}5$ mm	Metalldraht + Alkoholsäule $l=140$ mm $2r=0{,}82$ mm
Thermometer Nr. 10. Engl. Flintglas (Dicke 0,321 mm).			
	Vol.	Vol.	Vol.
20	3,392 in 1″	3,828 in 1″	1,601 in 20″
10	1,389 „ 1″	1,224 „ 1″	0,787 „ 20″
5	0,575 „ 40″	0,542 „ 60″	0,212 „ 60″

1) Quincke, Pogg. Ann. **118.** p. 515 ff. 1861.

Funken der Massflasche	Metalldraht	Schliessungsbogen Metalldraht + Wassersäule $l=100^{mm}$ $2r=1{,}5^{mm}$	Metalldraht + Alkoholsäule $l=140^{mm}$ $2r=0{,}82^{mm}$
Thermometer Nr. 2. Thüringer Glas (Dicke = 0,220 mm).			
20	Vol. 13,26 in 4″	Vol. 11,54 in 5,5″	Vol. 4,97 in 40″
20	8,90 „ 10″	9,24 „ 9,5″	4,97 „ 34″

Die Wanddicke des Thermometercondensators Nr. 2 wurde, als er zerbrochen war, direct gemessen und an verschiedenen Stellen zwischen 0,082 mm und 0,180 mm gefunden, also kleiner, als in der Tabelle angegeben ist. Von den Versuchen mit dem Apparat Nr. 2 wurde die erste Horizontalreihe am Morgen, die zweite am Abend desselben Tages erhalten.

Diese Abweichungen rühren zum Theil wohl von einer Aenderung der elastischen Beschaffenheit des Glases und der Reibung bei der Bewegung der Flüssigkeitskuppe und der Flüssigkeit an der Oberfläche der Glaswand der Capillarröhre her.[1]) Sie zeigen aber gleichzeitig die ausserordentliche Schwierigkeit übereinstimmende Resultate zu erhalten.

§ 5. Intensität des electrischen Stromes im Glase. — Wenn die Senkung der Flüssigkeit im Thermometerrohr von einer Erwärmung der Glashülle herrührte, so müsste ein merklicher electrischer Strom durch die Glashülle fliessen von der innern zur äussern Belegung des Thermometercondensators, so lange die Senkung dauert.

Es wurde daher in den Schliessungsbogen zwischen Condensator und Erde ein Multiplicator M (Taf. II Fig. 6) mit 12,000 Drahtwindungen und dämpfender Kupferhülse eingeschaltet, dessen ringförmiger Stahlmagnet mit einem Planspiegel fest verbunden war und durch ein Fernrohr und Millimeterscala in 2,4 m Abstand vom Spiegel beobachtet wurde.

Eine Nebenschliessung von kleinem Widerstand wurde unterbrochen, wenn der Entladungsstrom von dem Thermometercondensator nicht direct, sondern durch die Windungen des Multiplicators zur Erde fliessen sollte.

1) Quincke, Pogg. Ann. **118.** p. 543. 1861.

Trotz des Ueberzuges von geschmolzenem Schellack fliesst leicht ein Theil der Electricität über die Oberfläche des Glases, wenn sich auf diesem Wasser aus den Nebeln abgesetzt hat, die durch die Nähe des Eiswassers entstehen. Zum Schutze gegen diese Nebelbildung wurde der Metallbecher mit Stanniolplatten bedeckt.

Bei Flintglasthermometern zeigte der Multiplicator, sobald die Isolation gut war, niemals über 1 bis 2 Scalentheile Ablenkung, die auch constant blieb, solange die Leydener Batterie geladen war.

Bei Thermometern aus Thüringer Glas zeigt sich eine weit grössere Ablenkung, die bedeutend mit der Zeit abnimmt.

Des Beispiels wegen lasse ich hier die Versuche an dem Thermometer Nr. 9 folgen, an welchem der Platindraht 60 mm über dem Stanniolblatt in die Wandung des Capillarrohrs eingeschmolzen war und innerhalb des Rohres bis in die Glaskugel von 0,294 mm Wanddicke herabreichte. Dem Wasser des Thermometers waren ein paar Tropfen Kochsalzlösung zugesetzt.

Während ein Beobachter den Fallapparat und das Chronoskop auslöste und den Stand des Thermometercondensators beobachtete, öffnete ein zweiter Beobachter die Nebenschliessung kurze Zeit nach Auslösung des Fallapparates und beobachtete die constante Ablenkung der Multiplicatornadel, die allmählich in die Ruhelage zurückging. Die Nebenschliessung sicherte die isolirende Hülle der Multiplicatorwindungen gegen die Durchbrechung durch die Inductionsfunken der electrischen Ströme, die unmittelbar nach dem Niederlassen des Fallapparates den Schliessungsbogen durchstürmen.

Hr. Dr. Elster hatte die Güte, mich bei diesen Beobachtungen zu unterstützen.

Die folgende Tabelle enthält die Ablesungen an Thermometer und Multiplicator in Scalentheilen zu den in der ersten Spalte angegebenen Zeiten. 1″ bedeutet, dass sofort, etwa 1 Secunde nach Niederlassen des Fallapparates, Thermometer und Multiplicator beobachtet wurden. Das Zeichen ∺ bedeutet, dass die Leydener Batterie und der Thermometer-

condensator durch metallische Verbindung der innern und äussern Belegung kurz zuvor entladen worden waren, wobei die Multiplicatorwindungen durch Einschalten der Nebenschliessung ausgeschaltet waren; das Zeichen O bedeutet, dass der Multiplicator wieder in den Erddraht eingeschaltet war, um den etwa vorhandenen Polarisationsstrom zu bestimmen.

Tabelle 3.

Thermometer Nr. 9. Thüringer Glas.
Wandstärke 0,294 mm; mit 38,84 g verdünnter Kochsalzlösung.

$$1 \text{ Sc.} = 0{,}1772 \frac{\Delta v}{v} \cdot 10^6.$$

Zeit	Thermometer			Multiplicator		
$s = 6$	$+20$	q $+10$	$+5$	$+20$	q $+10$	$+5$
0″	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.
1″	22,7	5,7	1,3	53,9	9,5	5,3
20″	29,2	8,3	2,1	26,7	4,8	2,3
40″	29,7	8,4	2,3	11,9	3,6	1,3
60″	30,4	9,3	2,5	8,6	3,2	1,2
⌗	16,2	2,8	0,8	—	—	—
O	—	—	—	−6,8	−4,2	−2,4
$s = 6$	-20	q -10	-5	-20	q -10	-5
0″	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.
1″	22,3	5,4	1,2	−42,0	−9,2	−3,7
20″	29,5	9,2	2,0	−19,0	−4,9	−0,9
40″	30,9	10,0	2,4	−11,5	−3,7	−0,6
60″	31,2	10,4	2,5	−11,4	−3,1	−0,6
⌗	16,0	5,5	1,2	—	—	—
O	—	—	—	+ 3,4	+3,6	+2,0
$s = 3$	$+10$	q $+5$		$+10$	q $+5$	
0″	0 Sc.	0 Sc.	—	0 Sc.	0 Sc.	—
1″	22,7	6,2	—	32,7	11,4	—
20″	25,4	8,8	—	12,1	4,5	—
40″	26,2	9,3	—	8,4	3,6	—
60″	26,1	9,4	—	6,6	2,7	—
⌗	13,3	3,3	—	—	—	—
O	—	—	—	−5,3	−3,7	—

Zeit	Thermometer			Multiplicator		
		q			q	
$s=3$	-10	-5		-10	-5	
0″	0 Sc.	0 Sc.	—	0 Sc.	0 Sc.	—
1″	18,3	5,4	—	−27,6	−10.6	—
20″	21,9	7,0	—	−11,6	−3,9	—
40″	22,0	7,1	—	− 7,3	−3,0	—
60″	21,1	7,2	—	− 6,4	−2,6	—
#	11	1,7	—	—	—	—
○	—	—	—	+ 4,1	+3,0	—

Mit Alkoholsäule im Schliessungsbogen ($l = 140$ mm; $2r = 0{,}82$ mm)

		q			q	
$s=6$	20	10	5	20	10	5
0″	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.	0 Sc.
1″	7,7	0	0,2	60,7	20,8	8,0
20″	11,9	4,7	1,5	39,4	9,9	3,2
40″	12,9	5,5	2,3	28,8	7,6	2
60″	12,3	5,8	2,7	21,3	6,0	1,6
#	7,5	5,2	2,2	—	—	—
○	—	—	—	−13,6	−7,1	−5,8

Während die Ablenkung der Multiplicatornadel mit dem Zeichen der Electricität in der Batterie ebenfalls ihr Zeichen wechselt, ist die Senkung der Flüssigkeit davon unabhängig.

Die letztere wächst nicht proportional der Ablenkung des Multiplicators und ist noch merklich, wenn der Strom im Multiplicator schon sehr gering ist.

Bei derselben Dichtigkeit der freien Electricität auf der inneren Belegung der Leydener Batterie sind Volumenänderung der Thermometerkugel und Ablenkung der Multiplicatornadel bei grösserer Oberfläche der Batterie grösser.

Der Strom im Multiplicator wird durch Einschalten einer Alkoholsäule nicht geschwächt, während die Senkungen der Flüssigkeit im Thermometerrohr dadurch verkleinert werden, besonders bei grösserer Dichtigkeit der freien Electricität.

Es spricht dies für eine Abhängigkeit der Volumenänderung der Kugel von der Geschwindigkeit, mit welcher

das Glas der Thermometerkugel in den electrischen Zustand übergeführt wird.

Senkung der Flüssigkeit im Thermometer-Condensator und Strom im Multiplicator sind um so grösser, je dünner die Wanddicke der Thermometerkugel ist, wie die folgende Tabelle zeigt:

Tabelle 4.

Thüringer Glas.

6 Leydener Flaschen.

Thermometer Nr.	Wandstärke der Glaskugel	Durchmesser	Senkung des Thermometers in Milliontel des Volumens q = 20	q = 10	q = 5	Ablenkung des Multiplicators q = 20	q = 10	q = 5
	mm	mm	Vol.	Vol.	Vol.	Sc.	Sc.	Sc.
2	0,220	38,35	12,06	3,88	1,34	136,4	40,0	9,3
9	0,294	42,00	5,46	1,75	0,44	10,0	3,1	0,9
4	0,590	26,60	2,20	0,62	0,41	1,6	1,0	0,5

Die angegebenen Zahlen sind das Mittel aus je drei Versuchsreihen mit positiver und negativer Ladung der Leydener Batterie.

§ 6. Einfluss von Dicke und Beschaffenheit der Wand der Thermometerkugel. — Um zu sehen, in welcher Weise die Senkung der Flüssigkeitskuppe von der Dicke der Glaswand abhängt, wurde eine Reihe von Thermometercondensatoren aus Flintglas und Thüringer Glas untersucht bei verschiedener Oberfläche und Electricitätsmenge der Leydener Batterie.

Die Resultate der Versuche sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die angegebenen Zahlen sind das Mittel aus mehreren Versuchsreihen mit positiver und negativer Ladung der Leydener Batterie und freier Electricität auf der Innen- oder Aussenseite des Thermometercondensators. Die Apparate Nr. 8 und 9 aus Thüringer Glas enthielten Wasser mit ein paar Tropfen Kochsalzlösung; Nr. 60 und 61 sehr verdünnte Salzsäure; die anderen Apparate reines Wasser.

Tabelle 5.

Thermometercondensatoren mit Wasser gefüllt.

Nr.	Wanddicke der Glaskugel	Durchmesser der Glaskugel	Volumen	Electrische Capacität	Volumenänderung in Milliontel des ursprünglichen Volumens bei 0°. $\frac{\Delta v}{v} \cdot 10^6$. 6 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge 40	6 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge 20	6 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge 10	6 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge 5	3 Leydener Flaschen m. Electricitätsmenge 20	3 Leydener Flaschen m. Electricitätsmenge 10	3 Leydener Flaschen m. Electricitätsmenge 5
	Englisches Flintglas										
	mm	mm	ccm								
30	0,142	46,5	48,32	1,955	—	9,865	2,984	—	—	—	—
32	0,207	51,2	70,49	1,531	—	9,036	2,669	0,936	—	7,353	1,756
18	0,258	56,45	97,09	2,110	—	7,278 5,703	2,300	0,657	—	5,403	1,559
10*	0,321	44,67	40,10	0,866	—	5,593 4,874	1,579	—	—	4,822 3,750	1,419
25	0,297	60,20	116,36	—	—	5,425	1,600	—	—	4,100	—
23	0,271	55	90,90	1,820	—	4,533	1,589	—	—	3,651	—
21	0,319	52	75,34	1,248	—	3,631	1,154	—	—	3,228	—
22	0,286	62,1	124,44	2,120	—	3,258	—	—	—	—	—
17	0,346	47,1	55,82	1	12,82	3,149	0,940	0,279	10,45	2,989	—
61**	0,407	56,1	89,43	0,966	3,485	0,866	0,287	—	2,678	0,728	0,264
60**	0,591	57,95	96,98	0,610	1,145	0,273	0,069	—	1,028	0,281	0,083
	Thüringer Glas										
	mm	mm	ccm								
2	0,220	38,35	24,00	1,950	—	12,06 11,32	3,884 3,179	1,341	—	—	2,900
27	0,238	72,50	185,40	(0,474)	—	5,010	1,327	—	—	2,797	0,727
8	0,283	44,44	40,64	0,840	—	4,246 3,741	0,651 0,569	0,032	—	—	—
9*	0,294	42,00	38,84	0,872	—	5,459	1,746	0,443	—	4,271	1,453
11	0,494	41,87	31,93	—	5,683	2,102	—	—	—	—	—
4	0,590	26,60	8,88	—	4,323	2,746 2,196	1,990 0,618	0,412	—	—	—
16	0,700	49,10	61,16	0,397	2,787	0,755	—	—	2,669	0,789	—

Die Versuche zeigen an demselben Thermometer grosse Verschiedenheiten, zum Theil wohl wegen der starken electrischen Kräfte, denen das Glas ausgesetzt wurde, die nahe an der äussersten Grenze derjenigen Ladung lagen, die das Glas noch vertragen konnte, ohne durchschlagen zu werden.

Berücksichtigt man, dass die Wanddicke der Thermometerkugel nicht überall gleich, die Dicke also nur angenähert richtig bestimmt ist, so zeigen vorstehende Versuche die Senkung der Flüssigkeit oder die Volumenänderung der Glaskugel um so grösser, je grösser die Dichtigkeit der

freien Electricität und die Oberfläche der Leydener Batterie, und je dünner die Glaswand der Thermometerkugel ist.

Gewöhnlich ist die Volumenänderung nahezu proportional dem Quadrate der Dichtigkeit der freien Electricität und umgekehrt proportional dem Quadrat der Wanddicke (vgl. unten § 16).

Die Volumenänderung ist bei gleicher Wanddicke proportional dem Hohlraum, den die Flüssigkeit einnimmt.

Trotz des sehr verschiedenen electrischen Leitungsvermögens von Flintglas und Thüringer Glas (wie aus den Multiplicatorbeobachtungen des § 5 hervorgeht) sind die Volumenänderungen bei Flintglas nur wenig kleiner, als bei Thüringer Glas.

Das Ueberwiegen einzelner Apparate, wie z. B. Nr. 10 oder Nr. 9 erklärt sich durch grössere Ungleichheiten in der Wanddicke an den verschiedenen Stellen der Thermometerkugeln, da die Tabellen nur die mittlere Wandstärke geben, und dünnere Wände eine grössere Volumenänderung als dickere erfahren.

§ 7. Einfluss der Flüssigkeit im Thermometer. Füllt man denselben Apparat einmal mit Wasser und dann mit Alkohol oder Quecksilber, so findet man gewöhnlich bei gleicher Ladung der Batterie für Wasser eine grössere Senkung der Flüssigkeitskuppe. So fand ich bei Thüringer Glas:

Tabelle 6.

Volumenänderung in Milliontel des Flüssigkeitsvolumens.
6 Leydener Flaschen.

Flüssigkeit.	q 40	q 20	q 10
Thermometer Nr. 2. ($D = 0{,}220$ mm)			
		Vol.	Vol.
Wasser	—	12.06	3,88
Alkohol	—	8,00	2,61
Thermometer Nr. 11. ($D = 0{,}494$ mm)			
	Vol.	Vol.	
Wasser	5,68	2,10	—
Quecksilber. .	3,41	1,25	—

Oft zeigte sich bei Quecksilber gar keine Volumenänderung, wie dies auch schon Govi gefunden hat.

Bei nicht leitenden Flüssigkeiten, wie Terpentinöl, im Thermometercondensator beobachtet man keine Senkung der Flüssigkeit im Capillarrohr beim Electrisiren des Thermometers.

Die Verschiedenheit der Volumenänderungen bei verschiedenen Flüssigkeiten im Thermometercondensator hat ihren Grund in dem durch den Wechsel der Flüssigkeit veränderten Leitungswiderstand des Schliessungsbogens und der verschiedenen Reibung der Flüssigkeit und besonders der Flüssigkeitskuppe gegen die Wandung des Capillarrohres. Beide ändern sich, wie ich früher[1]) ausführlich gezeigt habe, mit der Zeit, welche das Wasser oder die betreffende Flüssigkeit in den Capillarröhren steht.

Sorgt man dafür, dass Widerstand und Reibung der Flüssigkeit möglichst gleichartig sind, so findet man auch dieselbe Volumenänderung.

Zu dem Ende wurde nur die Glaskugel eines Thermometercondensators mit Quecksilber oder Wasser gefüllt, darüber aber in die Capillarröhre stets frisches Wasser gebracht, so dass bei beiden Füllungen electrischer Leitungswiderstand und Reibung der Flüssigkeit im Capillarrohr als wesentlich gleich angesehen werden konnten. Ich fand dann:

Tabelle 7.

Volumenänderung in Milliontel des Flüssigkeitsvolumens.

Flüssigkeit	$s = 6$ q 40	20	10	$s = 3$ q 20	10
Thermometer Nr. 21 ($D = 0{,}319$ mm) Flintglas					
		Vol.	Vol.		Vol.
Wasser	—	3,631	1,154	—	3,228
Quecksilber . .	—	3,262	0,569	—	3,031
Thermometer Nr 16 ($D = 0{,}700$ mm) Thüringer Glas.					
	Vol.	Vol.		Vol.	Vol.
Wasser	2,787	0,755	—	2,669	0,789
Quecksilber . .	2,728	0,510	—	2,357	0,615

1) Quincke, Pogg. Ann. **113.** p. 519 u. 592. 1861.

Diese Versuche zeigen sehr nahe dieselbe Volumenänderung unter denselben Bedingungen, mochte die Thermometerkugel mit Wasser oder mit Quecksilber gefüllt sein. Der etwas geringere Werth der Senkung bei Quecksilber als bei Wasser könnte von der besseren Wärmeleitung der ersteren Flüssigkeit herrühren.

Wenn nämlich die Ausdehnung der Glaswand der Thermometerkugel von der Wärme herrührte, die der schwache Entladungsstrom der Leydener Batterie in der Glaswand von grossem electrischen Leitungswiderstand entwickelt, so müsste die Volumenänderung um so kleiner gefunden werden, je geringer die Wärmecapacität (calorimetrische Wasserwerth) gleicher Volumina der umgebenden Flüssigkeiten, und je besser das Leitungsvermögen dieser Flüssigkeiten für Wärme ist.

Nennt man

k die Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit für Wärme,

C die specifische Wärme der Flüssigkeit,

σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit,

so ist nach Lundquist[1]) und Ångström[2]) für

Wasser: $k = 0{,}093$, Quecksilber: $k = 1{,}06$.

Für Quecksilber $C = 0{,}033$ und $\sigma = 13{,}6$ gesetzt, giebt den Quotienten

$$\frac{k}{C\sigma} = 0{,}476 \text{ für Quecksilber}$$
$$= 0{,}093 \text{ für Wasser.}$$

Der Quotient hat für Wasser nahezu $^1/_5$ des Werthes, wie für Quecksilber. Da nun die Aussenseite der Thermometerkugel stets mit Eiswasser in Berührung war, so wird (das äussere Wärmeleitungsvermögen an der Grenze von Glas und Wasser oder Glas und Quecksilber als gleich angenommen) der Wärmeverlust der Glaswand der Thermometerkugel bei Füllung mit Wasser und Quecksilber sich wie 1 : 3 verhalten müssen.

Die Volumenänderung der Thermometerkugel müsste also bei Füllung mit Wasser grösser als bei Füllung mit Quecksilber sein; bei dünner Glaswand auffallender, als bei dicker Glaswand, wie es in der That die Versuche ergeben.

1) Lundquist, Upsala Universitets Årskrift. p. 28. 1869.

2) Ångström, Pogg. Ann. **128.** p. 640. 1864.

Da durch besondere Versuche der cubische Ausdehnungscoëfficient

für Flintglas	0,000 026
für Thüringer Glas	0,000 032

gefunden wurde, so würde schon eine mittlere Temperaturerhöhung von 0,1° C. die grösste bei Quecksilber beobachtete Volumenänderung erklären.

§ 8. Aenderung des innern und äussern Volumens. — Das Sinken der Flüssigkeit im Thermometer rührt nach den im Vorstehenden mitgetheilten Versuchen von einer Vergrösserung des Hohlraums der Thermometerkugel her, die bei dem Electrisiren der Glaswand sofort eintritt und nach der Entladung wieder verschwindet.

Eintreten und Verschwinden der Vergrösserung geschieht fast augenblicklich bei Flintglas; langsamer bei Thüringer Glas.

Läge der Grund der Erscheinung in einer Erwärmung der Glaswand, so müsste das äussere Volumen der Glaskugel in demselben Verhältniss zunehmen, wie das innere Volumen. Dasselbe wäre zu erwarten, wenn durch die electrischen Kräfte ein Druck auf die beiden Grenzflächen der Thermometerkugel ausgeübt und dadurch Länge und Breite der einzelnen Streifen der Kugelwandung vergrössert worden wären (s. unten § 27).

Ein Thermometercondensator Nr. 22 aus Flintglas wurde in eine passende Durchbohrung in der Mitte einer Glasplatte P (Taf. II Fig. 2) mit Siegellack eingekittet. In einer seitlichen Durchbohrung war eine Capillarröhre r_2 ebenso befestigt. Durch die Wandungen beider Capillarröhren r_1 und r_2 führten eingeschmolzene Drähte in das Innere der Röhren. Die Glasplatte P wurde auf dem oberen abgeschliffenen Rande H einer umgekehrten Glasglocke von 70 mm Durchmesser mit einem Kitt aus Schellack und Canadabalsam luftdicht befestigt und mit demselben Kitt ein eingeschliffener Glasstöpsel am anderen Ende der Glasglocke eingesetzt. Die Thermometerkugel von 62,2 mm Durchmesser und 0,286 mm Wandstärke befand sich im

Innern der Glasglocke. Das Innere des Thermometers und der Raum zwischen Thermometerkugel und Glasglocke wurde mit ausgekochtem und nahezu erkaltetem destillirtem Wasser gefüllt. Ersteres bildete die innere, letzteres die äussere Belegung des Thermometercondensators, der in einem Dreifuss aus Eisendraht in einem grösseren Metallgefäss mit schmelzendem Schnee stand und dadurch auf 0° gehalten wurde. Der Stand der Flüssigkeit in den Thermometerröhren wurde mit zwei horizontalen Mikroskopen und Ocular-Mikrometern in der gewöhnlichen Weise beobachtet. Das Metallgefäss war mit dem Platindraht der Röhre r_2 leitend verbunden und durch untergelegte Glasschalen und Siegellackstangen isolirt. Im übrigen war die Anordnung dieselbe, wie bei den früheren Versuchen (Taf. II Fig. 6).

Bei dem Electrisiren sank die Flüssigkeit im Capillarrohr r_1 und stieg um nahezu dieselbe Grösse im Capillarrohr r_2. Bei der Entladung ging die Flüssigkeit in beiden Röhren sofort bis nahe in die ursprüngliche Lage zurück.

Es wurde gefunden:

Tabelle 8.

	Freie Electricität	Volumenänderung in Milliontel des innern Hohlraums	
		Innen	Aussen
		Vol.	Vol.
$s = 6$ $q = 20$	Innen	−3,435	3,712
„ „	Aussen	−2,198	2,221
$s = 3$ $q = 10$	Innen	−1,835	1,935
„ „	Aussen	−1,330	1,707
$s = 3$ $q = 15$	Innen	−4,842	5,260

Mit der Electricitätsmenge 15 wurde nur eine Beobachtung gemacht. Die übrigen Zahlen sind das Mittel aus mehreren Bestimmungen.

Die geringeren Werthe der Volumenänderung bei Verbindung der äussern Belegung des Thermometercondensators mit der innern Belegung der Leydener Batterie rühren wohl von der weniger vollkommenen Isolation des grossen Eiswassergefässes her.

Es hat grosse Schwierigkeiten, die Temperatur constant

zu halten in der Flüssigkeit innerhalb und ausserhalb der Thermometerkugel, da Temperaturschwankungen durch Leitung und Strahlung sich immer zuerst bei der äussern Flüssigkeit[1]) bemerkbar machen. Aus diesem Grunde sind Messungen an diesem Doppelthermometer ungenauer, als an den gewöhnlich benutzten einfachen Thermometercondensatoren.

§ 9. Einfluss der Umgebung. — Es wäre möglich, dass der schwache electrische Strom, welcher von der innern zur äussern Belegung durch die Glaswand der Thermometerkugel hindurch fliesst, die Glaswand erwärmte und dadurch das Sinken der Flüssigkeit bei dem Electrisiren des Thermometers herbeiführte. Die Erscheinung könnte dabei doch plötzlich auftreten und verschwinden, wie ein dünner Platindraht beim Schliessen des galvanischen Stromes plötzlich aufleuchtet und beim Oeffnen ebenso plötzlich wieder dunkel erscheint. Das Glühen bleibt dagegen aus, wenn der Platindraht statt von Luft, von Wasser umgeben ist, welches die Wärme besser leitet und eine grössere Wärmecapacität als Luft besitzt.

Wäre diese Ansicht richtig, so müsste auch die Sen-

---

1) Man nimmt gewöhnlich an, dass die Temperatur im Innern einer mit Wasser durchtränkten Schneemasse 0° sei. Dabei wird aber unberücksichtigt gelassen, dass die auffallenden Wärmestrahlen zum Theil die Eismasse durchdringen, vom Glase und dem Inhalt der Thermometerkugel absorbirt und diese dadurch erwärmt werden.

Ein empfindliches Quecksilberthermometer in der Mitte eines grossen mit Wasser durchtränkten kugelförmigen Schneeballs, der in einer flachen Porzellanschale liegt, steigt um mehrere Zehntel Grade, wenn man die Sonnenstrahlen direct auf den Schnee fallen lässt; um etwas weniger, wenn man das diffuse Licht des Himmels einwirken lässt, der blaue Stellen und weisse dichte Wolken enthält. Rückt man das Gefäss mit dem Schnee und dem Thermometer in den Schatten oder vom Fenster fort, so sinkt das Thermometer sogleich wieder. Form und Gefüge des Schneeballs beeinflussen natürlich den Gang der gebrochenen Strahlen und damit die Temperaturerhöhung des Thermometers.

Eispunktbestimmungen an Thermometern müssen daher stets unter Ausschluss des Lichtes, am besten in Metallgefässen, vorgenommen werden.

lung der Flüssigkeit im Thermometer geringer sein, wenn dieses von Wasser, statt von Luft umgeben wäre, unter übrigens gleichen Umständen.

Es wurde daher die Aussenfläche des Thermometer-Condensators Nr. 22 aus Flintglas mit einer dünnen Silberschicht von etwa 0,000 075 mm Dicke überzogen und dadurch leitend gemacht. Das Capillarrohr r_2 der Glasplatte des Apparates (Taf. II Fig. 2 § 8) und das Wasser zwischen Glasglocke und Thermometerkugel wurden entfernt und statt der Capillarröhre ein Stanniolstreifen in die Oeffnung der Glasplatte eingeführt, der mit der Silberbelegung in leitender Verbindung war. Der ganze Apparat stand bis zum untern Rande der Glasplatte in einem grössern Metallgefässe mit gestossenem Eis und Wasser. Er wurde 18 Stunden in einen grössern Eisschrank gestellt, sodass man sicher war, dass Thermometer nebst Inhalt und Umgebung die Temperatur 0° angenommen hatten.

Die innere und äussere Belegung der Thermometerkugel wurde in der früher § 2 beschriebenen Weise (Taf. II Fig. 6) mit der innern und äussern Belegung der Leydener Batterie von 6 Flaschen verbunden und die Senkung der Flüssigkeit in der Capillarröhre gemessen für 20 Funken der Maassflasche.

Dann wurde Wasser, welches ebenfalls in dem Eisschranke über Eisstücken gestanden und die Temperatur 0° angenommen hatte, durch die Oeffnung der Glasplatte in den Raum zwischen Thermometerkugel und Glasplatte gegossen und von neuem die Senkung bestimmt. Der Versuch ergab

	eine Senkung von
für die Thermometerkugel in Luft	39,93 Sc. = 2,282 Vol.
„ „ „ „ Wasser	40,90 „ = 2,337 „
nach Entfernung des Wassers	39,67 „ = 2,268 „

wobei die Senkung in Scalentheilen des Beobachtungsmikroskops und in Millionteln des Volumens der Thermometerkugel gegeben ist.

Eine sechs Tage später angestellte Versuchsreihe gab für die Thermometerkugel in Luft und Wasser beide Male eine Senkung von: 51,3 Sc. = 3,258 Vol.

Man findet also dieselbe Volumenänderung der Thermometerkugel, mag diese von Luft oder Wasser umgeben sein.

Es spricht dies gegen eine von electrischen Strömen herrührende Erwärmung der Glaswand.

§ 10. Capacität der Thermometercondensatoren. — Bei der Unabhängigkeit der Volumenänderung vom Vorzeichen der Electricität (s. § 3) wäre zu erwarten, dass diese Volumenänderung proportional dem Quadrate der Dichtigkeit der freien Electricität auf der innern Belegung der Leydener Batterie oder proportional dem Quadrate des Potentialunterschiedes P beider Belegungen des Thermometercondensators wäre.

Dann müsste bei derselben Oberfläche der Leydener Batterie die Volumenänderung desselben Thermometercondensators proportional dem Quadrate der Electricitätsmenge q oder proportional dem Quadrate der Anzahl Funken der Maassflasche sein. Die Zahlen der Tabelle 5 zeigen nur eine Annäherung an eine solche Beziehung.

Nennt man C_6 oder C_3 die Capacität der Leydener Batterie bei sechs oder drei Flaschen, c die Capacität des betreffenden Thermometercondensators, P_6 oder P_3 den Potentialunterschied beider Belegungen nach Niederlassen des Fallapparates, wenn die Electricitätsmenge $2q$ oder q in der Leydener Batterie enthalten war, so ist:

$$2q = (C_6 + c)\, P_6 \tag{1}$$

$$q = (C_3 + c)\, P_3. \tag{2}$$

oder:

$$\frac{P_6}{P_3} = \frac{2 \cdot (C_3 + c)}{C_6 + c}. \tag{3}$$

Nahezu war $C_6 = 2\, C_3$.

Nennt man ferner u_6 oder u_3 die Volumenänderung desselben Thermometercondensators bei dem Potentialunterschiede P_6 oder P_3, so würde:

$$\frac{P_6}{P_3} = \sqrt{\frac{u_6}{u_3}} \tag{4}$$

sein müssen, wenn die Volumenänderung proportional mit P^2 wäre. Die Zahlen der Tabelle 5 zeigen, dass im all-

gemeinen $u_6 > u_3$ oder $P_6 > P_3$ war, dass der Potentialunterschied der Batteriebelegungen durch Herstellung der leitenden Verbindung mit dem Thermometercondensator abgenommen hatte, oder dass die Capacität c des Thermometercondensators nicht verschwindend klein gegenüber der Capacität der Leydener Batterie war.

In der That zeigte sich durch directe Bestimmungen, dass die Capacität der Thermometercondensatoren ebenso gross oder zum Theil noch grösser war, als die Capacität einer Leydener Flasche der von mir benutzten Batterie.

Die Capacität des Flintglasthermometers Nr. 17 wurde mit den Capacitäten der anderen Apparate verglichen, indem man mit einem Multiplicator die Electricitätsmengen bestimmte, die dieselben bei gleichem electrischen Potentialunterschiede der Belegungen enthielten.

Bei der ersten Methode wurde die innere Belegung des betreffenden Apparates durch einen isolirten Draht mit der inneren Belegung des Flintglasthermometers Nr. 17 und dem Knopf einer (bis etwa 1,5 mm Schlagweite) passend geladenen Leydener Flasche verbunden, während alle drei äusseren Belegungen zur Erde abgeleitet waren. Der isolirte Draht wurde dann entfernt und die Thermometercondensatoren einzeln durch einen Multiplicator mit 12000 Windungen Kupferdraht zur Erde entladen. Der mit Fernrohr und Scala beobachtete Ausschlag der durch einen Hauy'schen Stab astastirten Magnetnadel kann dann mit genügender Genauigkeit proportional der Electricitätsmenge oder der Capacität des Thermometercondensators gesetzt werden.

Um den Einfluss des Electricitätsverlustes an die Luft zu eliminiren, wurde zuerst die Electricitätsmenge des Apparates Nr. 17 und dann die des andern Apparates gemessen. Darauf folgte eine gleiche Reihe Beobachtungen, bei denen der zweite Apparat dem ersten voranging. Aus beiden Reihen wurde das Mittel genommen.

Bei den Flintglasthermometern liessen sich diese Bestimmungen mit genügender Genauigkeit ausführen. Dagegen wird bei den Thermometercondensatoren aus Thüringer Glas die Capacität um so kleiner gefunden, je längere Zeit

nach der Electrisirung des Condensators verflossen ist. Man findet weit grössere Werthe für die Capacität bei Thüringer Glas, wenn die Messungen an diesem den Messungen an Flintglas vorausgehen. In der That weisen auch schon die Ablenkungen des Multiplicators (§ 5) auf einen verhältnissmässig starken Strom hin, der die Glaswand des Thermometers durchfliesst und die disponible Ladung des Thermometercondensators herabsetzen muss.

Das Glas meiner Leydener Batterie zeigte zwar eine geringere Abnahme der Ladung (Rückstandsbildung) als Thüringer Glas, aber dieselbe war immerhin noch bedeutend genug, um die Messungen der Capacität unsicher erscheinen zu lassen.

Bei der zweiten Methode wurden die Capacitäten der Thermometercondensatoren oder Leydener Flaschen für geringere Potentialdifferenzen verglichen.

Die innere und äussere Belegung des Thermometercondensators T konnte, wie aus der schematischen Zeichnung (Taf. II Fig. 8) zu ersehen ist, mittelst einer gewöhnlichen Pohl'schen Wippe P ohne Kreuzdrähte bald mit den Polen einer 44gliedrigen Chromsäurekette K, bald mit einem äusserst empfindlichen Multiplicator M von 18000 Windungen mit astasirtem Magnet und Spiegelablesung verbunden werden.

Die für diese Versuche nothwendige Isolation war dadurch erreicht, dass die sechs metallenen Quecksilbernäpfchen auf einem mit geschmolzenem Schellack überzogenen Flintglasringe festgeklebt waren. Die Wippe selbst hatte eine metallene, von dem übrigen Theile durch Schellack isolirte Handhabe und bedurfte zum Umlegen noch nicht $^1/_2$ Secunde, sodass der Electricitätsverlust durch die Glaswand der Thermometerkugel verschwindend klein war bei Flintglas.

Die Ausschläge des Multiplicators sind dann proportional der Capacität des Thermometercondensators und der electromotorischen Kraft der benutzten galvanischen Kette. Die einzelnen Thermometer wurden abwechselnd mit dem Thermometer Nr. 17 verglichen, dem ein Ausschlag von 46 Scalentheilen entsprach.

Versuche, den Ausschlag der Multiplicatornadel von

20 Secunden Schwingungsdauer durch mehrfaches Laden und Entladen des Thermometercondensators zu vergrössern, führten nicht zum Ziel, da die Ladungs- und Entladungszeit der Thermometercondensatoren, auch bei Flintglas, mehrere Secunden dauerte.

Die Bestimmungen wurden nach der ersten Methode bei Zimmertemperatur von mir selbst, die nach der zweiten Methode bei 0° von Hrn. Alexander Pogorelko im Heidelberger Laboratorium ausgeführt.

Die Resultate der Messungen nach beiden Methoden sind in Tabelle 9 zusammengestellt. Dabei ist die Capacität des Thermometercondensators Nr. 17 als Einheit genommen, welche nahezu $\frac{1}{100}$ Mikrofarad betrug.

Tabelle 9.

Nr.	Wanddicke	Durchmesser der Glaskugel	Volumen	Capacität mit Leydener Flasche I.	Capacität mit 44 gldr. Chromsäure Kette II.	Dielectricitätsconstante J
			Englisches Flintglas			
	mm	mm	ccm			
30	0,142	46,5	48,32	2,050	1,955	0,823
32	0,207	51,2	70,49	1,557	1,531	0,940
18	0,258	56,45	97,09	2,176	2,110	1,095
10	0,321	44,67	40,10	0,882	0,866	0,893
23	0,271	55,0	90,90	1,821	1,820	1,045
21	0,319	52,0	75,34	1,288	1,248	0,944
22	0,286	62,1	124,44	2,126	2,120	1,008
17	0,346	47,1	55,82	1,000	1,000	1,000
61	0,407	56,1	89,43	1,073	0,966	0,801
60	0,591	57,95	96,98	0,645	0,610	0,688
			Thüringer Glas			
2	0,220	38,35	24,00	0,217	1,950	1,869
27	0,238	72,50	185,40	?	?	?
8	0,283	44,44	40,64	0,626	0,840	0,772
9	0,294	42,00	38,84	0,607	0,872	0,932
16	0,700	49,10	61,16	0,341	0,397	0,739

Aehnliche Messungen nach der zweiten Methode mit Wassersäulen im Multiplicatorkreise an den einzelnen Flaschen der Leydener Batterie und der Lane'schen Maassflasche, welche mehrere Monate unbenutzt gestanden hatten,

zeigten, dass dieselben mit dem Thermometercondensator Nr. 17 nahezu gleiche Capacität hatten.

Die Resultate der zweiten Methode sind insofern sicherer, als die der ersten, als zwischen Ladung und Entladung des Condensators weniger Zeit verfloss, der Electricitätsverlust an die Umgebung und durch den Strom im Innern des Glases des Condensators also geringer sein musste. Dass dieser letztere in der That sehr merklich ist und bei Thüringer Glas weit grösser, als bei Flintglas, zeigen die Unterschiede der nach beiden Methoden erhaltenen Zahlen.

Das Glas des Thermometers Nr. 27 leitete so gut, dass die Capacität desselben sich gar nicht bestimmen liess.

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt:

$$\frac{c}{C_3} = \frac{\frac{C_6}{C_3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_6}{u_3}} - 1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_6}{u_3}}}. \tag{5}$$

Berechnet man für verschiedene Werthe von q dies Verhältniss $\frac{c}{C}$ bei demselben Thermometercondensator aus den Zahlen der Tabelle 5, so findet man Werthe, die untereinander und mit den direct gemessenen Werthen der Capacität sehr wenig übereinstimmen. Dies spricht ebenfalls gegen die Richtigkeit der Gleichung (4).

Die Werthe der Capacität lassen sich noch benutzen, um die Bestimmung der Wanddicke der Thermometerkugeln zu controlliren.

Die Capacität einer hohlen Glaskugel vom Radius R und der Wanddicke D ist:

$$C = \Delta\cdot\frac{R^2}{D} = \lambda\cdot\frac{4\pi R^2}{D}, \tag{6}$$

wo Δ die sogenannte Dielectricitätsconstante, und λ das electrische Leitungsvermögen des Glases bezeichnen.

Berechnet man aus den Dimensionen der Thermometerkugel (Wanddicke und Durchmesser) und der nach der zweiten Methode bestimmten Capacität den Werth der Dielec-

tricitätsconstante Δ, so müsste dieser für alle Flintglasthermometer denselben Werth 1, für alle Thermometer aus Thüringer Glas einen bedeutend grösseren Werth haben, da λ für Thüringer Glas nach § 5 wohl 20 mal grösser, als für Flintglas ist.

Die für Flintglas erhaltenen Zahlen weichen, wie die letzte Spalte der Tabelle 9 zeigt, nicht mehr von 1 ab, als nach der Unsicherheit der Bestimmung von D und R zu erwarten war.

Für Thüringer Glas fallen die Zahlen viel zu klein aus, weil eben C zu klein gefunden wurde.

§ 11. Volumenänderung bei verschiedener Schlagweite. — Die innere Belegung eines aussen zur Erde abgeleiteten Thermometercondensators B (Taf. II Fig. 7) wurde durch einen Metalldraht mit der isolirten Kugel eines Funkenmikrometers F verbunden, dessen andere Kugel zur Erde abgeleitet war. Ein anderer Metalldraht führte vom positiven Conductor der Holtz'schen Maschine zur inneren Belegung des Thermometercondensators. Beim Drehen der Maschine stieg das Potential der freien Electricität auf der innern Belegung, und sank die Flüssigkeit des Thermometers allmählich, bis zwischen den Kugeln des Funkenmikrometers die Entladung erfolgte und die Flüssigkeit plötzlich stieg. Die maximale Senkung der Flüssigkeit wurde, wie früher, mit Mikroskop und Ocularmikrometer beobachtet. Um die Entladungsfunken mehr zu markiren und weniger schnell aufeinander folgen zu lassen, wurden gewöhnlich noch die Belegungen der Leydener Batterie von drei Flaschen mit den Belegungen des Thermometercondensators verbunden.

Die Messingkugeln des Funkenmikrometers hatten 20 mm Durchmesser. Einer Schlagweite von 3 mm entsprach etwa eine Ladung von 20 Funken der Maassflasche in der Leydener Batterie von sechs Flaschen.

Die in der folgenden Tabelle angegebenen Zahlen sind das Mittel aus 8 bis 10 Bestimmungen bei gewöhnlicher Temperatur.

Tabelle 10.

Volumenänderung in Milliontel des ursprünglichen Volumens bei 16,5° C.

Nr.	Wandstärke	Schlagweite zwischen Messingkugeln von 20 mm Durchmesser in Millimetern: 1	2	3	4	5	6	7	8
		Englisches Flintglas							
	mm								
30	0,142	2,883	10,67	—	—	—	—	—	—
32	0,203	1,756	7,440	15,92	—	—	—	—	—
18	0,258	1,310	3,960	8,071	—	—	—	—	—
23	0,271	0,980	3,014	6,110	—	—	—	—	—
22	0,286	0,739	2,662	7,025	11,77	—	—	—	—
21	0,319	0,604	1,971	4,088	6,651	—	—	—	—
17	0,346	0,742	2,042	3,608	5,889	8,592	—	—	—
61	0,407	0,149	0,736	1,658	2,950	4,372	6,046	—	—
60	0,591	0,058	0,190	0,554	0,744	1,028	1,524	2,252	2,593
		Thüringer Glas							
27	0,238	1,131	4,606	9,636	—	—	—	—	—
8	0,283	0,441	1,747	4,059	8,250	—	—	—	—
9	0,294	0,548	2,299	5,277	7,870	—	—	—	—
16	0,700	0,102	0,358	0,715	1,208	1,781	2,449	3,336	—
34	0,304	6,882	18,29	>68,36	—	—	—	—	—

Auch diese Zahlen zeigen eine Volumenvermehrung der Thermometerkugel, die angenähert aber durchaus nicht genau proportional dem Quadrate der Schlagweite oder dem Quadrate der Dichtigkeit (dem Quadrate des electrischen Potentials) auf der innern Belegung des Thermometercondensators und umgekehrt proportional dem Quadrate der Wandstärke der Thermometerkugel ist.

Thermometercondensator Nr. 34 hatte eine Kugel von etwas unregelmässiger Gestalt und Wandstärke, sodass die dünneren Stellen der Thermometerkugel beim Electrisiren besonders stark geändert wurden. Es ist der Apparat mit den übrigen daher nicht vergleichbar und hier nur aufgeführt, weil er die stärksten Volumenänderungen zeigt, die ich bei Glas überhaupt habe beobachten können.

§ 12. Thermometercondensatoren aus Krystallplatten. — Auch andere Stoffe als Glas zeigen beim Electrisiren eine Aenderung der Dimensionen.

Eine runde homogene Glimmerplatte G (Taf. II Fig. 3) wurde mit einem Kitte aus Schellack und Canadabalsam auf den ebengeschliffenen Rand eines Glastrichters gekittet, der Trichter mit ausgekochtem und erkaltetem Wasser gefüllt und in der Oeffnung des Trichterrohres mittelst desselben Kittes ein U-förmig gebogenes Capillarrohr AC mit eingeschmolzenem Platindraht B befestigt. Auf das Ende C des Capillarrohres konnte, wie bei den früher beschriebenen Thermometercondensatoren ein durchbohrter Kork und eine mit Wasser gefüllte kurze Glasröhre aufgesteckt werden.

Da die Glimmerplatte leicht beweglich war, so konnte durch wiederholtes Neigen des Apparates und Saugen an dem Glasrohre bei C die in dem Apparate noch vorhandene Luft entfernt und Trichter und Capillarrohr ganz mit Wasser gefüllt werden.

Das Glimmerblatt wurde an der Aussenseite mit Goldblatt belegt, indem man es behaucht gegen ein auf einem Lederkissen liegendes grösseres Goldblatt drückte. Sobald das Wasser verdampft ist, liegt das Goldblatt glatt und fest an der Glimmerfläche an.

Die Trichterröhre war aussen mit geschmolzenem Schellack bekleidet und wurde in gewöhnlicher Weise mit einem durchbohrten und durchschnittenen Kork in einem horizontalen Brettchen mit passender Oeffnung befestigt. Wasser und Platindraht B bildeten die innere, das Goldblatt die äussere Belegung, die Glimmerplatte die isolirende Substanz des Condensators.

Das Glimmerblatt war um so convexer, je höher die Flüssigkeit in dem verticalen Schenkel des Capillarrohres bei C stand, an welchem mit Wachs eine auf Papier gedruckte Millimeterscala befestigt war.

Bei einer Versuchsreihe stand die Wasserkuppe 120 mm über der Glimmerplatte. Da die capillare Steighöhe des Wassers in der Capillarröhre von 0,652 mm Durchmesser 45 mm betrug, so stand die untere Fläche der Glimmerplatte unter dem Ueberdruck einer Wassersäule von 75 mm.

Der Krümmungsradius des mittleren Theiles der Glimmerplatte wurde durch die mit dem Ophthalmometer ge-

messene Grösse des Spiegelbildes eines runden Objectes zu 800 mm gefunden.

Wasser und Platindraht des Capillarrohres wurden durch einen Metalldraht, das Goldblatt durch einen hohlen Glasfaden mit Wasser und eingeschmolzenen Platindrähten in der oben § 2 (Taf. II Fig. 6) beschriebenen Weise mit dem Commutator, dem Fallapparate und der Leydener Batterie verbunden. Die Leydener Batterie war stets mit positiver Electricität geladen.

Sofort nach dem Niederlassen des Fallapparates sank die Flüssigkeit in dem Capillarrohre, um nach der Entladung den früheren Stand wieder einzunehmen.

Tabelle 11.

Thermometercondensator mit Glimmerplatte von 0,030 mm Dicke und 66,4 mm Durchmesser

Electricitätsmenge q	Senkung der Flüssigkeit in Millimetern: Freie Electricität Innen	Aussen	Mittel
	6 Leydener Flaschen		
	mm	mm	mm
5	1,20	1,67	1,43 = 1 . 1,430
10	5,77	4,67	5,20 = 4 . 1,300
15	12,23	9,23	10,73 = 9 . 1,192
20	17,60	14,47	16,03 = 16 . 1,002
25	29,27	24,67	26,97 = 25 . 0,987
	3 Leydener Flaschen		
5	3,30	2,47	2,88 = 1 . 2,88
10	11,20	11,00	11,10 = 4 . 2,775

Die vorstehend mitgetheilten Messungen zeigen, dass bei derselben Oberfläche der Leydener Batterie die Senkung weniger schnell als proportional dem Quadrate der Electricitätsmenge zunahm. Die Senkung war grösser für freie Electricität auf der Wasserseite, als für freie Electricität auf der Goldseite der Glimmerplatte.

Die Capacität c des Glimmercondensators war, wie bei den Glascondensatoren, vergleichbar mit der Capacität C einer Leydener Flasche der Batterie, da die Senkung bei 6 Flaschen und der Electricitätsmenge $2q$ grösser gefunden wird

als bei 3 Flaschen und der Electricitätsmenge q. Das Verhältniss $\frac{c}{C}$ berechnet sich aus diesen Versuchen unter der Voraussetzung, dass die Senkung proportional dem Quadrate des Potentialunterschiedes der freien Electricität auf beiden Belegungen des Condensators ist in der Gleichung 5 § 10 angegebenen Weise zu 3,147 resp. 1,510, je nachdem $q = 5$, resp. 10 Funken der Maassflasche war, während directe Messungen mit der 44 gliedrigen Chromsäurekette eine 2,505 mal so grosse Capacität, wie bei dem Flintglascondensator Nr. 17 ergaben, der nahezu dieselbe Capacität wie eine Leydener Flasche hatte.

Es spricht dies wieder gegen die Annahme, dass die Volumenänderung proportional dem Quadrate der electrischen Potentialdifferenz der Belegungen ist.

Wurde Flüssigkeit aus dem Capillarrohr herausgenommen, so wurde die Oberfläche der Glimmerplatte weniger convex, und die Senkung der Flüssigkeit im Capillarrohr bei derselben Ladung der Leydener Batterie viel geringer.

Wird soviel Flüssigkeit herausgenommen, dass ein Theil der Glimmeroberfläche convex, der andere concav ist, so bleibt der Stand der Flüssigkeit durch das Electrisiren der Glimmerplatte ungeändert. Die Glimmerplatte wird dann auch breiter und länger durch das Electrisiren, aber der von ihr begrenzte Hohlraum bleibt derselbe.

Die Formänderung der Glimmerplatte muss übrigens ziemlich complicirt sein, da der Krümmungsradius der convexen Kuppe beim Electrisiren nicht abnimmt, wie man erwarten sollte, sondern zunimmt. Bei den vorstehend beschriebenen Versuchen stieg er von 800 mm bei 40 mm Senkung im Capillarrohr auf 880 mm.

Bei starker electrischer Spannung gibt die Glimmerplatte von einem kreisrunden Object nicht mehr ein kreisrundes, sondern ein elliptisches Bild, dessen grosse Axen mit den Richtungen der maximalen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes oder der maximalen Ausdehnung durch die Wärme zusammenfallen. Es würde dies für eine mit der krystallographischen Richtung wechselnde Ausdehnung beim

Electrisiren des Glimmers sprechen. Bei der grossen Schwierigkeit, die Glimmerplatte ganz eben und gleichmässig auf die Trichteröffnung aufzukitten, wird man aber erst aus einer grösseren Anzahl Versuche einen sichern Schluss ziehen können.

Der Trichterapparat fasste nahezu 60 g Wasser. Da aber die dicke Glaswand durch Electrisiren nicht merklich geändert wird, so wird nur der zwischen convexer Glimmerplatte und Trichterbasis befindliche Hohlraum sein Volumen ändern.

Nennt man:

V das Volumen
h die Höhe
ϱ den Radius der Basis
} des Kugelabschnitts,
R den Radius der Kugel, so ist:

$$V = \pi R h^2 \left(1 - \frac{h}{3R}\right)$$

und angenähert:

$$h = \frac{\varrho^2}{2R}, \qquad V = \frac{\pi \varrho^4}{4R},$$

was für: $R = 800\,\text{mm}$, $\varrho = 33{,}2\,\text{mm}$,

$$V = 1192\,\text{cmm}$$

geben würde. Das Capillarrohr hat für 1 mm Länge ein Volumen von 0,3339 cmm, oder es würde entsprechen:

einer Senkung der Flüssigkeit:	eine Volumenänderung:
von 1 mm	von 0,000 280
„ 20 „	„ 0,005 600
„ 40 „	„ 0,011 200

des ursprünglichen Volumens.

Diese Volumenänderung ist etwa 10 Mal so gross, wie sie eine Glasplatte von gleicher Dicke wie der Glimmer für gleiche electrische Kräfte zeigen würde, wenn man annimmt, dass die Wirkung umgekehrt proportional dem Quadrate der Dicke ist.

Versuche mit anderen Glimmerplatten, die 15 Jahre später in meinen Besitz gekommen sind, gaben Volumenänderungen von ähnlicher Ordnung, wie Glas.

In Tabelle 11 sind eine Reihe Messungen nach der oben § 11 beschriebenen Methode an Thermometercondensatoren mit Glimmerplatten verschiedener Dicke zusammengestellt

deren eine Belegung zur Erde abgeleitet war, während die andere Belegung bis zu der in der Tabelle angegebenen Schlagweite geladen wurde. Der Stand der Flüssigkeit im Capillarrohr wurde bei dem Thermometer Nr. 2 direct an einer Millimeterscala, bei den anderen Apparaten in der früher beschriebenen Weise mit einem horizontalen Mikroskop und Ocularmikrometer abgelesen.

Der Apparat Nr. 3 war wie Nr. 2 eingerichtet. Beide hatten eine auf einen Glastrichter aufgekittete, aussen vergoldete, Glimmerplatte.

Der Apparat Nr. 4 bestand aus zwei dünnen, am Rande mit Canadabalsam und Schellack zusammengekitteten Glimmerplatten (Taf. II Fig. 4). Auf eine Durchbohrung in der Mitte der oberen Platte war mit demselben Kitt ein Capillarrohr mit eingeschmolzenem Platindraht aufgesetzt. Der linsenförmige Raum zwischen beiden Glimmerplatten und das Capillarrohr waren mit Wasser gefüllt, dessen Menge in gewöhnlicher Weise durch Wägung gefunden werden konnte.

Der Thermometercondensator wurde wie ein Condensator aus Flintglas in einen Kork gefasst und in ein mit Wasser gefülltes Gefäss gesetzt, das die äussere Belegung bildete.

Tabelle 12.

Thermometercondensatoren mit Glimmerplatten von 66,4 mm Durchmesser.

Nr.	Wandstärke	Radius	Volumen	Drückende Wassersäule	Senkung in Scalentheilen Schlagweite in Millimetern 1	2	3	4
	mm	mm	cbmm		mm	mm		
2	0,0300	800	1192	75	4	10,91		
					Sc.	Sc.		
4	0,0563	672	2837		11	44	Sc.	Sc.
3	0,0857	1416	674	46	2	6,78	16,79	54,89

Nr.	Wandstärke	Electrische Capacität	Volumenänderung in Milliontel des ursprünglichen Volumens Schlagweite in Millimetern 1	2	3	4
2	0,0300	2,505	1120	3055	—	—
4	0,0563	—	20	80	—	—
3	0,0857	1,028	31,1	105,5	261,1	853,9

Die verschiedenen Glimmerplatten zeigen quantitativ, nicht qualitativ, ein sehr verschiedenes Verhalten gegen die Einwirkung electrischer Kräfte. Geringe mit optischen Hülfsmitteln nicht mehr wahrnehmbare leitende Massen, die in der Glimmersubstanz gleichmässig fein vertheilt sind, würden diese Verschiedenheit erklären.

Meine Bemühungen Thermometercondensatoren herzustellen, deren Gefässwände nur aus Glimmer bestanden und ein grösseres Wasservolumen fassten, scheiterten an der Schwierigkeit einen an der Glimmeroberfläche festhaftenden Kitt zu finden. Da die dünnen Glimmerplatten sehr biegsam und beweglich sind, so drängt sich das Wasser noch leichter, als bei den oben beschriebenen Apparaten mit Glastrichter zwischen Kitt und Glimmeroberfläche und stellt dann die leitende Verbindung zwischen innerer und äusserer Belegung des Condensators her. Diese Wasserschicht ist anfänglich äusserst dünn und nur durch electrische Fortführung oder den verhältnissmässig starken Entladungsstrom wahrzunehmen, der von der äusseren Belegung durch einen empfindlichen Multiplicator zur Erde fliesst.

Ich habe auch, in ähnlicher Weise wie mit einer dünnen Glimmerplatte, einen Thermometercondensator aus einer ⊥ der optischen Axe geschnittenen Quarzplatte von 0,129 mm Dicke und 16 mm Durchmesser gebildet. Die Electricitätsmenge 20 in 6 Flaschen liess die Flüssigkeit im Innern der Capillarröhre um 0,01 cmm sinken, wenn die beiden Belegungen der Quarzplatte mit den Belegungen der Leydener Batterie verbunden wurden. Bei einer Volumenvermehrung von mehr als 0,05 cmm wurde die Quarzplatte durchgeschlagen und zertrümmert. Das von der gebogenen Quarzplatte begrenzte Volumen konnte nicht bestimmt werden.

Aehnliche Versuche mit dünnen, sehr homogenen Gypsplatten führten zu keinem befriedigenden Resultat, da der spröde Gyps zwei sehr vollkommene Blätterdurchgänge normal zum Hauptblätterdurchgang hat, und schon bei geringer Spannungsdifferenz auf beiden Belegungen die Electricität die Gypsplatte durchbricht — vielleicht an einer Stelle, die schon vorher einen feinen, dem Auge unsichtbaren Riss besass.

Glimmer und Quarzplatten werden also wie Glasplatten länger und breiter, wenn man ihren leitenden Oberflächen entgegengesetzte Electricität mittheilt.

§ 13. Thermometercondensatoren aus Kautschuk wurden in der Weise hergestellt, dass in dem einen Ende eines langen, schwarzen Kautschukschlauchs eine Capillarröhre mit eingeschmolzenem Platindraht, in dem andern Ende ein kurzes, in eine Spitze ausgezogenes Flintglasrohr mit Schellack und Canadabalsam eingekittet wurde.

Der Kautschukschlauch wurde durch die Flintglasspitze mit ausgekochtem und erkalteten Wasser gefüllt und dabei durch langsames Krümmen des Schlauches vermieden, dass der Wasserfaden durch Luftblasen unterbrochen war. Die mit Wasser gefüllte Flintglasspitze wurde vor dem Löthrohre abgeschmolzen, auf das freie Ende der Capillarröhre ein kurzes Glasrohr mit einem durchbohrten Kork aufgesetzt, dieses mit Wasser gefüllt und durch Saugen an dem offenen Ende des Glasrohres die letzten Luftblasen aus dem Apparate entfernt.

Die Capillarröhre war in ihrem untern Theile der bessern Isolation wegen mit geschmolzenem Schellack überzogen und in gewöhnlicher Weise mit Kork in einem Brettchen befestigt, das auf dem Rande eines oben offenen, mit Wasser gefüllten Metallbechers lag.

Das Wasser im Kautschukschlauch und der Platindraht der Capillarröhre bildeten die innere, das Wasser im Metallbecher die äussere Belegung des Thermometercondensators, der im übrigen wie ein Thermometercondensator aus Glas (vgl. § 2) aufgestellt und mit Mikroskop und Ocularmikrometer beobachtet wurde.

Die Kittstellen der Glasröhren an den Enden des Kautschukschlauches lagen über der Oberfläche des Wassers im Metallbecher.

Die Leydener Batterie war stets mit positiver Electricität geladen, und konnte durch den Commutator (Taf. II Fig. 6) die positive Electricität bald dem Wasser innerhalb, bald dem ausserhalb des Kautschukschlauches zugeführt werden.

Kurz nach dem Füllen des Apparates entladet sich die Leydener Batterie durch die Wand des Kautschukschlauches in wenigen Secunden. Geht der electrische Strom von innen nach aussen durch die Kautschukwand, so sinkt die Flüssigkeitskuppe in der Capillarröhre; geht der Strom von aussen nach innen, so steigt die Flüssigkeitskuppe. Die Senkung a ist unter übrigens gleichen Umständen stets grösser als die Erhebung b. Dies zeigt, dass das Wasser durch electrische Fortführung im Sinne der positiven Electricitätsströmung durch die Kautschukwand getrieben wird, und dass gleichzeitig eine Volumenvermehrung des Kautschukschlauches stattfindet. Beide Erscheinungen bewirken gleichzeitig eine Verschiebung der Flüssigkeitskuppe in der Capillarröhre, einmal in demselben, das andere Mal im entgegengesetzten Sinne.

Verkürzt man den Kautschukschlauch auf die halbe Länge, so werden Senkung und Erhebung der Flüssigkeitskuppe halb so gross. Dies spricht gegen die Annahme, dass zufällige Löcher in der Kautschukwand die electrische Fortführung und die schlechte Isolation bedingt hätten.

Bleibt nun der Kautschukschlauch mehrere Tage mit dem Wasser in Berührung, so wird seine Farbe grauer, die Wand dicker, die Entladungszeit der Leydener Batterie grösser, und die electrische Fortführung und Volumenänderung nehmen ab.

Der Kautschuk nimmt Wasser auf, die Poren werden enger, und das Leitungsvermögen des Kautschuks für Electricität dadurch geringer.

Angenähert wird die halbe Summe von Senkung a und Erhebung b der Flüssigkeitskuppe in der Capillarröhre die Volumenänderung geben, welche den gerade vorhandenen electrischen Kräften entspricht. Da diese Kräfte aber, besonders bei schlechter Isolation der Kautschukwand, in der ersten Zeit nach dem Niederlassen des Fallapparates sehr schnell abnehmen, so wird der wirkliche Werth der Volumenänderung bei diesen Versuchen stets zu klein gefunden gegenüber den ähnlich angeordneten Versuchen mit Thermometercondensatoren aus Glas.

Die Capacität des Kautschukcondensators Nr. 1 war,

wenn derselbe 48 Stunden mit Wasser in Berührung gestanden hatte, etwa $^1/_{20}$ der Capacität des Flintglasthermometercondensators Nr. 17 oder der Capacität einer Leydener Flasche der benutzten Batterie.

Tabelle 13.

Thermometercondensatoren aus schwarzem Kautschukschlauch.

Apparat Nr.	Länge	Aeusserer Durchmesser des Schlauches	Wandstärke	Volumen
1	1230 mm	6 mm	1 mm	11,30 ccm
2	5160 „	5 „	1 „	35,91 „
3	1250 „	6 „	1 „	12,40 „

Zeit		Volumenänderung in Milliontel des ursprünglichen Volumens bei 16,5° C. Electricitätsmenge in 6 Flaschen 20	40	60
			Apparat Nr. 1.	
0^h	a	28,40	46,74 . . .	85,49 . . .
	b	−18,16	−11,17 . . . +12,57	−20,70 . . . 12,00
	$\frac{a+b}{2}$	5,12	17,78 . . . 29,65	32,40 . . . 36,75
48^h	a	7,96	18,62	30,73
	b	− 6,52	−14,80	−21,42
	$\frac{a+b}{2}$	0,72	1,91	4,65
50^h	a	6,28	13,96	25,47
	b	− 5,36	−10,71	−17,37
	$\frac{a+b}{2}$	0,57	1,62	4,05
			Apparat Nr. 2.	
?	a	6,49	13,92	7,29
	b	− 5,36	−11,91	− 7,08
	$\frac{a+b}{2}$	0,57	1,01	0,11
48^h später	a	3,37	7,50	4,76
	b	− 3,11	− 7,27	− 4,25
	$\frac{a+b}{2}$	0,13	0,12	0,26
			Apparat Nr. 3.	
48^h	a	6,90	22,90	—
	b	− 6,45	−20,70	—
	$\frac{a+b}{2}$	0,22	0,74	—

In Tabelle 13 sind die an drei verschiedenen Apparaten erhaltenen Resultate zusammengestellt. Bei Apparat Nr. 3 enthielt der Metallbecher kein Wasser. Statt dessen war auf die Aussenseite des Kautschukschlauches mit gewöhnlichem Vergolderfirniss Goldblatt aufgelegt, welches die äussere Belegung des Condensators bildete. Durch den Firniss schien die Beweglichkeit des Schlauches etwas verändert.

Die Punkte zwischen zwei benachbarten Zahlen derselben Horizontalreihe in Tab. 13 sollen andeuten, dass zwischen den betreffenden Beobachtungen eine kurze Zeit verfloss.

Wurde die äussere Belegung des Kautschukcondensators Nr. 1 zwei Tage nach dem Füllen desselben durch einen empfindlichen Multiplicator zur Erde abgeleitet, so nahm die Ablenkung der Multiplicatornadel continuirlich ab, zuerst schnell, dann langsamer. Bei der Flüssigkeitsmenge 40 sank nach Niederlassen des Fallapparates die Ablenkung in 1 Minute auf 595 Sc., in 2 Minuten auf 185 Sc. in 10 Minuten auf 24 Sc. Bei der Electricitätsmenge 20 waren die Ablenkungen nahezu halb so gross.

Führt man dem Condensator mit der Holtz'schen Maschine continuirlich Electricität zu, so lässt sich kurze Zeit nach dem Füllen der Apparate keine merkliche Schlagweite erreichen, und die Flüssigkeitskuppe in der Capillarröhre sinkt oder steigt fortwährend, je nach der Richtung des electrischen Stromes.

Bleibt der Kautschukschlauch länger als einige Tage mit Wasser in Berührung, so werden die Erscheinungen noch unregelmässiger und complicirter als in den Beobachtungen der Tabelle 13. Innere Polarisation und andere secundäre Wirkungen modificiren dann die electrische Fortführung und die electrische Ausdehnung.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass die Volumenzunahme des Kautschuks wie bei Glas und Glimmer nahezu proportional ist dem Quadrate der electrischen Potentialdifferenz auf beiden Belegungen des Condensators. Bei sonst gleichen Umständen ist die Zunahme für frischen Kautschuk mehr als zehnmal grösser als bei Glas; für Kautschuk, der

zwei Tage mit Wasser in Berührung gewesen, etwa ebenso gross wie bei Glas.

§ 14. Einfluss der Elasticität. — Man könnte vermuthen, dass die elastische Kraft des Glases durch Electrisiren abnimmt, und der hydrostatische Druck auf der Innenseite der Thermometerkugel diese dann ausdehnt und so die Senkung der Flüssigkeitskuppe im Capillarrohre herbeiführt.

Dann müsste die Senkung zunehmen, je geringer die Wanddicke und je grösser der Durchmesser der Thermometerkugel ist, bei sonst gleichen electrischen Kräften. Ein Einfluss des Durchmessers der Thermometerkugel ist aber aus den im Vorstehenden (§ 6 und 11) mitgetheilten Versuchen nicht zu entnehmen.

Ferner müsste die Senkung bei grösserem hydrostatischen Druck grösser sein, und die Vergrösserung der Senkung mit der Spannungsdifferenz beider Condensatorbelegungen zunehmen.

Es lässt sich nun leicht der hydrostatische Druck dadurch ändern und die Verschiebung unter sonst gleichen Umständen beobachten, wenn das Capillarrohr eines Thermometercondensators einmal vertical nach oben, das zweite Mal vertical nach unten steht.

Die äussere (Silber-)Belegung des Thermometercondensators Nr. 22 aus Flintglas wurde zur Erde abgeleitet, die innere (Wasser-)Belegung in der oben (§ 11) beschriebenen Weise bis zu einer Schlagweite von 1 mm oder 2 mm geladen.

Ich beobachtete dann:

Capillarrohr	Höhe der Kuppe über der Mitte der Thermometerkugel	Verschiebung der Flüssigkeitskuppe nach der Thermometerkugel hin bei Schlagweite	
		1 mm	2 mm
oben	208,7	24,90 Sc.	79,68 Sc.
unten	−230,5	28,42	82,66
		Diff. 3,52	2,98

Die Temperatur war 16° C., der Barometerstand 756 mm.

Die Verschiebung ist für die zweite Stellung oder geringern Druck im Innern der Thermometerkugel nahezu die-

selbe. Der geringe Unterschied von 3 Sc. oder etwa 0,17 Milliontel des Volumens ist bei der doppelten Schlagweite derselbe und von entgegengesetztem Sinne als ihn eine Abnahme der elastischen Kraft des Glases hätte erwarten lassen. Der Unterschied mag durch zufällige Ursachen bedingt sein, wie denn derselbe Thermometercondensator unter scheinbar gleichen Umständen zu verschiedenen Zeiten verschiedene Verschiebung der Flüssigkeitskuppe zeigt.

Die Aenderung des Druckes entsprach einer Wassersäule von 439,2 mm oder einer Quecksilbersäule von 32,40 mm, d. h. 0,0429 oder etwa $\frac{1}{23}$ Atmosphäre, welche ein Ansteigen der Flüssigkeitskuppe um 21,8 mm oder eine Verkleinerung des Volumens der Thermometerkugel um 0,000 019 33 hervorgebracht hatte.

(Vgl. auch Abschnitt IV. § 23—26).

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

II. *Ueber das thermische und optische Verhalten von Gasen unter dem Einflusse electrischer Entladungen; von Eilhard Wiedemann.*

1. Abhandlung.

1. Einleitung.

In zwei früheren experimentellen Untersuchungen (Wied. Ann. **5.** p. 500. 1878. **6.** p. 298. 1879) habe ich das Leuchten der Gase unter dem Einfluss electrischer Entladungen verfolgt. Bei der ersten Untersuchung ergab sich, wenn zwei gemischte Gase dem electrischen Strome ausgesetzt werden, und das eine derselben ein Metalldampf, das andere dagegen Wasserstoff oder Stickstoff ist, dass dann im Spectrum die Linien des Metalldampfes allein auftreten, während die des andern Gases vollkommen verschwinden, sodass also nur der Metalldampf die Fortführung der Electricität übernimmt. Die Entladungen in demselben bleiben dabei vollkommen discontinuirlich.

Obiges Resultat ist neuerdings auf photographischem Wege von H. W. Vogel[1]) bestätigt worden.

Meine zweite Untersuchung zeigte, dass die Temperatur eines Gases, welches in einer Geissler'schen Röhre leuchtet, weit unter 100° liegen kann.

Die letztere Thatsache ist neuerdings von Hasselberg[2]) bestätigt worden. Auch Hittorf[3]) hat, freilich ohne genauere Messungen, gezeigt, dass dieselbe sich durchaus den Erscheinungen anschliesst.

Durch diese Untersuchungen ist nachgewiesen, dass die gewöhnliche Vorstellung, welche die Emission des Lichtes von den unter dem Einfluss der electrischen Entladungen leuchtenden Gasen auf eine bis zum Glühen gesteigerte Temperaturerhöhung derselben zurückführt, nicht haltbar ist, und dass diese Gebiete einer neuen experimentellen Bearbeitung bedürfen.

Die Spectralanalyse, soweit sie sich zur Herstellung der Spectra der electrischen Entladungen bedient, hat die Aufgabe, die Abhängigkeit der Spectra von den durchgehenden Electricitätsmengen zu studiren. Dazu müssen wir durch ein bestimmtes Gas von gegebenem Druck Entladungen von bestimmter Electricitätsmenge hindurchschicken, die auftretenden Spectralerscheinungen beobachten und zugleich ermitteln, wie gross die von den Entladungen abgegebenen Energiemengen oder Wärmemengen sind, denn allein diese geben ein Maass für die im Gase auftretenden Bewegungsphänomene. Da wir nicht eine einzelne Entladung herausgreifen können, so müssen wir die Zahl derselben, die auf eine bestimmte Electricitätsmenge kommt, bestimmen. Absolut nothwendig ist dabei, dass das Gas vor dem Eintritt jeder neuen Entladung in seinen Anfangszustand zurückkehrt, dass also auch etwa vorhandene Erwärmungen sich ausgleichen, und vor allem, dass das Gas wieder dunkel wird.

Die vorliegende Untersuchung soll einen ersten Beitrag zu der Lösung dieser ungemein complicirten Fragen liefern.

1) H. W. Vogel, Beibl. 4. p. 125. 1880.
2) Hasselberg, Beibl. 4. p. 132. 1880.
3) Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 578. 1879.

Zunächst habe ich die thermischen Verhältnisse bei den Entladungen der Influenzmaschine unter verschiedenen Bedingungen eingehender untersucht und dabei ein eigenthümliches Verhalten der positiven und negativen Electricität constatirt. Daran schliessen sich Versuche, numerisch diejenigen Grössen zu bestimmen, welche eine Umwandlung des Bandenspectrums in das Linienspectrum beim Wasserstoff bedingen; sowie einige Beiträge zur Kenntniss der von der negativen Electrode in sehr verdünnten Räumen ausgehenden Entladung; sodann folgt eine Discussion über die Verwendbarkeit der übrigen Electricitätsquellen, Inductorien, grosser galvanischer Batterien und Leydener Flaschen zu spectralanalytischen Untersuchungen, sowie über die continuirlichen und discontinuirlichen Entladungen in Gasen. Den Schluss bilden theoretische Betrachtungen sowohl in Betreff der Entladungsvorgänge in Gasen als auch der Natur der Spectra.

Einzelne Gegenstände sind in dieser ersten Abhandlung kürzer besprochen. Sie sollen später ausführlicher experimentell verfolgt werden.

2. Apparat.

Entsprechend den in Betracht kommenden Fragen bestand der benutzte Apparat aus drei Theilen: 1) der Electricitätsquelle und den Vorrichtungen zum Messen der Intensität des Stromes; 2) dem Entladungsrohre mit seinen Electroden, den Calorimetern und den Vorrichtungen zum Evacuiren; 3) den Vorrichtungen zum Messen der Zahl der Entladungen.

1) Als Electricitätsquelle diente meist eine neue Töpler'sche Electrisirmaschine[1]) mit 20 rotirenden Scheiben, die durch einen kleinen Schmidt'schen Wassermotor getrieben wurde. Die meisten Versuche wurden, um einen unveränderten stetigen Wasserzufluss zu haben, nachts ausgeführt. Dabei blieb bei gleichbleibender Umdrehungsgeschwindigkeit der Maschine der Ausschlag des Galvanometers im Schliessungskreise stundenlang ganz constant.

Die Maschine besitzt infolge der starken Electricitäts-

1) Töpler, Berl. Ber. 1879. p. 950 ff. Beibl. 4. p. 398. 1880. Eine ausführliche Beschreibung wird demnächst in den Annalen erscheinen.

entwicklung einige Uebelstände. Einmal zieht sie in hohem Grade den Staub an, die Scheiben werden schmutzig, und die Electricitätsproduction lässt nach, ja kann ganz aufhören; ferner bilden sich grosse Mengen Ozon. Beide Uebelstände lassen sich ziemlich vollständig vermeiden, wenn man über die Maschine ein Holzgestell mit Glasscheiben stülpt und unter dasselbe Gefässe mit Leinöl stellt.[1]) Nach mehrwöchentlichem Gebrauche werden indess trotz aller Vorsichtsmaassregeln die Scheiben schmutzig und müssen dann gewaschen werden. Es geschieht dies entweder mit Wasser oder eventuell auch mit Alkohol mittelst eines Schwämmchens. Blosses Abbürsten genügt nicht.

Bei feuchter Witterung, und wenn die Scheiben nicht mehr rein sind, kehrt sich sehr häufig die Stromesrichtung von selbst um. Ziemlich vollständig lässt sich dies durch Anwärmen der Maschine verhindern. Eine weitere Eigenthümlichkeit der Maschine ist, dass fast stets, wenn man sie eine Zeit lang hat gehen lassen, dann anhält und wieder in Gang setzt, die Richtung des erzeugten Stromes die entgegengesetzte wie vorher ist. Bei meinen Versuchen war dies vielfach sehr bequem, da gewöhnlich die mit der Maschine verbundene Electrode erst als positive, dann als negative Electrode diente.

Zum Einschalten von Funkenstrecken in den Stromkreis diente ein Funkenmikrometer mit Kugeln von 33 cm Durchmesser. Sollte keine Funkenstrecke eingeschaltet werden, so wurde über die die Kugeln tragenden, verschiebbaren, horizontalen Messingstäbe ein Messingbügel gelegt.

Die Umkehrungen der Verbindungen wurden stets an der Maschine selbst vorgenommen. Als Leitungsdrähte dienten mit Guttapercha überzogene Kupferdrähte. Der eine Pol der Maschine war stets direct zur Erde abgeleitet, der andere mit der einen Electrode des Entladungsrohres isolirt

1) Die Anwendung von Terpentinöl ist nicht zweckmässig, da es allmählich verdunstet und sich auf die Scheiben eine klebrige Substanz niederschlägt, die den Lacküberzug verdirbt; sie besteht wahrscheinlich aus Oxydationsproducten des Terpentinöls, da mit Terpentinöl selbst die Scheiben ohne Nachtheil abgewaschen werden können.

verbunden, dessen andere Electrode durch das Galvanometer mit der Erde verbunden war.

Das Galvanometer war ein mässig stark astasirtes Wiedemann'sches Spiegelgalvanometer. Die Windungen bestanden aus mit Guttapercha überzogenem Kupferdrahte. Der Abstand von Scala und Fernrohr war 189 cm.

2) Das Entladungsrohr bestand aus den die beiden Electroden enthaltenden Räumen und den sie verbindenden Röhrentheilen. Letztere fielen entweder ganz fort, sodass die Electroden einander unmittelbar gegenüberstanden, oder waren durch verschieden gestaltete Röhren gebildet. Doch war stets vermieden, dass zwei Theile derselben nebeneinander parallel verliefen, etwa in der Weise, dass ein U-förmiges Rohr angewandt wurde. In diesem Falle treten die allerstörendsten Inductionserscheinungen auf.

Die Electroden waren bei allen definitiven Versuchen aus Aluminium gefertigt, da dieses allein durch die Entladungen nicht zerstäubt wird. Sie waren entweder Kugeln von 5 mm Durchmesser oder Spitzen von einer Dicke von 3 mm an der Basis und einer Länge von 12 mm. Um bei der Zuleitung der Electricität zu den Electroden möglichst jede Zerstreuung durch Spitzen zu vermeiden und sichere Contacte zu erzielen, war folgende Anordnung gewählt: (Taf. III A. Fig. 1) *a* ist eine Glaskugel, *b* die Electrode, *c* der bis an sein unteres Ende mit Glas umwickelte, in sie eingeschraubte Platindraht, *d* ein an *a* angeschmolzenes Glasrohr, in das der Draht *c* hineinragt. Das Rohr *c* konnte mit Quecksilber gefüllt werden, in welches der die Electricität zuführende Draht getaucht wurde. An *m* wird das Entladungsrohr angeschmolzen. Eine ähnliche Anordnung empfiehlt sich auch für viel benutzte Geissler'sche Röhren, da sie durch das Zerren der Verbindungsdrähte an den herausragenden Platindrähten leicht zerspringen.

Sollte die Erwärmung in dem gesammten, zwischen zwei Electroden befindlichen Raume bestimmt werden, so wurde der ganze Apparat in trogförmige Glascalorimeter von etwa 50 ccm Inhalt eingetaucht. Für die Bestimmung der Erwärmung an einer Electrode wurde die Vorrichtung

Taf. III A. Fig. 2 benutzt; *e* ist die Electrode mit ihrer Umgebung, *t* das Thermometer, *c* das Calorimeter mit dem röhrenförmigen Ansatz *l*, in welchen ein an die Umhüllung der Electrode angeschmolzenes Glasrohr *s* mit essigsaurem Leim gekittet wurde. Der unmittelbar an der Electrode befindliche Röhrentheil *s* wurde aus einem Capillarrohre hergestellt, um einen Wärmeaustausch durch Strömungen möglichst zu vermeiden.

Um die Erwärmung im Rohre zu ermitteln, wurden die Anordnungen Taf. III A. Fig. 3 u. 4 verwandt. Bei der ersten ist, wie bei der Untersuchung der Electroden, durch das röhrenförmige Calorimeter *a* ein Theil der Entladungsröhre *e* vertical in die Höhe geführt, der oben und unten horizontal umgebogen ist; bei der zweiten liegt das Entladungsrohr *e* horizontal und über dasselbe ist ein Calorimeter *a* geschoben. Letztere Vorrichtung muss dann verwandt werden, wenn die Erwärmungen nahe aneinander gelegener Stellen verschieden weiter, aneinander geschmolzener Röhren gemessen werden, oder an einer Stelle des Rohres die thermische Wirkung und unmittelbar daneben die spectroskopischen Phänomene untersucht werden sollen.

Als calorimetrische Flüssigkeit diente Terpentinöl. Dasselbe hat eine geringe specifische Wärme im Volumen und und ist ein guter Isolator, was besonders bei weiten Röhren von grosser Bedeutung ist (s. w. u.). Die Calorimeter selbst waren aus Glas hergestellt, nachdem Vorversuche gezeigt hatten, dass der durch Strahlung verloren gehende Theil der Energie des Gases verschwindend klein ist.

Die Calorimeter mit den in ihnen befindlichen Entladungsröhren wurden in ein doppelwandiges, cylindrisches Metallgefäss gesetzt, und zwar entweder einfach von oben, oder die Entladungsröhre wurde durch eine im Boden befindliche Oeffnung hindurchgeführt. So waren unregelmässige Luftströmungen etc. ausgeschlossen und ausserdem eine sichere Correction für die Aus- und Einstrahlung während des Versuches ermöglicht.

Bei den horizontal gelegten Röhren wurden ebensolche, mit zwei seitlichen Oeffnungen versehene Holzkästchen verwandt. Die zu untersuchenden Gase wurden sorgfältig ge-

trocknet und in die vollkommen evacuirten Röhren eingeleitet. Benutzt wurden meist nur Luft und Wasserstoff.

Als Luftpumpe diente eine Töpler'sche Pumpe.[1]) Da ihre Einrichtung wenig bekannt geworden ist, möge sie nebst einigen kleinen von mir angebrachten Veränderungen kurz beschrieben werden. An ein weites, ovales Gefäss *A*, Taf. III A. Fig. 5, von etwa 15 cm Höhe und 10 cm Weite, sind oben und unten Glasröhren angeschmolzen. Die obere *a* ist unmittelbar über der Kugel umgebogen und hat einen Durchmesser von etwa 2 mm, ihre von dem höchsten Punkte α an gerechnete Länge ist etwas grösser als der höchste vorkommende Barometerstand. Sie taucht mit ihrem untern Ende in ein mit Quecksilber gefülltes cylindrisches Gefäss *L*. Die untere etwa 1 cm weite Röhre *b* hat eine Länge von 88 cm. In einer Entfernung von etwa 6 cm von ihrer Ansatzstelle an die Kugel bei *c* zweigt sich seitlich ein Rohr *B* ab, das senkrecht aufsteigt, sich in einer Höhe von etwa 760 mm über dem Punkte α bei *e* auf einer Strecke von 8 cm cylindrisch erweitert, und sich dann nach unten umbiegt. In der Höhe der Kugel ist es dann wieder bei *f* horizontal umgebogen und an ihm durch Schliffe ein Gefäss β mit Phosphorsäureanhydrid und das Manometer γ befestigt. Ein Hahn δ gestattet die ganze Pumpe von der atmosphärischen Luft abzuschliessen. Die aufsteigende Röhre ist in der Mitte durch einen Schliff in zwei Theile getheilt, wodurch ein Reinigen der Pumpe ungemein erleichtert wird. Dabei wurde eine von Gimmingham[2]) angegebene Form des Schliffes gewählt. Der untere Theil desselben war oben mit einem trichterförmigen Ansatze versehen, welcher mit Quecksilber gefüllt wurde. Hatte sich dann auch der Schliff etwas gelockert, so brauchte darum doch nicht das Arbeiten unterbrochen zu werden. Zweckmässig ist, die Röhre *B* nicht zu eng zu wählen. An die Röhre *b* ist unten bei *o* das eine Ende eines Kautschukschlauches *r* befestigt, dessen anderes Ende mit einem durch eine Winde auf- und abwärts zu verschiebenden, in der

1) Töpler, Dingl. Journ. **168.** p. 426—432. 1862.
2) Gimmingham, Beibl. **1.** p. 175. 1877.

Zeichnung nicht sichtbaren, mit Quecksilber gefüllten Gefäss *O* communicirt.

Das Spiel der Pumpe ist äusserst einfach. Zunächst hebt man das Gefäss O und lässt Quecksilber in die Kugel *A* treten, wodurch zugleich die Communication zwischen *A* und *B* unterbrochen wird; die Luft wird dadurch aus *A* hinausgetrieben und strömt unter dem Quecksilber in *L* aus. Ist eine gewisse Menge ausgetreten, so lässt man *O* herab. Die Luft wird aus *B* und den mit ihr communicirenden Theilen in die Kugel *A* hineingezogen. Dies geschieht in ziemlich stürmischer Weise, indem grosse Blasen in den luftverdünnten Raum über *A* eintreten und dabei das Quecksilber in die Höhe schleudern; man darf daher das erste mal nicht zu viel Luft auf einmal aus *A* austreiben. Ist die Verdünnung ziemlich weit fortgeschritten, so muss wieder einige Vorsicht angewandt werden, da, wenn die Flasche zu hoch gehoben wird, das Quecksilber mit grosser Gewalt in *A* eindringt und eventuell ein Zertrümmern herbeiführen kann, was indess bei hinlänglicher Weite des Rohres *B* weniger zu befürchten ist. — Die Pumpe hat den grossen Vortheil, dass sie ohne Hähne construirt ist, sehr leicht und sicher arbeitet und sehr weit auspumpt. Es lassen sich leicht Räume herstellen, welche die von Hittorf[1]) entdeckten und neuerdings von Crookes[2]) wieder beschriebenen Phänomene zeigen.

Mit dieser Pumpe waren durch einen Schliff jenseits des Hahnes δ die zu evacuirenden Gefässe verbunden. Um die Communication der verschiedenen Apparate mit der Pumpe herzustellen, mussten mehr oder weniger lange Glasleitungen angewandt werden. Dieselben wurden durch Schliffe miteinander verbunden. Um stets eine sichere Dichtung zu erhalten, die sich auch nicht bei zufälligen Stössen löste, wie sie beim Pumpen nicht ausbleiben konnten, wurden die beiden Theile *a* und *b* des Schliffes (Taf. III A. Fig. 6) durch ein Kautschukband *e* verbunden, das um seitlich angeblasene Glasröhren *c* und *d* gelegt war. Zufällig eintretende

1) Hittorf, Pogg. Ann. **136.** p. 8. 1869.
2) Crookes, Beibl. **3.** p. 527. 1879.

Lockerungen werden so stets von selbst wieder aufgehoben und ein Umstreichen des Schliffes mit Wachs überflüssig gemacht.[1])

Zur Bestimmung der Zahl der Entladungen war die von G. Wiedemann und R. Rühlmann[2]) benutzte, sehr genaue heliometrische Methode bei der grossen Zahl der Entladungen nicht wohl anwendbar. Das Aufsetzen eines Spiegels auf die Axe der Maschine war nach ihrer Construction mit Schwierigkeiten verknüpft, auch machte er daselbst zu wenig Umdrehungen. Versuche, die Zahl der Entladungen sich selbst registriren zu lassen, gaben in einzelnen Fällen recht befriedigende Resultate. Dazu wurde das Ende des gewöhnlich direct zur Erde abgeleiteten, vom Galvanometer kommenden Drahtes einer rotirenden, mit Stanniol überzogenen und geschwärzten Walze gegenüber gestellt. Eine Stimmgabel verzeichnete zugleich ihre Schwingungen im Russ. Bei jeder Entladung wurde der Russ durchbrochen. Doch ist der Versuch nur dann anwendbar, wenn das Einschalten einer Funkenstrecke in den Stromkreis ohne Einfluss ist.

Sehr gut hat sich folgende Methode bewährt. Vor dem Entladungsrohr A, das thermisch oder spectroskopisch untersucht werden sollte, war ein gewöhnliches ihm paralleles Geissler'sches Rohr aufgestellt. Beide waren in der Weise mit Papier bedeckt, dass der freie Theil des einen dem bedeckten des andern entsprach. Beide wurden dann in einem rotirenden Spiegel betrachtet. Durch das Geissler'sche Rohr liess man die Entladungen eines kleinen Inductoriums gehen, dessen primärer Strom 100 mal durch eine sich selbst electromagnetisch erregende Stimmgabel geöffnet und geschlossen wurde. In dem rotirenden Spiegel erhält man so eine Reihe von hellen Lichtlinien, deren Abstände je $\frac{1}{100}$ Secunde entsprachen. Bestimmte man ferner, wie viele Entladungen in dem Rohre A zwischen je zwei Entladungen des Geissler'schen Rohres lagen, so erhielt man die Zahl derselben in einer hundertel Secunde und daraus dann

1) Die sämmtlichen benutzten Glasapparate waren in vortrefflicher Weise von Hrn. Glasbläser Götze in Leipzig angefertigt.

2) G. Wiedemann u. R. Rühlmann, Pogg. Ann. **145.** p. 242. 1872.

die Zahl in der Secunde selbst. Eine ziemlich sichere Schätzung war selbst dann noch möglich, wenn fünf bis sechs Entladungen in der hundertel Secunde stattfanden. Bei starkem Gang der Maschine, wie sie bei den thermischen Messungen stets verwandt werden musste, war aber die Zahl weit grösser (bis zu 60 mal). Es konnte indess die zweckmässigste Zahl der Entladungen stets dadurch erzielt werden, dass man den Gang der Maschine verlangsamte und den Galvanometerausschlag ablas, der der betreffenden Anzahl von Entladungen entsprach. Um die bei den Messungen stattfindende Zahl der Entladungen zu finden, brauchte man nur mit dem Verhältniss der in beiden Fällen beobachteten Galvanometerausschläge die im ersten Falle gefundene zu multipliciren. Dabei ist freilich die Annahme gemacht, dass die Zahl der Entladungen der Stromstärke proportional sei. Diese Annahme ist dann vollkommen gerechtfertigt, wenn zwischen zwei Entladungen das Gas in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt; es ist dies bei unseren Versuchen der Fall, da durchaus kein Nachleuchten des Gases beobachtet wurde.

Die Methode kann, da es sich blos um Schätzungen handelt, keine so genauen Resultate wie die heliometrische liefern, doch genügt sie für die vorliegenden qualitativ-quantitativen Versuche.

Die Messungen wurden in folgender Weise angestellt und berechnet. Zunächst wurde die Electrisirmaschine durch Oeffnen des Wasserhahnes in Gang gesetzt und die Temperatur des Thermometer in dem Calorimeter abgelesen, ferner die Nulllage des Galvanometers bestimmt. Die Maschine war dabei zunächst vermittelst eines über ihre Electroden gelegten Messingstabes in sich geschlossen. Nach drei oder fünf Minuten wurde von neuem die Temperatur abgelesen, mittelst einer über Rollen geführten Schnur der Messingstab entfernt und so der Strom durch die Entladungsröhre geleitet, zugleich der Stand des Galvanometers abgelesen und etwaige Schwankungen desselben in Rechnung gezogen. Nach einer bis acht Minuten wurde die Maschine wieder geschlossen und von Minute zu Minute, und dann, wenn der Gang

der Temperatur im Calorimeter gleichförmig geworden, noch nach drei bis fünf Minuten das Thermometer in demselben abgelesen. Die Dauer des Versuches wurde so gewählt, dass Erwärmungen von zwei und mehr Grad eintraten; nur in ganz vereinzelten Fällen bei der Bestimmung der Erwärmung im ganzen Rohre und an der positiven Electrode bei ganz niedrigen Drucken waren dieselben geringer. Nach dem Versuche wurde die Maschine angehalten und gewartet, bis das Calorimeter sich wieder so weit durch Strahlung abgekühlt hatte, dass seine Temperatur sich nicht mehr allzusehr änderte. Die Messungen vor und nach dem Durchgange der Electricität dienten in bekannter Weise zur Anbringung der Correctionen an der Temperaturerhöhung. Correctionen für die Zuleitung der Wärme aus den nicht vom Calorimeter angegebenen Röhrentheilen liessen sich nicht anbringen. Jeder Versuch nahm zum wenigsten eine halbe Stunde in Anspruch.

Die Galvanometerausschläge wurden nicht auf die Winkel reducirt; bei der erreichten sonstigen Genauigkeit waren die hierdurch eintretenden Fehler zu vernachlässigen.

Die Erwärmungen sind bei verschiedenem Gange der Maschine, wie dies bereits die Versuche meines Vaters und auch einige Controlversuche von mir gezeigt haben, proportional den Galvanometerausschlägen. In der That, da die Entladungen vollständig discontinuirlich erfolgen, also die Intensität jeder einzelnen Entladung dieselbe ist, so werden bei der $n$fachen durchgehenden Quantität Electricität $n$mal soviel Entladungen eintreten, also dieselben eine $n$fache Wärmemenge erzeugen.

Hr. Cand. Roth hat mich bei den Messungen mannichfach unterstützt. Ich spreche ihm dafür meinen besten Dank aus.

3. Allgemeine Messungen.

Um einen allgemeinen Einblick in die thermischen Verhältnisse der Entladungen in ihrer Abhängigkeit vom Druck zu gewinnen, wurden drei Gruppen von Beobachtungen angestellt.

1) Die Gesammterwärmung in einem Entladungsrohre wurde bestimmt.

2) Die Erwärmung in einem Capillarrohre wurde untersucht und dabei noch einige Versuche über den Einfluss der Weite des Rohres sowie die Gestalt der Electroden angestellt.

3) Die Erwärmung an den Electroden wurde ermittelt und zwar, wenn dieselben positiv, wenn dieselben negativ und endlich, wenn dieselben einmal mit der Electricitätsquelle verbunden und dann, wenn sie abgeleitet waren.

In einzelnen Fällen wurde die Zahl der Entladungen bestimmt und die Messungen einmal an mit Wasserstoff und dann an mit Luft gefüllten Räumen angestellt; ausserdem wurden noch Funkenstrecken in den Stromkreis eingeschaltet und zwar zwischen Maschine und Entladungsrohr.

Ferner sind noch einige Versuche ausgeführt über den Einfluss der Bindung der Electricität auf den Wandungen der Entladungsröhren auf die Erwärmung, indem statt des Terpentinöls als calorimetrischer Flüssigkeit Quecksilber verwandt wurde.

Die Anordnung der Tabellen ist stets dieselbe. Die erste Columne enthält unter p den Druck. Bei sehr niedrigen Drucken, die nicht mehr am Manometer abzulesen waren, bezeichnen ein oder zwei x den Grad der Evacuation. Die folgenden Columnen geben die corrigirten Erwärmungen der Calorimeter in einer Minute, bezogen auf eine einem Ausschlag des Galvanometers von 100 mm entsprechende Stromintensität. Ein + oder − über einer Columne bedeutet, dass die positive oder die negative Electrode mit der Maschine verbunden, die andere dagegen abgeleitet war.

Die angegebene Zahl der Entladungen entspricht einem Strome mit einem Galvanometerausschlage von 10 mm.

I. Die Erwärmung im gesammten Rohre wurde an drei Apparaten bestimmt.

Der erste bestand aus einem Glasgefässe I von der Form (Taf. III A. Fig. 7). Der Abstand der Electroden war 16 mm, der Wasserwerth des ganzen Apparates betrug etwa 27,5 g.

Luft.			Wasserstoff.		
p	+	−	p	+	−
680	1,15	1,02	680	1,03	0,90
360	0,80	0,55	350	0,56	0,58
14,9	0,40	—	126	0,27	0,25
32,4	0,16	0,18	34,6	0,11	0,10
11	0,06	0,066	11,7	0,055	0,06
3,7	0,056	0,065	3,9	0,060	0,06
0,4	0,065	0,081	1,5	0,063	0,062
x	1,25	1,01	0,1	0,26	0,33
			x	0,85	0,50

Die Zahlen zeigen, dass mit abnehmendem Druck zunächst die gesammten entwickelten Wärmemengen bis zu einem Minimum abnehmen, um dann wieder zu steigen. Beim Wasserstoff ist dabei im allgemeinen die Erwärmung eine geringere als bei der Luft.

Wasserstoff und Luft ergeben für die Zahl der Entladungen denselben Gang bei Aenderung des Druckes. Im allgemeinen war dieselbe in Luft kleiner als im Wasserstoff und bei Ableitung der positiven Electrode grösser als bei der der negativen.

Als Beispiel führe ich an, dass bei Wasserstoff die Zahl der Entladungen betrug für:

$$p = 660 : 45, \quad p = 365 : 75, \quad p = 126 : 180, \quad p = x : 50.$$

Bei Drucken zwischen 90 mm bis $^1/_2$ mm liessen sich, da dem Spiegel keine hinlänglich grossen Rotationsgeschwindigkeiten ertheilt werden konnten, die einzelnen Entladungen nicht mehr trennen. Unterhalb des Druckes von $^1/_2$ mm löste sich dann zunächst das continuirlich erscheinende Lichtband in eine Reihe von einzelnen leuchtenden Streifen auf, deren Anfang und Ende besonders hell erschienen, doch auch diese Streifen zerfielen bei fortgesetzter Evacuation in einzelne Entladungen.

Die Zahl der Entladungen wächst also mit abnehmendem Drucke zunächst und nimmt dann wieder ab.

Die Messung der Zahl der Entladungen ist bei mittleren Drucken durch die äusserst geringe Lichtstärke derselben sehr erschwert, besonders wenn die negative Electrode isolirt ist. Die Farbe der sich von der positiven Electrode conisch aus-

breitenden Entladung ist bei Wasserstoff bei Drucken von etwa 365 mm grünlichweiss; an der positiven Electrode, an der Spitze des Conus, tritt ein rother Fleck auf. War sehr weit ausgepumpt, so dehnte sich der dunkle Raum um die negative Electrode bis zu der positiven aus und schnitt dieselbe in einem Kreise. Von dem innerhalb desselben gelegenen Raume schien keine positive Entladung mehr auszugehen, indem er vollkommen dunkel erschien.

Eine Zunahme der Zahl der Entladungen entspricht einer Abnahme der bei jeder Entladung übergehenden Electricitätsmenge und damit bei gleicher Gestalt der sich entladenden Theile der Electrode einer Abnahme des Potentials vor der Entladung; da aber damit auch eine Verminderung der erzeugten Wärmemenge eintreten muss, so stehen die für die Zahl der Entladungen und die Grösse der Erwärmung gefundenen Resultate im Einklange.

Wenn nämlich die Electricitätsmenge e von dem Potential V auf das Potential 0 sinkt, so ist die entwickelte Wärmemenge proportional eV. Treten an Stelle einer Entladung mit der Quantität e resp. n solche mit der Quantität $\frac{e}{n}$, so sinken diese vom Potential $\frac{V}{n}$ auf das Potential Null. Die entwickelten Wärmemengen sind proportional $n \cdot \frac{V}{n} \cdot \frac{e}{n}, = \frac{1}{n} Ve$. Sie sind also nur $\frac{1}{n}$ so gross als im ersten Fall.

Ein solches Minimum des zur Entladung nöthigen Potentials mit abnehmendem Druck haben auch Warren de la Rue und Hugo Müller[1]) aufgefunden, freilich nur für Luft. Auch aus den Versuchen von Morren, de la Rive[2]) und anderen lässt sich darauf schliessen. Als z. B. de la Rive durch ein Gas von immer abnehmendem Drucke Entladungen eines Inductoriums gehen liess, fand er für die Intensität des inducirten Stromes ein Maximum, und schloss daraus auf ein Minimum des Widerstandes. Ebenso gut lässt sich aber auf ein Minimum des zur Einleitung der

1) Warren de la Rue und Hugo Müller, Proc. Roy. Soc. **29.** p. 281. 1879.

1) Morren und de la Rive, Wied. Galv. II 2. p. 316 ff.

Entladung nöthigen Potentials schliessen, da um so weniger Electricität sich durch die Inductionsrolle rückwärts entladet, um so mehr aber durch das Gas strömt, je weniger das Potential an den Enden der inducirten Rolle anwächst.

Eine ganz ähnliche Versuchsreihe wurde mit zwei Electroden, die nur $1^1/_2$ mm voneinander abstanden, und Luft angestellt. Der Wasserwerth war etwa 28 g. Die erhaltenen Werthe waren folgende:

p	+	−
673	0,17	0,24
63	0,090	0,083
1,7	0,107	0,071
0,6	0,13	0,13
x	0,94	0,80

Der Gang ist wieder vollkommen der nämliche wie bei der ersten Versuchsreihe: *erst nimmt mit sinkendem Drucke die Erwärmung langsam ab und dann sehr schnell zu.*

Die Zahl der Entladungen war für $p = 0:90$, für $p = 63$ waren sie nicht zu zählen, für $p = 700$ etwa 250, sodass hier ein Maximum wie vorher eintritt.

Dass die Erwärmungen hier, besonders bei höheren Drucken, so viel kleiner sind als im ersten Falle, liegt darin, dass das zur Einleitung jeder Entladung nöthige Potential hier viel kleiner ist als vorher, da die Electroden sehr viel näher aneinander stehen. Das Minimum tritt hier bereits bei einem höheren Drucke auf, als im ersten Falle, indem schon früher die in der Funkenstrecke und an der positiven Electrode eintretende Abnahme der Erwärmung durch die Zunahme derselben an der negativen compensirt wird (s. w. u.).

Eine dritte Versuchsreihe galt der Bestimmung der Gesammterwärmung in Wasserstoff, falls zwischen zwei Kugelelectroden noch ein ca. 1 mm weites und 30 mm langes Capillarrohr (Taf. III A. Fig. 8) eingeschaltet war. Bei einer ersten Reihe wurde der Apparat infolge des hohen, zur Entladung bei ganz niedrigen Drucken nöthigen Potentials zerschlagen, da die beiden Electroden sich etwas zu nahe aneinander befanden.

Die beiden Bestimmungsreihen sind daher nicht direct vergleichbar. Eine erste Reihe ergab:

p	+	−
184	3,10	2,76
15	0,61	0,62
0,4	0,43	0,45

Eine zweite Reihe, bei der der Wasserwerth beträchtlich grösser war:

p	+	−
1,3	0,134	0,15
x	0,73	0,48

Auch hier zeigt sich also, *dass die Gesammterwärmung zunächst mit abnehmendem Drucke* (*erste Reihe*) *abnimmt und dann wieder wächst* (*zweite Reihe*). Besonderen Versuchen muss vorbehalten bleiben, in diesem Falle zu constatiren, wie sich positive und negative Electricität verhält, und welchen Antheil im speciellen die Erwärmung an der positiven und an der negativen Electrode und im Rohr besitzt, und wie sich diese Verhältnisse ändern, wenn man die Länge des eingeschalteten Capillarrohres verändert.

Nicht ohne Interesse erschien es, nicht allein durch Aenderung des Druckes, sondern auch durch Einschalten von Funkenstrecken die bei jeder einzelnen Entladung übergehende Electricitätsmenge zu verändern, um so mehr als bei den späteren Versuchen und zum Studium der Spectra, wo die Wärmeentwickelung innerhalb des Capillarrohres ermittelt wird, dieses Mittel vielfach Verwendung finden soll.

Mit dem Apparate I, bei dem nur die Menge des Terpentinöls eine etwas andere war, ergaben sich bei den Drucken p bei Einschaltung der Funkenstrecken 0 und 10 mm folgende Erwärmungen für die positive Entladung.

p:	x	0.6	4,3	12,8	25,6	35	90	166,4	567	759
0	0,253	0,082	0,072	0.088	0,10	0,16	0,30	0,52	1,17	1,30
10	1,34	0,84	0,52	0,56	0.69	0,80	0,81	1,10	1,77	2,2

Die Zahl der Entladungen war ohne Funkenstrecke:

p	730	400	160	90	30
z	20	40	120	220	(etwa 700)

und nahm nun bis zu sehr niedrigen Drucken zu und dann wieder ab. Wenn die Funkenstrecke von 10 mm eingeschaltet war, war die Zahl z bei allen Drucken etwa 13.

Die Vergleichung der Zahlenreihen zeigt: *dass die Erwärmungen, die derselben durchgehenden Electricitätsmenge entsprechen, durchaus nicht umgekehrt proportional der Zahl der Entladungen sind.* So verhalten sich die Zahlen der Entladungen z_0, z_{10} und die Wärmemengen w_0 und w_{10} bei den Funkenstrecken 0 und 10 mm und bei den Drucken p etwa wie:

p	$z_0 : z_{10}$	$w_0 : w_{10}$
180	10 : 1	1 : 2
90	17 : 1	1 : 3
30	50 : 1	1 : 6

Dies lässt sich auch noch in anderer Weise ersehen: während die Erwärmungen zwischen 759 mm und 4,3 mm Druck ohne Schlagweite von 1,3 auf 0,072 also auf $^1/_{15}$ sinken, sinken die mit Schlagweite von 2,2 auf 0,5 also nur auf $^1/_4$.

Aus diesen Thatsachen lässt sich schliessen, dass, wenn eine Funkenstrecke eingeschaltet wird, die Entladung der gesammten Electricität bei einem niedrigeren Potential erfolgt als dasjenige ist, das eintreten würde, wenn sich die gesammte, bei jeder einzelnen Entladung übergehende Electricitätsmenge auf den Electroden anhäufte. Denn dann müsste, wenn die Zahl der Entladungen die $n$fache wird, die Erwärmung ein $n$tel so gross werden. Der Abfluss der Electricität kann aber auch nicht vollständig bei dem Potential stattfinden, das zur Einleitung der Entladung nöthig ist, da sonst die Erwärmung von der Zahl der Entladungen unabhängig sein müsste. Wir müssen vielmehr annehmen, dass die Entladung bei einem mittlern Potential statthat, indem die Electricität nicht so schnell durch das Gas abfliessen kann, als sie durch die Funkenstrecke zufliesst. Es tritt gleichsam eine Stauung derselben ein.

Eine Reihe von Untersuchungen über die Gesetze der Gesammterwärmung von Gasen bei höheren Drucken, wenn sie von Entladungen einer Leydener Batterie oder von Inductorien durchflossen werden, sind auch neuerdings von Vil-

lari[1]) angestellt worden. Auch sie stehen mit den aus der Mechanik folgenden Consequenzen in vollem Einklange, wie das für die von mir behandelten Probleme der Fall ist. Wenn Villari z. B. findet, dass die Erwärmung im Funken zwischen zwei Kugeln nahezu proportional der Funkenlänge wächst, so folgt das unmittelbar aus der von Macfarlane[2]) festgestellten Thatsache, dass die Potentialdifferenzen, die zur Einleitung der Entladung zwischen zwei Kugeln nöthig sind, bei kleinen Funkenstrecken wenigstens proportional dem Abstande derselben zunehmen. Auch aus den schon früher aufgestellten Gesetzen über die Beziehungen zwischen Schlagweite und sich entladenden Electricitätsmengen liessen sich derartige Resultate erwarten. Doch kann Villari nicht bei seinen Versuchen die Erwärmung an den Electroden und in dem Funken selbst, dem das Capillarrohr eines Geissler'schen Rohres entspricht, trennen.

II. Weiter wurden die Erwärmungen in den die Electroden verbindenden Röhren bestimmt, während eine Funkenstrecke F von 10 mm oder keine solche eingeschaltet war. Die Weite des Capillarrohrs (Anordnung Taf. III Fig. 3) betrug 0,4 mm. Die Tabellen geben die bei einer Reihe von Messungen erhaltenen Resultate.

Luft.					Wasserstoff.				
	+		−			+		−	
p	$F=0$	$F=10$	$F=0$	$F=10$	p	$F=0$	$F=10$	$F=0$	$F=10$
11,5	2,04	1,7	2,4	1,90	22	3,76	3,16*)	3,45	3,2 *)
4,2	—	1,48	1,40	1,46	12,2	2,06	1,5	2,00	1,75
0,4	0,81	1,42	0,82	1,21	4,4	1,02	1,3	1,08	1,21
					0,6	0,49	1,16	0,50	0,92

*) Funkenstrecke nur 5 mm.

Neben diesen Beobachtungen her gingen Bestimmungen der Zahlen der Entladungen. Mit einer Funkenstrecke von 10 mm betrug ihre Zahl, auf einen Ausschlage des Galvanometers = 10 reducirt, stets etwa 12 bis 15 in der Secunde, unabhängig von dem Druck im Rohre. Etwas nahm freilich

1) Villari, Beibl. 3. p. 713 und 4. p. 404.
2) Macfarlane, Beibl. 3. p. 429. 1879.

ihre Zahl mit steigendem Drucke innerhalb der Beobachtungsgrenzen ab. Anders ist dies, wenn sich keine Funkenstrecke im Stromkreise befand. Die Tabelle enthält die Resultate.

Luft.			Wasserstoff.		
p	+	−	p	+	−
17,5	40	80	24,4	35	55
6,2	75	90	8,2	100	86
2,4	100	90	3,1	80	101
1,1	75	110	0,8	90	350
0,3	40	180	x	55	170
x	60	140	xx	29	130

Eine zweite Reihe mit einem etwas weiteren Capillarrohre ergab folgende Erwärmungen:

Luft.					Wasserstoff.				
p	+		−		p	+		−	
	$F=0$	$F=10$	$F=0$	$F=10$		$F=0$	$F=10$	$F=0$	$F=10$
11	2,01	1,87	2,16	2,00	12,6	2,33	2,12	2,50	2,4
4,0	1,06	1,47	1,36	1,40	4,7	1,22	1,50	1,20	1,42
0,5	0,51	1,01	0,42	0,97	0,7	0,40	0,83	0,43	0,64
x	0,25	0,83	0,37	0,73	x	0,31	0,80	0,27	0,60

Die entsprechenden Entladungszahlen sind:

Luft.			Wasserstoff.		
p	+	−	p	+	−
14,0	66	33	13	80	90
5,9	83	60	5,1	90	90
2,2	150	110	1,1	90	120
0,8	110	190	0,3	60	280
0,3	50	330	x	60	90
x	50	200			
xx	30	90			

Auch hier war die Zahl der Entladungen, wenn eine Funkenstrecke von 10 mm eingeschaltet war, etwa 12 bis 13.

Mit Rücksicht auf die grossen Differenzen der Entladungszahlen mit und ohne Schlagweite ergibt sich als allgemeines Resultat aus diesen Beobachtungen:

1) Die *Erwärmung in den Capillarröhren bei Drucken über 1 mm ist fast unabhängig von der Menge der bei jeder Entladung*

durchgehenden Electricitätsmenge und nahezu proportional der gesammten durchgehenden Electricitätsmenge, stets vorausgesetzt, dass keine Leydener Flaschen und Condensatoren eingeschaltet sind. Die Abweichungen von diesem Satz bei Drucken unter 1 mm, wo die Erwärmung beim Einschalten von Funkenstrecken wesentlich wächst, bedürfen weiterer Untersuchung.

2) Die *Erwärmung durch die positive und die negative Entladung ist nahezu dieselbe, trotz des Unterschiedes in der Zahl der auftretenden Entladungen.*

Bei einem Drucke von 0,7 mm ist z. B. im Wasserstoff das Verhältniss der Zahl der positiven zu der der negativen Entladungen etwa 1:4, die Erwärmungen sind 0,40 und 0,43.

3) *Mit abnehmendem Druck nimmt die Erwärmung in hohem Grade ab, ohne durch ein Minimum hindurch zu gehen, welches dem Maximum der Zahl der Entladungen* entspräche. Doch zeigte sich bei einigen anderen Röhren eine kleine Zunahme.

Eine besondere Versuchsreihe galt der Frage, ob die Erwärmungen in einem Capillarrohre von *der Gestalt der Electroden* abhängen. Dazu diente die Anordnung Taf. III A. Fig. 9. Die Messungen wurden bei mehreren Drucken und während die positive und negative Electrode abgeleitet war, aber ohne Einschaltung von Funkenstrecken angestellt. Die Zuleitungsdrähte von der Maschine wurden in *c* oder *d*, die Drähte zum Galvanometer in *a* oder *b* eingetaucht.

Die folgende Tabelle enthält die Erwärmungen:

p	Kugeln		Spitzen	
	+	−	+	−
9,7	2,2	2,4	2,2	2,2
3,5	1,18	—	1,17	—
0,4	0,42	0,45	0,44	0,44
x	0,50	0,24	0,33	0,24

Die Erwärmungen sind also im allgemeinen von der Gestalt der Electrode nahezu unabhängig.

Dies Resultat stimmt mit dem für das Einschalten von Funkenstrecken gefundenen überein.

Auch die Zahl der Entladungen änderte sich nicht sehr mit der Gestalt der Electrode. Da indess zwischen den einzelnen Electroden und der Capillarröhre ziemlich lange weite

Röhrentheile eingeschaltet waren, so waren hier, wie stets in diesen Fällen, die Entladungen ziemlich unregelmässig.

Von G. Wiedemann[1]) ist aus Versuchen mit der Holtz'schen Maschine der Satz abgeleitet worden, dass *in einem weiten und einem engen Rohre* auf der Längeneinheit stets von der Entladung gleiche Wärmemengen producirt werden, ein Resultat, welches später von Naccari und Bellati[2]) bei Anwendung des Inductoriums bestätigt wurde.

Ich habe zunächst hierüber eine weitere Reihe von Versuchen mit dickwandigen Capillarröhren angestellt. Dieselben waren unmittelbar aneinander geschmolzen, horizontal gelegt und über sie Calorimeter geschoben (Taf. III A. Fig. 4). Die engere Röhre hat 0,6 mm Durchmesser, der vom Calorimeter umgebene Theil hatte eine Länge von 42 mm, bei dem weiteren waren die entsprechenden Grössen 2 mm und 45 mm. Das Verhältniss der Querschnitte war also 1:10; die Wasserwerthe waren nur wenig verschieden.

Die folgenden Tabellen geben in gewohnter Weise die stets gleichzeitig beobachteten Erwärmungen der beiden Calorimeter.

Wasserstoff.

p	$F = 0$		$F = 10$	
	weit	eng	weit	eng
32,8	0,85	0,96	—	—
21	0,66	0,88	0,66	0,77
8,4	0,30	0,48	0,38	0,44
3,2	0,15	0,20	0,28	0,32
0,6	0,06	0,17	0,12	0,24
x	0,07	0,24	0,19	0,32

Luft.

p	$F = 0$		$F = 10$	
21,5	0,74	0,65	0,82	0,60
8,1	0,34	0,44	—	0,47
3,4	0,18	0,24	0,36	0,33

Die Tabellen zeigen, dass 1) *in Uebereinstimmung mit den früheren Resultaten der Unterschied in der Erwärmung mit und ohne Einschaltung von Funkenstrecken nicht allzu gross ist*, und zwar sowohl in weiten wie in engen Röhren; dass ferner

1) Wiedemann, Pogg. Ann. **158.** p. 35. 1876.

2) Naccari u. Bellati, Atti dell' Ist. Ven. (5) **4.** 1878. Beibl. **2.** p. 720.

die *Erwärmungen bei derselben Funkenstrecke in den beiden verschieden weiten Röhren nicht allzu sehr differiren.* In beiden Fällen treten indess bei niedrigen Drucken beträchtliche Abweichungen von diesen Sätzen auf. Bei ihnen wächst dann einmal, wie bei den früheren Beobachtungen, mit Einschaltung der Funkenstrecke, die Erwärmung beträchtlich, und ferner werden in engen Röhren die Erwärmungen beträchtlich grösser als in weiten. Einen genauern Einblick in diese Verhältnisse können indess erst spätere Versuche liefern.

Eine weitere Versuchsreihe hatte das Verhalten von noch weiteren Röhren zum Gegenstand.

Zwei Röhren, ein Capillarrohr und ein weiteres Rohr von den Durchmesern 0,5 und 4 mm und den Wandstärken 2 und 1 mm wurden hintereinander in den Stromkreis eingeschaltet; die Calorimeter mit Terpentinöl gefüllt und die Erwärmungen bestimmt. Die Tabellen geben die erhaltenen Werthe. Dabei beziehen sich die unter *A* auf den Fall, dass die dem Capillarrohr zunächst liegende Electrode die abgeleitete war, die mit *B* dagegen auf denjenigen, wo die dem weiten Rohre zunächst liegende mit der Erde in Verbindung stand. Die Zeichen + und − geben das Vorzeichen der hindurchströmenden Electricität, *F* die eingeschaltete Funkenstrecke. *d*, *z d*, *h*, *m h* bezeichnet, dass das weite Rohr dunkel, ziemlich dunkel, hell oder von mittlerer Helligkeit erschien.

A.					B.				
p	*F*		Erwärmung eng	weit	*p*	*F*		Erwärmung eng	weit
x	+	0	0,20	0,07	*x*	+	0	0,19	0,09
—	—	0	0,17	0,09	—	—	0	0 18	0,09
—	+	5	0,23	0,18	—	+	5	0,30	0,13
—	—	5	0,18	0.09	—	—	5	0,20	0,10
—	+	10	0,39	0,26	—	+	10	0,49	0,16
—	—	10	0,27	0.13	—	—	10	0,21	0,11
3,8	+	0	1,15	0,38 *z d*	4	+	0	1,12	0,25 *d*
—	—	0	1,35	0,85 *h*	—	—	0	1,36	1,08 *h*
—	+	1	0,95	0,29 *d*	—	+	5	1,22	0,57 *h*
—	—	1	1,23	0,91 *h*	—	—	5	1,50	0,80 *h*
—	+	8	1,11	0,66 *d*	5,3	+	0	1,35	0,20 *d*
—	—	8	1,03	0,83 *h*	—	—	0	1,62	1,20 *h*
7,3	+	0	1,72	0,73 *d*	—	+	4	1,53	0,41 *m h*
—	—	0	2,25	1,33 *h*	—	—	4	1,76	1,14 *h*
—	+	5	1,85	0,63 *d*					
—	—	5	1,90	1,25 *h*					

Diese Tabellen bieten zunächst eine Bestätigung der früheren Resultate, insofern in engen Röhren die Erwärmung sehr nahezu unabhängig ist von der durchgehenden Electricitätsmenge, besonders bei hohen Drucken. Ferner ergibt sich, *dass Abweichungen von diesem Satze, besonders bei der positiven Entladung, eintreten.* In dem weiten Rohre machen sie sich nicht nur thermisch, sondern auch optisch bemerkbar. Durch Einschalten von Funkenstrecken kann ein weites Rohr, das ohne solche hell leuchtet, dunkel gemacht werden, während ein noch weiteres Einschalten wieder eine Erhöhung der Helligkeit hervorruft. Mit dem geht Hand in Hand eine Verminderung und nachherige Steigerung der Erwärmung der Calorimeter, wie dies z. B. die Beobachtungen beim Druck 3,8 zeigen. Ziemlich gleichgültig ist es dabei, ob die dem weiten Rohre nächstliegende Electrode mit der Electricitätsquelle verbunden oder abgeleitet ist.

Dieses eigenthümliche Verhalten der positiven Electricität macht sich aber in noch weit höherem Maasse geltend, wenn wir statt Calorimetern mit Terpentinöl solche mit Quecksilber nehmen.

Die folgende Tabelle gibt eine Reihe solcher vergleichender Messungen, die bei sehr niedrigem Drucke angestellt wurden, während die dem weitern Rohre zunächst liegende Electrode mit der Maschine verbunden war.

F	+		−	
	eng	weit	eng	weit
0	0,23	0,19	0,164	0,13
1	0,37	0,89	0,18	0,12
4	0,39	1,44	0,27	0,16
8	0,49	2,72	0,40	0,12

Während beim Durchgange der negativen Entladung in dem weiten Rohre nur relativ geringe Aenderungen der Erwärmung mit Aenderung der Funkenstrecken stattfinden, sind diese beim Durchgange der positiven im weiten Rohre sehr bedeutend, von 0,19 bis 2,72. Zugleich traten stets starke Ladungen der Glaswandungen auf, die bei etwas höherem Druck im Rohre zu einem Durchbrechen desselben an seinem obern Rande führten.

Weitere Untersuchungen über den Einfluss der Bindung

der Electricität auf den Glaswänden dürften wesentliche Aufschlüsse über den Entladungsmechanismus liefern. Ich werde später darauf zurückkommen.

III. Die Erwärmung an den Electroden wurde mit den Vorrichtungen Taf. III Fig. 2 bestimmt, und zwar zunächst, wenn keine Funkenstrecke eingeschaltet war.

Bei einer ersten Reihe war stets die Electrode, für deren Umgebung die Erwärmung bestimmt wurde, eine mit der Electricitätsquelle verbundene Spitze. Als Gas diente Luft. Es waren die Erwärmungen.

p	+	−	p	+	−
14,4	0,50	0.74	1,2	0,08	0,48
6,2	0,48	0,39	0,45	0,07	0,74
2,4	0,17	0.34	x	0,06	1,26

Bei einer zweiten Reihe wurden die Erwärmungen ebenfalls an Spitzenelectroden bestimmt, sowohl wenn die betreffende Electrode mit der Maschine verbunden, als auch wenn sie abgeleitet war. Die folgende Tabelle enthält unter a die im ersten Fall, unter b die im zweiten erhaltenen Werthe. Der Wasserwerth des Calorimeters etc. betrug etwa 6,4. Als Gas diente Wasserstoff.

	a			b	
p	+	−	p	+	−
26,5	0,63	0,60	26	0,62	0,50
8,1	0,26	0.39	8	0,24	0,30
2,6	0,15	0,37	2,4	0,14	0,41
0,6	0,06	0,64	0,8	0,10	0,81
0,2	0,07	0.63	x	0,10	1,05
x	0,09	0,77	—	—	—

Bei der dritten Reihe waren die Electroden Kugeln, das Gas war Wasserstoff; der Wasserwerth betrug etwa 7,4; es ergaben sich folgende Resultate.

	a		b	
p	+	−	+	−
31	0,94	0,93	0,96	0,83
2,7	0,227	0,42	0,20	0.40
0,2	0,11	1,31	0,064	1,33
x	0,21	1,66	0,36	2,40

Als allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen Tabellen:

1) *Die Erwärmung an der positiven Electrode nimmt mit abnehmendem Druck stetig und stark ab. Bei ganz niedrigen Drucken zeigt sich zuweilen eine geringe Zunahme.* Zugleich leuchtet das sie umgebende Glas hin und wieder grün auf, als ob die Electrode zeitweilig negativ würde.

2) *Die Erwärmung an der negativen Electrode nimmt mit abnehmendem Drucke erst ab und dann wieder sehr stark zu.*

Diese Erwärmungen rühren einmal von der Erwärmung der Electrode, dann von der des eingeschlossenen Gases und endlich von der der Glashülle her.

Bei ganz niederen Drucken ist wohl bei der negativen Electrode, wo das Glas hell leuchtet, vor allem die letztere Erwärmung das massgebende. Ich habe berechnet, wie gross dabei die auf einen qcm der Wand kommende Erwärmung wäre, vorausgesetzt, dass die ganze Wärme am Ende der von der negativen Electrode ausgehenden Entladung auf der Glaswand erzeugt würde.

Ich wählte dazu die Beobachtung mit Spitzenelectroden unter *a* bei ganz niedrigen Drucken. Die leuchtende Oberfläche des Glases hatte eine Grösse von 5 qcm, auf diese kam in der Minute eine Wärmemenge $0{,}77 \times 6{,}4 = 4{,}9$ Calorien, auf den qcm also eine solche von 0,98 Calorien. Zum Vergleich führe ich an, dass die Strahlung der Sonne während 1 Minute auf einen qcm der Erdoberfläche eine Wärmeproduction von etwa 2 Calorien erzeugt. Wohl zu beachten ist aber, dass die von der negativen Electrode ausgehenden Entladungen nur ganz kurze Zeit anhalten (lange nicht den tausendsten Theil der gesammten Zeit), während die von der Sonne kommenden während der ganzen Zeit continuirlich wirken.

Eine grosse Zahl von Messungen mit verschieden geformten Electroden wurden angestellt, um den Einfluss des Einschaltens einer Funkenstrecke auf die Erwärmung an der Electrode festzustellen, doch gaben dieselben nur äusserst schwankende Resultate. Eine ganz kleine Anzahl dieser Beobachtungen gibt die folgende Tabelle (*F* bezeichnet die Funkenstrecke):

		—						+			
p	$F=0$	2	5	10	14	p	$F=0$	2	5	10	14
14,4	0,74	—	0,66	—	—	14,4	0,50	—	0,41	—	—
6,2	0,39	0,33	0,43	0,42	—	6,2	0,48	—	—	0,26	—
2,4	0,34	0,58	0,68	0,46	—	2,4	0,17	0,15	0,25	0,37	—
1,2	0,43	—	0,59	0,77	0,90	1,2	0,08	—	0,30	—	0,50
x	1,26	1,15	1,4	1,35	—	x	0,06	0,32	0,46	0,91	—

Hervorzuheben ist die stets beobachtete Thatsache, *dass bei niederen Drucken die Erwärmung an der positiven Electrode ohne Funkenstrecke ungemein klein ist, dass sie aber sehr schnell wächst, sobald eine solche angebracht wird.*

Fassen wir die Resultate der Beobachtungen über die Erwärmung ohne Einschalten von Funkenstrecken zusammen, so ergibt sich folgendes:

1) *Die Gesammterwärmung nimmt mit abnehmendem Druck erst ab, dann wieder stark zu.*

2) *Die Erwärmung der Röhre nimmt stark ab und dann ganz wenig wieder zu.*

3) *Die Erwärmung an der positiven Electrode nimmt erst stark ab und dann wenig zu.*

4) *Die Erwärmung an der negativen Electrode nimmt erst langsam ab und dann stark zu.*

Hieraus folgt, dass für die Erwärmungserscheinungen in der gesammten Entladungsröhre bei den von mir angestellten Versuchen und unter normalen Verhältnissen ohne Einschaltung von Funkenstrecken die Vorgänge an der negativen Electrode massgebend sind.

Aus den Versuchen über die positiven Entladungen folgt aber weiter: Abweichungen von den obigen Sätzen sind durch ein besonderes Verhalten (p. 223 u. 224) der positiven Electricität bedingt, welches sich besonders geltend macht, wenn der Durchgang der Electricität nicht bei dem normalen, der Beschaffenheit des Rohres entsprechenden Potential erfolgt, sondern durch Einschalten von Funkenstrecken oder äussere Ableitungen die bei jeder einzelnen Entladung durchgehende Electricitätsmenge vergrössert wird.

4. Absolute Bestimmungen.

Um ein Maass für die in einem Capillarrohre auf der Längeneinheit von der Electricitätseinheit erzeugte Wärmemenge zu gewinnen, wurden einige besondere Messungen angestellt.

Das Calorimeter bestand aus Glas, die Flüssigkeit in demselben aus Wasser. Die Länge des von Wasser umgebenen Theiles des Capillarrohrs betrug 9,4 cm, sein Durchmesser 0,58 mm. Der Wasserwerth des Calorimeters war mit dem Wasser darin 16,2 g. Die Temperaturerhöhungen, in gewöhnlicher Weise auf einen Ausschlag von 100 mm und die Minute reducirt, betrugen:

p	+	−
15,5	1,09	1,01
5,5	0,50	0,37

Die Zahl der Entladungen betrug im Mittel bei $p =$ 15,5 mm in der Minute 60 000, bei $p = 5{,}5$ mm 144 000.

Zunächst musste der Ausschlag des Galvanometers auf bestimmte Einheiten reducirt werden. Das Galvanometer gab mit einem Thermostrom, herrührend von einem Kupferneusilberelement, dessen Löthstellen die Temperaturen 13 und 29,2° hatten, wenn nacheinander kein Widerstand und solche von 1, 2, 3 Siemens eingeschaltet wurden, Ausschläge von 122, 37, 21 und 15 mm. Hieraus und aus dem Abstand von Scala und Spiegel = 189 cm, ergaben sich für den Widerstand des Galvanometers und Thermoelementes für sich im Mittel 0,43 Siemens.

Die electromotorische Kraft des Thermoelementes hatte Hr. Eaton besonders bestimmt und gefunden, dass, wenn die Temperaturen der Löthstellen 15,3 und 92,5° betrugen, sie in Siemens-Weber = 0,0167 war. Nehmen wir an, was bei dem sonst erreichbaren Grade von Genauigkeit vollkommen statthaft ist, dass die electromotorische Kraft unseres Thermoelementes proportional der Temperaturdifferenz sei, so wird dieselbe für 1° in Siemens-Weber 0,00022, woraus wir dieselbe durch Division mit 11,6 (Wied. Galv. II.

2 § 1080) in Siemens-Daniell zu 0,000 019 erhalten. Wild fand für dieselbe Grösse 0,000 011 08. Die Abweichung beider Zahlen erklärt sich leicht aus dem grossen Einflusse der verschiedenen Structur der Metalle auf ihre thermo-electromotorischen Kräfte. Unserer Temperaturdifferenz von 16,2° C. entspricht also eine electromotorische Kraft $0.000\,019 \times 16{,}2$, der Ausschlag von 122 mm einer Stromintensität von $\frac{0{,}000\,019 \times 16{,}2}{0.43}$, der von 100 mm einer solchen von $\frac{0{,}000\,019 \times 16{,}2 \times 100}{0{,}43 \times 122} = 0{,}000\,586\,6$ Daniell-Siemens.

Bezeichnen wir jetzt mit t die Temperaturerhöhung des Calorimeters, W seinen Wasserwerth, l die Länge des eintauchenden Theiles des Capillarrohres, so ergibt sich für die auf der Längeneinheit entwickelte Wärmemenge $B = \frac{W.t}{l}$, und wenn wir annehmen, dass dieselbe der Quantität der durchgehenden Electricitätsmenge e proportional ist, für die von der Electricitätsmenge 1 in der Zeit 1 auf der Länge 1 producirte Wärmemenge X:

$$X = \frac{Wt}{le}.$$

Die Grössen X werden bei unseren Versuchen, wenn als Längeneinheit das Centimeter, als Gewichtseinheit das Gramm, als Zeiteinheit die Minute und als Electricitätseinheit die im Siemens-Daniell'schen Maasse gemessene genommen wird:

p	+	−
15,5	3200	2966
5,1	2636	1962

Die entwickelten Wärmemengen sind also ungemein gross, die Electricitäten müssen sehr grosse Potentialverluste erfahren. Dies zeigt auch die folgende Betrachtung.

Wird in einem Daniell'schen Element ein Aequivalent Zink = 32,6 g Zink gelöst, so ist die dabei frei werdende Wärmemenge 23900 Calorien. Ein Strom von der Intensität Eins in Siemens-Daniell würde in einer Secunde 0,0116 mg Wasserstoff oder $0{,}0116 \times 60 \times 32{,}6 = 22{,}7$ mg Zink in der Minute abscheiden.

Die gesammte, von einem solchen Strome in der Minute erzeugbare Wärme beträgt demnach $= \frac{0{,}0227}{32{,}6} \times 23900 = 160$ Calorien; sie ist also etwa ein Zwanzigstel so gross als die obige. Das Capillarrohr hatte aber im ganzen etwa eine Länge von 1 m, sodass in ihm allein, abgesehen von der Erwärmung an den Electroden, etwa 30000 Calorien von der Electricitätsmenge Eins erzeugt werden würden.

Aus den experimentell gefundenen Zahlenangaben lässt sich auch die Temperatur des Gases in der Entladungsröhre bei jeder Entladung finden, vorausgesetzt, dass die gesammte Wärme zur Erwärmung des Gases und nicht zur Leistung einer innern Arbeit dient (s. unten) und ausserdem die Entladung so schnell erfolgt, dass während derselben keine Wärmeabgabe nach aussen eintritt.

Bezeichnet T die Maximaltemperatur des Gases, c die specifische Wärme[1]) der Gewichtseinheit, s das specifische Gewicht desselben bei 760 mm, p den Druck, bei dem die Versuche angestellt wurden, V das Volumen auf der Längeneinheit des Capillarrohrs, Z die Zahl der Entladungen in der Minute, W den Wasserwerth des Calorimeters und t die Temperaturerhöhung desselben, so ist:

$$\frac{T.c.s.p.V.Z}{760} = Wt.$$

Nach den Daten der Versuche wird T:

p	+	−
15,5	1977	1830
5,1	1148	849,2

1) Als specifische Wärme ist die bei constantem Druck gewählt, denn ganz ohne Ausdehnung geht die Erwärmung des Gases in dem Entladungsrohre nicht vor sich, wie folgender Versuch bewies. Schaltet man zwischen zwei weitere Röhren eine Capillarröhre, füllt das Ganze mit Wasserstoff und steigert durch Einschalten einer Funkenstrecke die Electricitätsmengen so sehr, dass die Capillarröhre schön roth leuchtet, so setzt sich das rothe Licht noch ein kleines Stück (2—3 mm) in die weiten Theile fort, gerade als ob das roth leuchtende Gas in dieselben hineingetrieben würde.

Die Temperaturen sind demnach schon in diesen engen Röhren recht niedrig, in einem zehnmal weitern würden sie auf 100° sinken.

Dies ist eine weitere Bestätigung für den früher aufgestellten Satz, wonach *Gase durch electrische Entladungen ohne entsprechende Temperaturerhöhungen zum Leuchten gebracht werden können.*

5. Beziehungen zwischen Spectralerscheinungen, Erwärmungen und Electricitätsmengen.

Die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den durch ein Gas von bestimmtem Druck hindurchgehenden Electricitätsmengen,den dabei abgegebenen Energiemengen und den damit verbundenen Aenderungen der Spectralerscheinungen habe ich bisher nur in einem einzigen Falle zu lösen versucht, der mir aber von besonderem Interesse zu sein schien. Ich habe bestimmt, eine wie *grosse abgegebene Energiemenge nöthig ist, um das Bandenspectrum des Wasserstoffs in das Linienspectrum zu verwandeln.*

Die Beobachtungen wurden in folgender Weise angestellt. Ueber das horizontal gelegte Capillarrohr eines Entladungsrohres wurde ein Calorimeter geschoben und möglichst nahe an der Stelle, wo dasselbe auf dem Rohre sass, mit einem Spectroskop mit horizontalem Spalt das Spectrum beobachtet. Durch Einschalten einer Funkenstrecke wurde dann das Bandenspectrum in ein Linienspectrum verwandelt. Lassen wir die Funkenstrecke allmählich von Null an wachsen, so ist zunächst das Bandenspectrum recht hell, aber schon zeigen sich neben ihm die drei Wasserstofflinien, dann wird der Grund schwächer, die Wasserstofflinien heller, bis zuletzt fast plötzlich das Bandenspectrum vollständig verschwindet. Der Uebergang ist so schnell, dass das Auge ihn schon ohne Spectroskop wahrnehmen kann. Dieser Gang des Phänomens ist bereits von Wüllner u. a. beobachtet worden. War die hierzu erforderliche Funkenstrecke bestimmt, so wurde die Erwärmung des Calorimeters t und die Zahl der Entladungen ermittelt. Hieraus berechnet man die Erwärmung für eine Entladung bei dem betreffenden Druck. Daraus

endlich wurde durch Division mit dem Druck bestimmt, wie gross die Erwärmung sein müsste, wenn der Druck nur 1 mm betragen würde.

Ist a die Temperaturerhöhung des Calorimeters in der Minute durch den Strom mit dem Ausschlag 100, W der Wasserwerth desselben, z die Zahl der Entladungen in der Secunde bei demselben Strome, p der Druck, so gibt die Grösse:

$$A.W = \frac{a}{z.60.p} \cdot W$$

an, eine wie grosse Wärmemenge entwickelt werden müsste, um in einem Gase von dem Drucke Eins das Bandenspectrum in das Linienspectrum zu verwandeln, wobei freilich vorausgesetzt ist, dass die obige Wärmemenge für ein gegebenes Volumen proportional dem Drucke ist. Die Messungen wurden an zwei verschiedenen Röhren von den Radien 0,304 und 0,183 mm angestellt und sind ohne Ausnahme in den folgenden Tabellen wieder gegeben, und zwar in der Reihenfolge, in der sie ausgeführt wurden. Die Längen der im Calorimeter befindlichen Röhrentheile betrugen 42 mm, die Wasserwerthe der beiden Calorimeter 11,84 und 12,08. Einige der Zahlen waren sicher zu klein, indem die Schlagweiten bei der momentanen Beschaffenheit der Maschine nicht hinlänglich gesteigert werden konnten, um ein vollkommenes Verschwinden des Bandenspectrums hervorzurufen. Dieselben sind mit einem Stern versehen. Bei der Bestimmung der Mittelwerthe sind sie fortgelassen. An der ersten Röhre wurden zwei getrennte Beobachtungsreihen ausgeführt, von denen die eine die drei ersten, die zweite die vier letzten Beobachtungen umfasst.

I.

p	a	z	A
5,8	0,50	166	0,000 008 6 (*)
2,2	0,28	184	0,000 011 6
0,9	0,19	181	0,000 019 1
15,3	0,745	100	0,000 008 1 (*)
5,4	0,50	96	0,000 015 8
2,1	0,28	160	0,000 013 9
0,9	0,21	233	0,000 016 7
		Mittel	0,000 015 5

II.

p	a	z	A
9,4	0,52	250	0,000 003 69(*)
3,6	0,26	200	0,000 006 15
1,7	0,20	270	0,000 007 26
6,2	0,35	160	0,000 005 87
14,1	0,60	133	0,000 005 33
		Mittel	0,000 005 65

Zwei Bestimmungen bei den Drucken 2,2 mm und 0,7 mm ergaben bei dem Rohr I, als noch sehr deutlich Banden zu sehen waren, $A = 0{,}000\,005\,2$ und $0{,}000\,005\,7$.

Die Zahlen in der letzten Columne von I und II stimmen so weit überein, als es die complicirten Versuchsbedingungen zulassen. Sie zeigen, dass „die zur Umwandlung des Bandenspectrums in das Linienspectrum von der Entladung abzugebende Energiemenge für eine gegebene Menge Wasserstoff unabhängig vom Drucke ist". Das Verhältniss der Wärmemengen, die auf der Querschnittseinheit nöthig sind, um bei I und II das Bandenspectrum in das Linienspectrum umzuwandeln, ist, da die die Wärme abgebenden Längen der Röhren gleich gross waren:

$$\frac{(0{,}183)^2\, 0{,}000\,015\,5 \times 11{,}84}{(0{,}304)^2\, 0{,}000\,005\,65 \times 12{,}08} = \frac{= 617 \times 10^{-6}}{= 631 \times 10^{-6}} = 0{,}979\,.$$

Diese Zahl ist so nahe gleich der Einheit, wie es bei den ungemein schwierigen Versuchen nur irgend zu erwarten war.

Wir können demnach schliessen, dass die von einer Entladung an die Gewichtseinheit Gas abzugebende Wärmemenge, welche nöthig ist, um das Bandenspectrum in das Linienspectrum umzuwandeln, unabhängig von Druck und Querschnitt des Rohres ist.

Wir können aber auch leicht berechnen *1) wie gross in absolutem Maasse die auf 1 g Wasserstoff zu obiger Umwandlung nöthige Wärmemenge ist, 2) wie gross bei jedem Drucke die dazu nöthige Electricitätsmenge ist.* Der Wasserwerth des Calorimeters I ist 11,84, die jeder Entladung entsprechende Temperaturerhöhung 0,000 015 5. die Länge des eintauchenden

Theiles ist 4,2 cm, also ist die von der Längeneinheit abgegebene Wärmemenge pro Entladung:

$$\frac{11{,}84 \times 0{,}000\,015\,5}{4{,}2} \text{ Calorien.}$$

Das Volumen des Gases auf der Längeneinheit ist, da der Querschnitt 0,0029 qcm beträgt, 0,0029 ccm und sein Gewicht bei 1 mm Druck $\frac{1}{760} \cdot \frac{1 \,.\, 0{,}0029 \,.\, 0{,}069}{773{,}38}$ g. Die auf 1 g nöthige Wärmemenge ist daher:

$$\frac{11{,}84 \times 0{,}000\,015\,5 \times 760 \times 773{,}3}{4{,}2 \times 0{,}0029 \,.\, 0{,}069} \text{ Calorien} = 128\,300 \text{ Calorien.}$$

Bestimmen wir noch die Electricitätsmenge, die auf die Querschnittseinheit 1 qmm kommen muss, um das Bandenspectrum in ein Linienspectrum zu verwandeln.

Wählen wir dazu etwa den Druck von 2,2 mm im ersten Rohr, so ist die Zahl der Entladungen auf einen Galvanometerausschlag von 100, wenn das Bandenspectrum in ein Linienspectrum verwandelt wird, etwa 200. Einer Entladung entspricht also ein Ausschlag 0,5, die Electricitätsmenge geht durch einen Querschnitt von 0,29 qmm, sodass also auf den Quadratmillimeter selbst eine Electricitätsmenge, die einem Ausschlag 1,73 entspricht, $= \frac{0{,}000\,586\,6 \,.\, 1{,}73}{100} = 0{,}000\,010\,15$ Daniell-Siemens kommt.

Versuche über das Verhalten der Entladung in sehr verdünnten Räumen.

1. Reitlinger und Urbanitzky[1]), Spottiswoode[2]) und andere haben gefunden, dass, wenn man einem weit evacuirten Geissler'schen Rohr den Finger nähert oder es mit demselben berührt, die Entladung abgelenkt wird. Ich[3]) habe dann gezeigt, dass diese Erscheinung hauptsächlich bei der positiven Entladung eintritt, und dass bald die innere, bald die äussere Wandung des Rohres grün leuchtet.

Durch neuere Versuche habe ich dargethan, dass die

1) Reitlinger u. Urbanitzky, Beibl. **1.** p. 416. 1877.
2) Spottiswoode, Beibl. **3.** p. 643. 1879.
3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **9.** p. 157. 1880.

abgeleitete Stelle des Rohres sich hierbei vollkommen wie eine negative Electrode verhält; denn

a) zeigte sich auf der Innenwand ein freilich nur schwaches röthliches Licht, das ein ganz ähnliches Spectrum liefert, wie der rothe Schein, der sich auf der negativen Electrode bildet.

b) Entwirft die von der Wand abgestossene Entladung von einer positiven oder isolirten Electrode Bilder auf der gegenüberliegenden Wand, die sich bei Anwendung eines Magnets verschieben.

3) Wendet man den Apparat Taf. III A. Fig. 10 an und ist *a* mit dem positiven Pol der Maschine verbunden, *b* aber negativ, und berührt man die Wand bei *d*, so bildet sich bei *f* ein vergrösserter Schatten von *b* ab, wie ihn eine negative Electrode von einer andern negativen entwirft. Die Eigenschaften und Gestalten des letzteren Schattens sind eingehend von Goldstein[1]) studirt worden.

Die Entladung kann die Eigenschaft, empfindlich zu sein, in sehr merkwürdiger Weise verlieren, wie dies schon Spottiswoode beobachtet hat. Ein von mir angestellter Versuch lässt dies noch deutlicher hervortreten. Das angewandte Rohr hatte eine Länge von etwa 5 m, eine Weite von etwa 5 mm. Auf einer Strecke von etwa einem halben Meter war es spiralförmig von einem Stanniolstreifen umzogen. Machte man dann durch Einschalten von Funkenstrecken die Entladung empfindlich und leitete den Stanniolstreifen ab, so entstand demselben gegenüber auf der Glaswand eine ebensolche Spirale von Phosphorescenzlicht, die aber von der positiven isolirten Electrode nach der negativen zu immer schwächer wurde und zuletzt verschwand. Auch an Stellen, die zwei und mehr Meter von dem Berührungspunkte entfernt waren, konnte durch Anlegung des Fingers kaum noch grünes Licht hervorgerufen werden. Es ist als ob die Entladung die die Phosphorescenz erzeugende in ihr befindliche Bewegungsform verlöre (s. w. u.).

Zu beachten ist, dass das grüne Licht des Glases nicht

1) Goldstein, Berl. Ber. p. 284. 1876.

sowohl in den von dem Strome durchflossenen Röhrentheilen am schönsten hervortritt, sondern vielmehr da, wo sich blind endigende Zweigröhren ansetzen, z. B. an den zum Festhalten der Schliffe dienenden Ansatzstücken (Taf. III Fig. 6).

2. Ferner wurde untersucht, ob die negative, das grüne Licht erregende Entladung, die sogenannten Kathodenstrahlen wirklich nur in gerader Richtung sich fortpflanzen. Dazu wurde ein Apparat wie Taf. III Fig. 11 benutzt. War a negativ, b positiv, so trafen, wenn der Winkel bei m etwa 30° betrug, die von a herkommenden Entladungen zunächst auf die Glaswand bei s, erleuchteten dieselbe hell, dann auf die Biegung bei m. Auch hier trat sehr helles grünes Licht auf; schwach leuchtete dagegen das Rohr von s bis m und m bis l; auf der Fläche d dagegen zeigte sich gerade gegenüber der Mündung des Rohres $s\,m\,l$ ein heller grüner Fleck, in dessen Mitte sich ein scharfer Schatten der Electrode e abzeichnete.

Dass dieser Lichtfleck nicht etwa vom Licht hervorgerufen wurde, das mehrfache Reflexionen im Innern der Röhre $s\,m\,l$ erfahren hatte, ergab sich auf zweierlei Art. Einmal zeigte sich kein violetter Fleck, wenn die positive Entladung ohne Auftreten von grünem Licht das Rohr durchsetzte, und ferner änderte der grüne Fleck unter dem Einflusse eines Magnets seine Lage.

Wurde der Winkel bei m grösser als etwa 45° gewählt und ausserdem das Rohr $m\,l$ ziemlich lang genommen, so war der Fleck erst schwach, tauchte aber mit grosser Helligkeit auf, sobald der a direct umgebende Röhrentheil mit dem Finger abgeleitet wurde. Zugleich gehorchte dann die von a ausgehende Entladung innerhalb $a\,s$ nur wenig dem Magnet. Eine Ableitung an einem etwa von a etwas entferntere Punkte war ohne Einfluss.

Ob wir es hier mit einer wirklichen Umbiegung der Kathodenstrahlen zu thun haben, oder ob secundäre Umstände eine Rolle spielen, muss noch weiter untersucht werden. Es wäre möglich, dass die Wandung bei m sich in eine negative Electrode verwandelte und dadurch die Ablenkungen der Strahlen hervorgerufen würden. Eine Stütze für eine solche Auffassung könnte die Thatsache sein, dass wenn man in

den Weg eines von einer ebenen Platte ausgehenden Strahlenbündels einen Glasstab oder eine schmale isolirte Metallplatte nahe an der Kathode setzt, dann an ihnen die Strahlen in hohem Grade divergiren, gerade als ob sie selbst eine negative Electrode würde. Die Divergenz wird grösser, wenn man Funkenstrecken einschaltet.

3. Weiter wurde bestimmt, ob die negativen, das grüne Licht erregenden Bewegungen die gewöhnliche Entladung durchsetzen können. Dies beweist in der That der folgende Versuch:

a (Taf. III A. Fig. 12) ist eine plattenförmige Electrode, *b* eine Spitze. Ist *a* negativ, *b* positiv, so sieht man, der Oeffnung der Röhre bei *c* entsprechend, auf *m* einen hellen grünen Fleck; zugleich leuchtet das Rohr bei *c* in violettem Licht, in derselben Farbe wie eine Röhre, durch die keine Kathodenstrahlen gehen.

Ein Versuch, zu bestimmen, ob eine zeitliche Differenz zwischen dem Auftreten des violetten Lichtes und des grünen stattfand, ergab, zum Theil wohl wegen der grossen Lichtschwäche in *c*, keine sicheren Resultate.

4. Ich habe auch einige Versuche angestellt, um zu bestimmen, ob die Kathodenstrahlen sich vielleicht mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen, und dazu ein 1 m langes Entladungsrohr benutzt, dessen eine am einen Ende befindliche Electrode durch eine Platte gebildet war, die die Kathodenstrahlen bei hinlänglicher Evacuation durch die ganze Röhre sandte. An beiden Enden trat indess, wie Versuche im rotirenden Spiegel zeigten, zu gleicher Zeit das Phosphorescenzlicht auf.

5. Um den Einfluss der Gestalt der Electroden auf die Zahl der Entladungen und das zur Einleitung derselben nöthige Potential zu untersuchen, wurden folgende Versuche angestellt.

An ein und dasselbe vierfach gegabelte Rohr waren angeschmolzen der Apparat Taf. III A. Fig. 11 von *a* bis *m*, zweitens der Apparat Taf. III Fig. 10, drittens ein Entladungsrohr analog Taf. III A. Fig. 11, nur dass an Stelle von *b* eine *a* parallele Platte sich befand. Das Ganze wurde weit ausge-

pumpt, sodass, wenn die Platten negativ waren, das ganze Rohr schön grün leuchtete. Im rotirenden Spiegel zeigte sich Folgendes:

a) Nimmt man Apparat Taf. III A. Fig. 10, so zeigt sich kein Unterschied, wenn die positive oder negative Electrode zur Erde abgeleitet ist; das grüne Lichtband erscheint fast vollkommen continuirlich.

b) Nimmt man den Apparat mit den beiden Platten, so ist dasselbe der Fall.

c) Nimmt man den Apparat Taf. III A. Fig. 11, so zeigt sich, wenn die Platte negativ ist, keine Discontinuität im rotirenden Spiegel, ist dieselbe aber positiv, so hat man die in der Taf. III A. Fig. 13 wiedergegebene Erscheinung.

Dieselbe besteht aus einzelnen scharfen, sehr hellen Bildern der Röhre, z. B. *b* und *d*; jedem derselben geht zeitlich eine weit schwächere Entladung, *a a*, *c c*, voran, die an ihrem Anfang gleichfalls scharf begrenzt ist und fast durchweg eine gleiche Helligkeit bewahrt. Vermehrt man die Rotationsgeschwindigkeit der Electrisirmaschine, so ändert sich die Erscheinung nicht. Leitet man die Aussenwandung des Rohres ab, so lösen sich die breiten Streifen in einzelne getrennte Bilder auf. Die Erscheinung hat wahrscheinlich in der Ladung der Röhre ihren Grund.

Bei sehr geringen Drucken hängt demnach von der Gestalt der sich entladenden Electroden in hohem Grade nicht allein die Zahl der Entladungen, sondern auch der ganze Mechanismus derselben ab.

6) Um den Einfluss der von der negativen Electrode ausgehenden Kathodenstrahlen auf die Intensität des Stromes zu messen, war zwischen zwei etwa 40 cm voneinander entfernte, sich gerade gegenüberstehende plattenförmige Electroden ein um ein Charnier drehbares Glimmerblättchen so befestigt, dass es ohne Lösung der Verbindungen zwischen die Electroden gebracht oder von dort entfernt werden konnte. Im ersten Falle fing es die von der negativen Electrode ausgehenden Kathodenstrahlen auf, während sie im letzteren frei fortschritten. Die Stromintensität war in beiden Fällen dieselbe.

7) Reitlinger[1]) hat nachgewiesen, dass wenn in einem vom Strome durchflossenen Rohre um die positive Electrode noch Schichten gelagert sind, die Zahl derselben sich wesentlich vermehren lässt, wenn man derselben von der negativen Electrode aus einen Magnet nähert. Die Vermehrung geht dabei in der Weise vor sich, dass die der negativen Electrode zunächst gelegenen vorrücken und an der positiven neue hervortauchen. Es ergab sich mir, dass der mittlere Abstand der einzelnen Schichten sich dabei nicht wesentlich ändert. Sind bereits alle Schichten infolge fortgesetzter Evacuation verschwunden, so gelang es mir bei Annähern eines Magnets an die Electrode aus dieser noch solche hervorzuziehen. Besonders schön ist die Erscheinung, wenn die positive Electrode eine Spitze ist, um dieselbe herum quellen dann gleichsam die Schichten heraus.

Die Erscheinungen zeigen sich indess nur dann recht deutlich, wenn die bei der Entladung übergehenden Electricitätsmengen genau dem Potential entsprechen, das zu einer Entladung in der Röhre erforderlich ist, und nicht etwa durch Einschalten von Funkenstrecken vergrössert werden.

Wirkung der verschiedenen Electricitätsquellen.

Die einfachsten Verhältnisse haben wir entschieden für die Entladungen bei *Reibungs- oder Influenzelectrisirmaschinen.* Bei ihnen wird in stetiger Weise die Electricität erzeugt, sie strömt den Electroden zu, erreicht nach bestimmter Zeit das zur Entladung nöthige Potential, entladet sich und das Spiel beginnt von neuem. Auf den Scheiben, Zuleitungsdrähten etc. ist relativ so wenig Electricität angehäuft, oder sie strömt doch so schnell nach, dass die Entladung fast als instantan betrachtet werden kann. Nur in ganz vereinzelten Fällen bei sehr niedrigen Drucken sehen wir manchmal, wie eine Entladung sich aus einer Reihe von Partialentladungen zusammensetzt.

Solche instantane Entladungen brauchen wir aber zu unseren Untersuchungen, denn nur bei ihnen ist anzunehmen, dass die Energieabgabe von der Entladung an das Gas

1) Reitlinger, Wien. Anz. p. 795. 1876.

so schnell stattfindet, dass nicht schon während derselben eine merkliche Uebertragung der Energie vom Gase an die Umgebung eintritt.

Die von der Töpler'schen Maschine erzeugten Electricitätsmengen reichen dabei vollkommen zu allen thermischen Messungen aus. Sie sind aber andererseits wiederum nicht so gross, dass nicht fast stets im rotirenden Spiegel noch die einzelnen Entladungsbilder getrennt werden könnten. Wesentlich ist ferner, dass die Quantität der gelieferten Electricität durch eine blosse Veränderung der Umdrehungsgeschwindigkeit, also ohne Veränderung des Schliessungsbogens, vermehrt oder vermindert werden kann. Dadurch ist vor allem ein Einschalten von Widerständen, das in die Entladungsvorgänge Complicationen einführt, unnöthig gemacht.

Durch Einschalten einer Funkenstrecke in den Schliessungskreis wird im allgemeinen die Art der Entladung nicht geändert, sondern nur die bei jeder einzelnen Entladung plötzlich übergehende Electricitätsmenge vergrössert.

Viel complicirter gestalten sich die Verhältnisse beim *Inductorium*.[1])

Bei jeder Oeffnung und Schliessung des primären Stromes treten neben der Hauptentladung noch eine ganze Reihe von Partialentladungen auf, die eine abnehmende Intensität besitzen. Dass nicht nur eine einzelne derselben die Entladungsröhren durchsetzt, lässt sich leicht mittelst des rotirenden Spiegels constatiren. Jede der Partialentladungen dauert aber wieder eine gewisse Zeit, indem nur allmählich die Electricität von der Spirale zu den Electroden hinströmt; sie wird daher entweder selbst sich wieder aus einer Reihe von Theilentladungen zusammensetzen oder einem mehr oder weniger continuirlichen Electricitätsabgang entsprechen. Die Bilder der Entladungen bestehen nicht, wie bei den Influenzmaschinen, aus einzelnen scharfen Linien, sondern aus mehr oder weniger breiten Banden, auf denen Lichtmaxima und -minima hervortreten.

1) Vgl. hierüber auch G. Wiedemann, Pogg. Ann. **158**. p. 286. 1876.

Die Gesammterwärmung im Entladungsrohr ist, wie oben nachgewiesen, immer bedingt durch die gesammte durchgehende Electricitätsmenge, unabhängig von der Quantität in jeder einzelnen Entladung, sodass sich das von Naccari und Bellati gefundene Resultat[1]) ohne weiteres erklärt.

Hierzu kommt noch, dass bei verschiedenen Drucken des Gases in der Entladungsröhre der Verlauf der Inductionsströme und die von dem Inductorium hindurchgesandte Electricitätsmenge eine wesentlich verschiedene ist, da das Potential an den Enden der Spirale, ehe ein Abfluss der Electricität erfolgt, verschieden hoch anwachsen muss. Sind die Drucke im Gas sehr hoch, so wird freilich nur die erste Hauptentladung hindurchgehen.

Aus allen diesen Betrachtungen folgt, dass das Inductorium zu einem quantitativen Studium der Entladungen sowohl, wie der Spectralerscheinungen durchaus ungeeignet ist. Denn jede der verschieden starken Partialentladungen wird andere Spectralerscheinungen hervorrufen, und eventuell die eine ein Linien-, die andere ein Bandenspectrum erzeugen.

Ganz dieselben Bemerkungen gelten auch für die Entladungen grosser *Batterien von Leydener Flaschen*, nur dass hier noch ein weiterer Umstand hinzutritt. Ein Theil der bei jeder Entladung übergehenden sehr grossen Electricitätsmengen ladet die Oberflächen der Entladungsröhren und entladet sich erst allmählich, wie das Nachleuchten der Röhren deutlich zeigt. Besonders auffällig wird es, wenn man sehr lange Röhrenleitungen von 30 und mehr Meter Länge benutzt.

Bei der Behandlung der *galvanischen Säulen*, wie sie von Hittorf zu seinen schönen Untersuchungen verwendet worden sind, müssen wir zunächst untersuchen, ob bei den grossen durch sie gelieferten Electricitätsmengen das Gas nach den einzelnen Entladungen wieder in seinen anfänglichen Zustand zurückkehrt.

Um die Betrachtungen nicht unnöthig zu compliciren, denken wir uns das Rohr durch einen unendlichen, von zwei parallelen Flächen begrenzten Raum ersetzt. Durch die momentane Entladung werde das Gas durchweg auf dieselbe

1) Naccari und Bellati, Beibl. 2. p. 720. 1878.

Anfangstemperatur A erhitzt. Der Abstand der Wände sei c, ihre Temperatur constant gleich Null; die Temperatur der einzelnen Punkte zwischen den Platten sei u, die Abstände derselben von der einen Platte seien x und die Zeit t. Dann ist der Wärmefluss, wenn a^2 eine Constante ist, durch die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

bestimmt; wobei $u = f(x) = A$ für $t = 0$

$u = 0$ für $x = 0$ und $x = c$.

Als Lösung finden wir, wenn r eine ganze Zahl ist:

$$u = 4A \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{e^{-a^2\left(\frac{(2r+1)\pi}{c}\right)^2 t}}{(2r+1)\pi} \cdot \sin \frac{2r+1}{c} \pi x.$$

Wir betrachten nur die Temperatur U in der Mitte der Platte; hier ist $x = \frac{c}{2}$. Entwickeln wir die Reihe und begnügen uns mit dem ersten Gliede, so wird daselbst:

$$U = 4A \frac{e^{-\frac{a^2\pi^2}{c^2} t}}{\pi}.$$

Für a^2 ist für einen Druck p bei Luft nach Stefan[1]):

$$a^2 = \frac{0{,}25 \cdot 760}{p} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Wählen wir als Druck einen solchen von $\frac{1}{100}$ Atmosphäre, wie er mittleren Verhältnissen in unseren Entladungsröhren entspricht, so wird $a^2 = 25$, und wenn wir noch sonst die Constanten in U zusammenfassen, so ist angenähert:

$$U = 1{,}3\ A e^{-245 \frac{t}{c^2}}.$$

Nehmen wir zwei Röhren, von denen die eine etwa 1 cm, die andre 1 mm weit ist, so wird für dieselben, wenn A_1 und A_2 die Anfangstemperaturen bedeuten:

$$U' = 1{,}3\ A_1 e^{-245\, t} \text{ und } U'' = 1{,}3\ A_2 e^{-245 \times 100\, t}.$$

Eine numerische Rechnung mit Vernachlässigung des Factors 1,3 zeigt, dass in der Mitte eines Rohres von 1 cm Weite nach $\frac{1}{100}$ Secunde die Temperaturerhöhung auf etwa $\frac{1}{11}$,

1) Stefan, Wien. Ber. **65.** (2) p. 45. 1872 s. auch Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. **156.** p. 194. 1875.

nach $\frac{1}{1000}$ Secunde auf $\frac{1}{1,3}$ gesunken ist; dass dagegen in einem Rohre von 1 mm Durchmesser dieselben Aenderungen der Temperatur bereits nach $\frac{1}{10000}$ und nach $\frac{1}{100000}$ Secunde eingetreten sind. Nehmen wir an, das Gas habe im engen Rohr durch eine Entladung eine Temperatur von 1000° erhalten, ein durchaus realisirbarer Fall, so ergeben sich in demselben, wieder mit Vernachlässigung von 1,3, nach den folgenden Zeiten t die Temperaturen ϑ, die freilich nur ein Maass für die Grössenordnung der wirklich vorhandenen geben:

$$t = 10^{-6} \quad 10^{-5} \quad 10^{-4} \quad 10^{-3}$$
$$\vartheta = 980 \quad 815 \quad 133 \quad 1{,}4 \times 10^{-6}.$$

Erfolgen also 1000 Entladungen in der Secunde, so ist bei jeder folgenden das Gas so gut wie vollständig in seinen Anfangszustand zurückgekehrt, erfolgen dagegen 100 000, so ist dies noch nicht der Fall.

Diese Betrachtung gilt indessen nur von den Verhältnissen im Capillarrohr, wo wirklich neben dem Leuchten eine starke Temperatursteigerung einhergeht; ein Nachleuchten ist bei einzelnen Entladungen bisher auch noch nicht mit Sicherheit constatirt worden. — Auch in den weiteren Röhren zeigen uns die Versuche, dass abweichend von der Theorie kein Nachleuchten eintritt; eine Thatsache, auf die wir später zurückkommen.

Obige Discussion kann natürlich nur ein Maass für die Ordnung der zu berücksichtigenden Grössen geben. Eine genaue Discussion ist bei den nicht sicher bestimmten Constanten noch nicht möglich. Ganz ähnliche Entwickelungen werden übrigens gelten, wenn wir auch die Ausstrahlung des Gases in Betracht ziehen wollten.

Die Versuche von meinem Vater, Röntgen, von mir und anderen haben gezeigt, dass bei mässiger Electricitätszufuhr zur Entladung in einem Gase ein ganz bestimmtes Potential nöthig ist, dass ferner die Electricität in einzelnen Entladungen übergeht, die fast momentan sind und im rotirenden Spiegel nicht verlängert erscheinen. Bei einer galvanischen Batterie wird die bei der Entladung abgeströmte Electricität schnell wieder zugeführt, und es fragt sich, ob wir hier discontinuirliche oder continuirliche Entladungen haben.

Der Strom eines Hittorf'schen Elementes scheidet, wenn es frisch zusammengesetzt ist, im Maximum 90,2 mgr Silber in der Minute ab; es würde dies auch die Maximalstärke seines Stromes überhaupt repräsentiren.[1])

Der Strom meiner Töpler'schen Maschine entsprach bei einem Ausschlag von 100 mm des Galvanometers 0,0006 Siemens-Daniell, und würde demnach etwa $77 \times 0{,}0006$ mgr Silber abscheiden, er ist also $\frac{90{,}2 \times 10000}{77 \times 6}$ mal oder etwa 2000 mal schwächer als der von Hittorf benutzte. Bei diesem Strom erhielt ich aber bei weit voneinander entfernten und durch Capillarröhren verbundenen Electroden und Drucken von etwa 5 mm 2000 Entladungen in der Secunde. Nehmen wir einmal an, dass bei Einfügung der Entladungsröhren die Hittorf'sche Säule dieselbe Electricitätsmenge lieferte, wie oben angegeben, so würden $2000 \times 2000 = 4000\,000$ Entladungen in der Secunde auftreten. Der im rotirenden Spiegel betrachtete Theil des Rohres habe eine Breite von 1 mm, der Spiegel drehe sich 100 mal in der Secunde, dann wird, wenn der Beobachter und die Röhre sich in einer Entfernung von einem halben Meter vom Spiegel befinden, das Bild sich in der Secunde um $1000 \times 100 \times 2 \times 3{,}14$ mm oder um 600 000 mm. zu bewegen scheinen. Demnach würden also hiernach schon auf jedem einzelnen Millimeter des Bildes sechs einzelne Entladungen übereinander fallen. Da aber der Lichteindruck auf der Retina mehr als $\frac{1}{14}$ Secunde verharrt, so sehen wir die 14 Umdrehungen des Spiegels entsprechenden Bilder gleichzeitig, sodass also auf jedem Millimeter die Bilder von 84 einzelnen Entladungen liegen.

Bei den von Hittorf benutzten Röhren standen die Electroden beträchtlich näher zusammen, und die Drucke waren niedriger, sodass unter der obigen Annahme die Zahl der Entladungen noch wesentlich vergrössert wird.

Bei so vielen Entladungen sinkt ausserdem noch zwischen je zweien derselben die Erwärmung und Helligkeit des Gases nicht wieder auf Null, sodass hierdurch die einzelnen Bilder im Spiegel verbreitert erscheinen. Daher ist es hier ganz

1) Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 557. 1880.

unmöglich, Schlüsse über Continuität oder Discontinuität der Entladungen zu ziehen.

Auch das von Hittorf angeführte Kriterium für die Continuität, die Unempfindlichkeit der Entladung einem angenäherten Finger gegenüber, ist nicht stets anwendbar, da mir Versuche mit der Töpler'schen Maschine zeigten, dass auch die discontinuirlichen Entladungen fast vollkommen unempfindlich waren, dass sie aber durch Einschalten bestimmter Funkenstrecken mehr oder weniger empfindlich gemacht werden konnten.

Wahrscheinlich wird in den meisten Fällen die Entladung der Batterie, je nach den Verhältnissen der Batterie selbst, entweder ganz discontinuirlich erfolgen, oder in der Weise, dass stärkere Entladungen die Gesammtentladung einleiten, auf die dann eine allmählich schwächer werdende, continuirliche Entladung erfolgt u. s. f.

Sind aber auch die Entladungen vollkommen continuirlich, so glaube ich nicht, dass dieselben zu spectroskopischen Untersuchungen verwendbar sind, da die Endtemperatur des Gases von den mannichfachsten Umständen abhängt, die nicht genau bestimmt werden können, so z. B. von dem mit der Temperatur sich ändernden Strahlungsvermögen etc.

Theoretische Betrachtungen.

Versuchen wir an der Hand der oben festgestellten Thatsachen, sowie einiger noch zu erwähnender, uns eine Vorstellung von der Fortführung electrischer Entladungen durch die Gase zu bilden, so sehen wir zunächst, dass die von G. Wiedemann und R. Rühlmann aufgestellte Theorie sich denselben gegenüber nicht mehr aufrecht erhalten lässt. Nach ihnen wäre die Entladung bedingt durch von der Electrode fortgeschleuderte, mit Electricität geladene Molecüle, die beim Zusammentreffen mit anderen Molecülen an diese ihre Electricität abgeben u. s. f. Dieselbe Theorie ist von Crookes in etwas abgeänderter Form zur Erklärung der von ihm beschriebenen, aber zum grossen Theile, wie ihm wohl entgangen war, bereits vor längerer Zeit von Hit-

torf und dann von Goldstein u. a. bekannt gemachten Erscheinungen wieder aufgenommen worden. Nach dieser Theorie müssten jedenfalls die einzelnen fortfliegenden Molecüle Geschwindigkeiten besitzen, die der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Electricität in Gasen entsprechen. Aus Wheatstone's[1]) Versuchen über die Entladungen in Gasen folgt aber, dass diese jedenfalls grösser als 200 000 m oder 30 geographische Meilen ist. Eine so grosse translatorische, in der Richtung des Stromes zu messende Geschwindigkeit besitzen die Theilchen aber sicher nicht. Als Hr. v. Zahn die Spectrallinien in einem Geissler'schen Rohre untersuchte, wenn einmal die Axe des Rohres parallel zu der Axe des Collimators seines Spectralapparates und dann senkrecht zu derselben stand, fand er keine Verschiebung der Linien; dabei war die Dispersion so gross, dass noch $\frac{1}{10}$ des Abstandes zwischen den beiden D-Linien beobachtet werden konnte. Eine Verschiebung um diese Grösse hätte aber einer Geschwindigkeit von 1 geogr. Meile in der Richtung der Axe nach dem Doppler'schen Principe entsprochen. Eine Geschwindigkeit von 30 geogr. Meilen hätte eine Verschiebung um beinahe den ganzen Abstand zwischen den beiden D-Linien erzeugt. Eine so grosse Steigerung der normalen Geschwindigkeit der Molecüle wäre auch schon an und für sich unwahrscheinlich.[2])

Nach meiner Ansicht können wir uns vielleicht den Vorgang bei der Entladung in folgender Weise vorstellen. Die von der Maschine gelieferte Electricität, welche wir uns etwa als freien Aether denken, wird auf der Oberfläche der Electroden zum Theil als freie Electricität angehäuft und dort durch die Wechselwirkung zwischen ihr und den Metalltheilen an dem Austritte in die Umgebung gehindert; ein solcher kann

1) Wheatstone, Pogg. Ann. **34.** p. 464. 1835.

2) Dieselben Betrachtungen, welche ich bereits Wied. Ann. **9.** p. 160 zum Nachweis, dass in der Richtung des Stromes keine Fortführung von Theilchen stattfindet, entwickelt habe, hat auch Hr. Goldstein in einer mir während der Correctur zugekommenen Abhandlung bei der Besprechung der Vorgänge an der negativen Electrode wiederholt angestellt (Berl. Monatsber. 1880. 22. Jan.)

erst eintreten, wenn ihre Dichte eine hinlänglich grosse Höhe erreicht hat; zugleich erzeugt aber die Electricität in dem umgebenden Medium eine dielectrische Polarisation und zwar in der Weise, dass die Aetherhüllen der einzelnen Gasmolecüle deformirt werden und während der Rotation der Molecüle um ihre Axen stets eine bestimmte Orientirung beibehalten. Tritt eine Entladung ein, so pflanzt sich zunächst die dadurch hervorgerufene plötzliche Aenderung der dielectrischen Polarisation von der Electrode aus durch die Aetherhüllen der Gasmolecüle fort und setzt sie dadurch in Schwingungen. Daneben kann freilich auch ein Uebergang freier Electricität von der Electrode aus von Molecül zu Molecül stattfinden.

Wie der Lichtstrahl bei phosphorescirenden und fluorescirenden Körpern in den Aetherhüllen der Molecüle oscillatorische Bewegungen bedingt, deren lebendige Kraft beträchtlich grösser ist als der Temperatur entspricht, so ist es auch hier der Fall. Wie dort die das Leuchten bedingende Aetherbewegung sich allmählich auf die Massen der Molecüle selbst überträgt und Wärmebewegungen veranlasst, so tritt auch bei der electrischen Entladung ganz analog secundär eine Erhöhung der Gesammttemperatur ein.

Haben nämlich infolge dieser Uebertragung zwei Molecüle des Gases eine grössere oscillatorische Bewegung als ihnen nach dem der Temperatur desselben entsprechenden normalen Verhältniss zwischen translatorischer und oscillatorischer (rotatorischer) Bewegung zukommt, so verwandelt sich bei dem Zusammenstoss derselben allmählich ein Theil der innern Bewegung in die translatorische, bis endlich der normale Zustand eingetreten ist.[1])

1) In der früher citirten Arbeit verglich ich das Leuchten des Gases unter dem Einflusse der Entladung mit dem Fluorescenzlicht. Hr. Hittorf hat bei einer Besprechung derselben gemeint, man solle von Phosphorescenzlicht sprechen. Beide Bezeichnungen sind indess nur andere Namen für denselben Vorgang. Fluorescenz und Phosphorescenz sind nur dem Grade nach verschieden. Ein wirklich nur momentan andauerndes Fluorescenzlicht können wir niemals beobachten. Die Zeit des Nachleuchtens ist bedingt von der Schnelligkeit des Ausgleiches der inneren Molecularbewegungen, also durch die gegenseitige Beeinflussung der Molecüle in ihren inneren Bewegungen. Bei den festen Körpern ist dieselbe jedenfalls relativ

Dass wirklich in den electrisch leuchtenden Gasen ein solcher Ueberschuss von innerer Bewegung vorhanden ist, zeigen die niedrigen Temperaturen derselben.

Die Verwandlung der oscillatorischen Bewegung in eine translatorische geht ungemein schnell von statten. Auf p. 243 habe ich gezeigt, dass nach den Gesetzen der Wärmeleitung in einem 1 cm weiten Rohre sich noch nach $\frac{1}{1000}$ Sec. ein merklicher Bruchtheil der anfänglichen Energie in der Mitte des Rohres befinden müsse; nichtsdestoweniger erscheint dasselbe im rotirenden Spiegel ebenso discontinuirlich leuchtend wie engere Röhren; sodass schon hieraus auf eine viel schnellere Uebertragung der durch den Strom erzeugten inneren Bewegungen in Wärme geschlossen werden muss, als die Fortleitung der Wärme im Gase selbst ist.

Die durch die electrischen Entladungen eingeleiteten Schwingungen können so stark werden, dass die Molecüle selbst auseinander fallen und sich in ihre Atome zerlegen, ähnlich wie wir beim Auftreffen chemisch wirksamer Strahlen auf Chlorsilber Zersetzungen, oder beim Auftreffen auf Chlor ein Activwerden desselben wahrnehmen.

Führen die oscillatorischen Bewegungen zu einem Zer-

---

gering; die Molecüle schwingen wesentlich um mittlere Gleichgewichtslagen, und die Elongationen sind so klein, dass die Wirkungen der Nachbarmolecüle auf die verschiedenen Theile desselben Molecüls sehr wenig verschieden sind. Nur so lässt sich einmal das Auftreten scharfer Absorptionsbanden bei festen Körpern erklären und verstehen, wie noch Licht mit sehr grossen Gangunterschieden, das von festen Körpern ausgesandt wird, interferiren kann (vgl. Wied. Ann. 5. p. 500. 1878). Aehnliches gilt von den Flüssigkeiten, auch hier treten zu den translatorischen Bewegungen der Molecüle noch schwingende der ganzen Molecüle; sonst müssten die Gesetze für die Aenderung der Reibung mit der Temperatur für Gase und Flüssigkeiten dieselben sein, während sie doch bei ersteren mit der Temperatur zu, bei letzteren aber abnimmt. Auch bei den Flüssigkeiten wird also die Zeit, die ein Molecül unbeeinflusst schwingt, relativ gross und die Uebertragung der Energie relativ langsam erfolgen. Am leichtesten und schnellsten wird dasselbe bei den Gasen statthaben, wo allein die mittlere Weglänge in Frage kommt, und ist daher hier der Name Fluorescenz noch am ersten anwendbar. Stets wird aber auch bei diesen das Fluorescenzlicht zum wenigsten eine so lange Zeit anhalten, als im Mittel zwischen zwei Zusammenstössen verstreicht.

fallen der Molecüle, so wird die dazu nöthige Energie den Molecülen durch die Electricitätsquelle zugeführt und wird nachher bei der Wiedervereinigung von denselben an die Calorimeter wieder abgegeben. Ob in diesem Falle indess die gesammte producirte Wärmemenge von letzterem Processe herrührt, ist nicht wohl ohne weiteres zu entscheiden. Möglich wäre es, dass ein erster Bruchtheil der durchgehenden Electricität zu einer Vergrösserung der mittleren Temperatur verwandt wird, ebenfalls herrührend von Umsetzung der oscillatorischen Bewegung, dass dadurch erst eine Lockerung der Molecüle stattfindet, und dann die folgenden Bruchtheile der Electricität die Zersetzung vollenden.

Zwischen den Wärmeproductionen, die ein in einem schwach absorbirenden Medium fortschreitender Lichtstrahl erzeugt, und denen, die die electrischen Entladungen hervorrufen, besteht ein eigenthümlicher Parallelismus.

1) Schreitet ein conisch sich erweiternder Lichtstrahl in einem schwach absorbirenden Medium fort, so ist die von ihm entwickelte Wärmemenge in jedem Querschnitte nahezu dieselbe; ebenso ist die von der electrischen Entladung in verschiedenen Querschnitten abgegebene Wärmemenge dieselbe.

2) Vergrössern wir die Intensität des Lichtstrahles, lassen ihn aber dem entsprechend auch nur kürzere Zeit hindurchgehen, so wird wieder in beiden Fällen eine gleiche Menge absorbirt; dasselbe gilt für die Entladungen, wenn wir die Stärke derselben vergrössern, ihre Zahl aber vermindern.

3) Vergrössern wir die Stärke der optischen Absorption, etwa indem wir in einer absorbirenden Lösung die Menge der absorbirenden Theile vermehren, so wird dementsprechend auch die entwickelte Wärmemenge vergrössert, ebenso ist die electrische Wärmeentwickelung bei einem Gase im gleichen Querschnitte mit zunehmendem Druck grösser.

Sehr wahrscheinlich erscheint es daher, dass die Abgabe der Energie in beiden Fällen in derselben Weise erfolgt, dass also die Entladungen in einer Fortführung von Schwingungen bestehen, die einen Theil ihrer Energie an die Gastheilchen abgeben. Wir müssen dann aber die An-

nahme machen, dass die Amplitude, die eine Electricitätsmenge e erzeugt, nicht ihr selbst, sondern der $\sqrt{e}$ proportional ist.

Aber selbst unter dieser Annahme lassen sich die electrischen Entladungserscheinungen nicht so vollkommen wie die optischen Phänomene erklären, da eine grosse Anzahl störender Momente auftritt.

Dahin gehören vor allem die statischen Ladungen der Glaswandung, die für die durchgehenden Entladungen von der grössten Bedeutung sind und schon an und für sich ganz bestimmte Polarisationen der Gastheilchen bedingen, bald die Energieabgabe der durchgehenden Entladung befördern, bald aber auch vermindern. Diese äusseren Ladungen sind von besonderem Einfluss bei weiten Röhren, in denen die durch die Entladung selbst erzeugte Bewegung eine weit weniger lebhafte ist als in den engen Röhren. Hiermit dürfte auch die von Hittorf nachgewiesene interessante Thatsache in Beziehung stehen, dass ein in einer Richtung von Entladungen durchsetztes Gas in einer dazu senkrechten Richtung den Strom weit besser leitet, als wenn das nicht der Fall ist.

Die so sehr grossen Unterschiede im Verhalten der positiven und negativen Electricität lassen sich vielleicht erklären, wenn man annimmt, dass die Fortführung der letzteren allein durch die Fortpflanzung dielectrischer Polarisationen bedingt ist, während die der ersteren zugleich mit einem Uebergang des freien Aethers von Molecül zu Molecül verknüpft ist, wie dies v. Ettingshausen[1]) auch neuerdings aus den Versuchen von Hall[2]) geschlossen hat. So würde sich wenigstens der Unterschied der Potentiale ohne weiteres ergeben, die zur Einleitung der Entladung an der positiven und negativen Electrode erforderlich sind. An der negativen Electrode ist allein die Auslösung der dielectrischen Polarisation nöthig, während an der positiven noch die Anziehung der materiellen Molecüle zu dem Aether überwunden werden muss.

1) v. Ettingshausen, Wien. Ber. **81.** 4. März 1880.
2) Hall, Beibl. **4.** p. 404. 1880.

Die Fortpflanzung der von der negativen Electrode ausgehenden Entladung gehorcht nahezu den Gesetzen des Lichtes. Von jedem Punkte der Electrode aus scheint ein ganz schwach divergirendes Kathodenstrahlenbündel auszugehen, das sich in seinem weiteren Verlaufe fast ganz wie ein Lichtstrahl verhält, Schatten wirft, Phosphorescenzlicht erzeugt u. s. f. Nur dürfen wir die Electrode selbst nicht etwa als Lichtquelle auffassen, sondern als eine einer Wellenoberfläche parallele Fläche. Denn in der Lichtquelle sind die Verschiebungen der Aetherhüllen der einzelnen Molecüle noch vollkommen regellos und finden nach allen Richtungen gleichmässig statt, erst in einer bestimmten Entfernung bildet sich die Welle selbst aus, deren sämmtliche Theile isochron schwingen, während an der Electrode die dielectrische Polarisation durch die Gestalt derselben eine ganz bestimmte Orientirung besitzt und an allen Stellen gleichzeitig ausgelöst wird. Die oberflächlichen Theilchen der Electrode selbst stellen noch nicht eine Welle dar, denn in ihnen finden nicht die Verschiebungen in der Weise statt, wie z. B. da, wo die von der negativen Electrode ausgehenden Kathodenstrahlen, entsprechend dem Auftreffen von Lichtwellen, auf der Glaswand Phosphorescenzlicht erzeugen. Bringt man nämlich auf eine Stelle der Aussenwand einer evacuirten Glasröhre eine metallische Belegung und verbindet dieselbe mit dem Inductorium, so wird an der betreffenden Stelle die innere Wand des Rohres abwechselnd zur negativen und positiven Electrode. Trotzdem habe ich an ihr kein grünes Leuchten beobachten können. (Solche äussere Belegungen hat zum Studium der Hittorf'schen Phänomene neuerdings auch Leonh. Weber[1]) benutzt).

Die Ablenkung der positiven Entladung durch äussere Ableitung des Rohres an eine Stelle würde eine Folge des durch die veränderte Vertheilung der freien Electricität auf den Gefässwandungen veränderten Potentials auf die freie strömende Electricität sein. Die Wand, gegen eine positive Entladung sich wendend, übernimmt dann naturgemäss die

1) L. Weber, Carl. Rep. **16**. p. 240. 1880.

Rolle einer negativen Electrode. In welcher Weise die von beiden Electroden ausgehenden Entladungen sich ausgleichen, ist eine noch offene Frage.

Bereits früher habe ich nachgewiesen[1]) und auch oben erwähnt, dass die von den Kathodenstrahlen hervorgerufenen Erscheinungen nicht durch fortgeschleuderte Theilchen bedingt sein können. Würden wir einmal annehmen, dass die Dicke einer solchen fortgeschleuderten Schicht einen ganzen Centimeter betrüge, sie also eine relativ sehr bedeutende Masse besässe, so würde sie, um die beobachteten Erwärmungen des Rohres um die negative Electrode hervorrufen zu können, doch Geschwindigkeiten von 100 000 m und mehr besitzen. Wenn Gintl[2]) und Puluj[3]) die Phänomene auf Fortschleuderung von Substanzen der Electroden zurückführen wollen, so müsste, da man z. B. bei Aluminiumelectroden keine Abnahme desselben beobachtet, diese Geschwindigkeit danach eine ganz colossale sein. Diese Ansicht ist also nach dem Obigen kaum haltbar.

Auch die sämmtlichen übrigen beobachteten Phänomene dürften sich aus der Fortpflanzung von Aetherwellen mit sehr grosser Energie erklären; so z. B. die gegenseitige Beeinflussung zweier Strahlen aus den an der Vorderfläche fortschreitender Wellen auftretenden Drucken[4]), die in unserem Falle sehr beträchtlich werden können u. s. f.

Wenden wir uns endlich zu den Resultaten, die sich aus der obigen Untersuchung für die Spectralanalyse ziehen lassen.

In einer frühern Untersuchung[5]) habe ich auszuführen gesucht, im Anschluss an die Untersuchungen von Lockyer, Lecoq de Boisbaudran u. a., dass das Bandenspectrum den ungetrennten, das Linienspectrum den getrennten Atomen im Molecül zukommt. — Diejenige Wärmemenge, welche nöthig ist, um das Banden- in das Linienspectrum überzuführen, gibt daher einen Maximalwerth für die Zersetzungs-

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **9.** p. 157. 1880.
2) Separat erschienen.
3) Puluj, Wiener Anzeiger p. 76. 1880.
4) Maxwell, Electricity and Magnetism II. p. 391.
5) E. Wiedemann, Wied. Ann. **5.** p. 512. 1878.

wärme der Wasserstoffsmolecüle, von der neben der Arbeit, die auf die Dissociation verwandt wird, noch ein Theil verbraucht wird, um das Gas zu erhitzen.

Wir finden, dass *einem Gramm Wasserstoff von gewöhnlicher Temperatur zur Zerlegung in seine Atome etwa 128 000 Gramm-Calorien zugeführt werden müssen.* Diese Zahl ist nur als eine ziemlich rohe Annäherung zu betrachten, da die zahlreichen Fehlerquellen dieselbe störend beeinflussen; weiteren Untersuchungen muss es vorbehalten sein, diese Grösse sicherer zu fixiren. Sie entspricht übrigens Werthen, wie wir sie bei thermochemischen Umsetzungen häufig finden.

Eine Ermittelung der zur Zersetzung der Molecüle der Elemente nöthigen Wärmemenge muss aber für die Thermochemie wesentlich sein. Haben wir z. B. eine Reaction

$$H.H + Cl.Cl = 2HCl,$$

so sind die thermischen Effecte dreierlei, einmal wird Wärme verbraucht, um ein Atom Wasserstoff von einem andern zu trennen, ebenso wird Wärme verbraucht, um ein Atom Chlor von einem andern zu trennen, und endlich wird die doppelte Wärme producirt, die der Erzeugung eines Molecüls Chlorwasserstoff entspricht.

Bisher mass man nur das Gesammtresultat. Auf spectroskopischem Wege wird es möglich, die beiden ersten Theile für sich und so die wahren Verbindungswärmen zu bestimmen. —

Nehmen wir an, was auch durch die vorhergehenden Untersuchungen im wesentlichen bestätigt worden ist, dass die Spectra von der auf jedes Molecül kommenden Electricitätsmenge und der von ihr an dasselbe abgegebenen Energie bedingt sind, so lässt sich die bekannte Abhängigkeit der Spectra vom Druck in folgender Weise ableiten.

Ist in einem Entladungsrohr der Druck gross, so ist es auch die Menge der Gasmolecüle. Da zugleich die Zahl der Entladungen bei gleicher Electricitätszufuhr relativ klein ist, so ist die durch jede einzelne Entladung abgegebene Energie relativ sehr gross. Zugleich kann sich dieselbe unter Bildung eines schmalen Funkens auf wenige Molecüle beschränken. An jedes Molecül wird eine sehr grosse

Energiemenge übertragen; dasselbe zerfällt in seine Atome, wir haben ein Linienspectrum.

Sinkt der Druck, so mehrt sich die Zahl der Entladungen, die abgegebene Energie nimmt ab und weiter werden die sämmtlichen Theile des Gases in Bewegung gesetzt; also ist auch die bewegte Zahl eine grössere, pro Molecül wird eine geringere Energiemenge abgegeben, sie genügt nicht mehr zur Zerfällung des Molecüls in Atome, das Spectrum wird zum Bandenspectrum.

Schalten wir Funkenstrecken ein, so vergrössern wir dadurch die bei jeder einzelnen Entladung durchgehende Electricitätsmenge und dem entsprechend die abgegebene Energie, es muss daher hierbei das Bandenspectrum in das Linienspectrum übergeführt werden. — Bei ganz niedrigen Drucken treten Complicationen ein, die sich erst bei einer vollständigen Entwickelung der Theorie der Entladungen behandeln lassen.

Wenn sich bei den Versuchen (p. 231) allmählich neben dem Bandenspectrum zunächst schwach, dann immer stärker das Linienspectrum entwickelt, so stimmt dies vollkommen mit den Schlussfolgerungen, wie sie sich aus der kinetischen Gastheorie ergeben. Von den gesammten im Gase vorhandenen Molecülen befinden sich stets in einzelnen die Atome in solchen Schwingungsbewegungen, dass ein ganz geringer Impuls genügt, um sie zu trennen. Solche Impulse werden von der Entladung den Atomen in reichlichem Maasse gegeben; daher zeigen sich schon in relativ sehr weiten Röhren bei einer sehr geringen Electricitätszufuhr pro Molecül die Wasserstofflinien. Ebenso sind umgekehrt einige Molecüle vorhanden, bei denen zur Trennung der Atome relativ sehr starke Impulse nöthig sind, das Bandenspectrum verschwindet auch nur ganz allmählich vollkommen.

In ganz derselben Weise erklärt sich auch, warum wir bei Inductorienentladungen nebeneinander Linien- und Bandenspectra sehen, wozu noch hierbei kommt, dass die Inductorienentladung stets aus verschieden starken Partialentladungen besteht.

Auf pag. 221 war nachgewiesen, dass bei der Anwendung

verschieden gestalteter Electroden die Wärmeabgabe in einem Capillarrohre dieselbe ist, und auch die Zahl der Entladungen sich nicht sehr ändert. Diese Thatsache zeigt, dass in einem Capillarrohr, sobald wir es mit discontinuirlichen Entladungen zu thun haben, nie Spectra auftreten können, die Electricitätsmengen entsprechen, welche unter einer gewissen minimalen Grenze gelegen sind.

Die Spectra, die von den geringsten bei jeder einzelnen Entladung übergehenden Electricitätsmengen und den kleinsten abgegebenen Energiemengen herrühren, erhalten wir, wenn wir zwei Electroden einander nahe gegenüberstellen und bis zu einem solchen Druck auspumpen, dass die Funkenentladung aufhört, und die Gasentladung allein eintritt. Dann leuchtet ein cylindrischer Theil des Gases, der mehrere Millimeter im Durchmesser besitzt, und der von einer grossen Zahl von Entladungen durchsetzt wird. Die Energieabgabe kann dabei soweit sinken, dass kaum noch Licht wahrzunehmen ist.

Das einzige Mittel, das wir besitzen, um Spectra bei einer geringen Energie innerer Bewegung in der nöthigen Helligkeit zu erhalten, besteht in der Anwendung weiter Röhren. Von dem Einfluss der Dicke kann man sich dadurch frei machen, dass man Röhren mit axialer Durchsicht verwendet; doch konnte ich keine Unterschiede finden, als ich Stickstoff in dieser Weise oder quer durch die Röhre beobachtete. Ebensolche negative Resultate fand Hittorf mit Natriumdampf.

Um ein Urtheil über die Wirkung des Inductoriums gegenüber der Influenzmaschine in Bezug auf die Erzeugung der Spectra zu gewinnen, erregte ich ein Stöhrer'sches Inductorium mittlerer Grösse durch den Strom von vier Bunsen'schen Elementen und benutzte als Stromunterbrecher eine 100 ganze Schwingungen ausführende, sich selbst electromagnetisch erregende Stimmgabel; dabei war der eine Pol des Inductoriums direct mit der Erde verbunden, der andere dagegen unter Einschaltung einer Entladungsröhre durch das Galvanometer abgeleitet.

Der Ausschlag desselben betrug 145 mm bei einem

Druck von etwa 10 mm in der Entladungsröhre, sodass also einer Entladung ein Ausschlag von etwa 1,5 mm entspräche. Die bei jeder Entladung gelieferte Electricitätsmenge würde also genügen, um in einem etwa 1 bis 2 mm weiten Rohr das Banden- in das Linienspectrum zu verwandeln (s. p. 234). Nehmen wir aber selbst eine sehr viel stärkere Erregung des Inductoriums, ersetzen die metallischen Contacte durch Quecksilberunterbrechungen, so wird es uns doch nicht leicht gelingen, in einem Rohr von 10 mal grösserem Durchmesser, also 100 mal grösserem Querschnitt, auf die Querschnittseinheit eine so grosse Electricität zu bringen, dass dieselbe Umwandelung stattfindet. Erst bei Anwendung von Leydener Flaschen kann dies geschehen, indess compliciren sich dann die Verhältnisse dermassen, dass sie sich der Discussion bisher entziehen.

Aus einer Reihe von sorgfältigen Versuchen hat Hr. Wüllner[1]) Einwände gegen die oben entwickelte Anschauung über die Ursachen der Spectra erhoben, und zwar haben ihm die Spectra des Stickstoffes als Ausgangspunkt gedient. Da damals noch nicht die gesonderten Messungen des Einflusses der Dicke der Schicht, der Intensität der Entladungen, des Druckes und der abgegebenen Energiemengen vorlagen, so lassen sich seine Versuche nicht wohl bis ins Einzelne durchdiscutiren. Das Auftreten der einzelnen Stickstofflinien neben den Banden dürfte sich aus den oben entwickelten Ursachen erklären. Ein von mir früher gegen Hrn. Wüllner's Theorie gemachter Einwand ist durch neuere Versuche von Dewar und Scott[2]) hinfällig geworden. Dass aber beim Wasserstoff nicht wohl eine Umwandlung des Linien- in das Bandenspectrum durch Aenderung der Dicke der emittirenden Schicht bedingt sein kann, dürfte die Bemerkung von Lockyer zeigen, dass die Bruchtheile einer 1 mm dicken Schicht glühenden Wasserstoffs im Geissler'schen Rohr und die tausende von Kilometern dicke Schicht der Photosphäre dieselben hellen Linien zeigt. Auch müssten die Gase für die den Banden entsprechenden leuchtenden Strahlen ein un-

1) Wüllner, Wied. Ann. 8. p. 590. 1879.
2) Dewar u. Scott s. Beibl. 4. p. 309. 1880.

geheures Absorptionsvermögen besitzen, während gerade das Gegentheil aus den Versuchen von Gouy[1]) folgt. Auch zieht Hr. Wüllner selbst stets die Temperaturveränderung mit in den Kreis der Betrachtungen.

Meine nächste Aufgabe wird es sein, die in dieser Abhandlung angebahnten Gebiete näher zu erforschen, namentlich die Beziehungen zwischen den Intensitäten der einzelnen Linien der Spectra, den Electricitätsmengen und den abgegebenen Energiemengen zu untersuchen. Dabei wird es vor allem nöthig sein, den oben aufgestellten und wohl folgendermassen zu verallgemeinernden Satz noch weiter zu prüfen:

„Damit in dem durch electrische Entladungen erzeugten Spectrum eines Gases bestimmte Veränderungen der Qualität und Quantität nach auftreten, müssen von denselben an jedes Molecül gleiche Energiemengen abgegeben werden, die innerhalb ziemlich weiter Grenzen von dem Druck des Gases und der Weite der Röhre unabhängig sind."

Leipzig, März 1880.

III. *Ueber die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in den Gasen; von A. Kundt und W. C. Röntgen.*

2. Abhandlung.

Nachdem das physikalische Institut der Strassburger Universität in den Besitz einer Gramme'schen Maschine (von Heilmann, Ducommun und Steinlen in Mühlhausen) und eines Gasmotors zum Betrieb derselben gekommen war, entschlossen wir uns, unsere Versuche über die Drehung der Polarisationsebene in den Gasen von neuem aufzunehmen. Eine Vervollständigung derselben schien wünschenswerth, weil von jedem der von uns früher untersuchten Gase aus den in der ersten Abhandlung dargelegten Gründen nur eine kleine Anzahl Bestimmungen gemacht werden konnte,

1) Gouy s. Beibl. 2. p. 349, 411. 1878. 3. p. 611. 1879. 4. p. 476. 1880.

und weil die Fehlergrenzen derselben ziemlich weite sind; es liess sich hoffen, dass mit der Gramme'schen Maschine in nicht zu langer Zeit eine grössere Anzahl von Beobachtungen ausgeführt werden könnten.[1])

Versuche, die wir im October v. J. anstellten, zeigten, dass der Strom der genannten Maschine bei Benutzung unseres, in der ersten Abhandlung beschriebenen, Apparates eine Drehung der Polarisationsebene erzeugte, welche der von 32 grossen Bunsen'schen Elementen hervorgebrachten ungefähr gleich war; der Strom war somit völlig ausreichend und erwies sich überdies als hinreichend constant.[2])

An dem in diesen Ann. Bd. 8 ausführlich beschriebenen Apparat wurden einige nicht unwesentliche Aenderungen und Verbesserungen vorgenommen, die zunächst erwähnt werden sollen.

---

1) Obgleich der Eine von uns nicht mehr dauernd in Strassburg weilt und dadurch ein grosser Theil der im Folgenden mitgetheilten Bestimmungen von dem Ersten von uns allein ausgeführt werden musste, schien eine gemeinschaftliche Publication angezeigt, weil seinerzeit der Plan der Untersuchung gemeinschaftlich entworfen wurde, und die Apparate von beiden zusammen construirt worden sind.

2) Von dem Vorhandensein schwächerer kurzer Schwankungen in der Stromstärke, bedingt durch Unregelmässigkeiten im Contact der Schleiffedern in der Gramme'schen Maschine, oder Ungleichheiten in der Rotation derselben, haben wir uns folgendermassen überzeugt. In das Innere unserer sechs grossen Drahtrollen wurde ein Rohr mit Schwefelkohlenstoff gelegt, polarisirtes Licht hindurch geschickt, welches, nach Analyse durch ein Nicol, noch durch einen Spectralapparat ging (Methode von Broch zur Bestimmung der Drehungen). Es wurde so eingerichtet, dass bei Stromschluss etwa in der Mitte des Spectrums ein schwarzer Streifen auftrat. — Aendert sich nun die Stromstärke und mithin die Drehung im CS_2, so muss der dunkle Streifen im Spectrum sich verschieben.

In der That wurde beobachtet, dass der Streifen unregelmässige, schnell aufeinander folgende Verrückungen nach der rothen und blauen Seite des Spectrums zeigte. Die angewandte Methode scheint zur Untersuchung von schnellen Intensitätsänderungen sehr starker Ströme sehr geeignet, da die Bewegungen des schwarzen Streifens im Spectrum den Stromschwankungen momentan folgen, während jeder strommessenden Magnetnadel Trägheit zukommt. —

1) In unserer ersten Mittheilung haben wir angegeben (l. c. p. 291), dass die Bestimmungen der Dichte der Gase möglicherweise mit einem nicht unerheblichen Fehler deshalb behaftet seien, weil das Glycerin im Eisenrohr unter den hohen Drucken Gas absorbire, welches beim Auslassen des Gases zum Zweck der Dichtebestimmung wieder frei gegeben werde. Wir haben diesen Fehler dadurch beseitigt, dass wir in das Rohr *N* (l. c. Tafel III Fig. 6) zwischen den Apparat und das Eisenrohr einen Hahn einsetzten, welcher nach der Compression des Gases geschlossen wurde. Dieser Hahn war mit Rücksicht auf die hohen Drucke besonders construirt; dass er hinreichend dichtet, beweist, dass sich einmal Wasserstoff während sechs Tagen bei dem unveränderten Druck von circa 200 Atmosphären in dem Apparat hielt.

Das Volumen des Apparates bis zum Hahn wurde durch eine Anzahl von Versuchen in der Weise sehr sorgfältig ermittelt, dass ersterer bis zu einem durch ein angesetztes Quecksilbermanometer genau gemessenen Druck mit Luft gefüllt wurde, dann wurde diese Luft bis auf Atmosphärendruck ausgelassen, aufgefangen und sorgfältig gemessen. Das Volumen ergab sich auf diese Weise in verschiedenen Versuchen, von denen ein Theil im October 1879, der andere im November 1879 und die letzten im März 1880 angestellt wurden, zu

30,79	31,14	30,67	30,78
30,68	30,93	31,07	30,79
31,10	30,97	30,94	30,82
30,70			

Mittel 30,87 ccm.

Die Aenderung des Volumens durch den Druck des eingeschlossenen Gases ist, selbst wenn letzterer einige hundert Atmosphären beträgt, zu vernachlässigen.

Die Dichtebestimmungen waren nun sehr einfach: das Gas wurde in der in unserer ersten Abhandlung beschriebenen Weise in das auf der Decimalwage befindliche Gasometer eingelassen und gemessen; dieses Volumen, vermehrt um 30,87 wegen des im Apparat zurückbleibenden Gases,

wurde auf 0° und 760 mm Druck reducirt und gab nach Division durch 30,87 die gesuchte Dichte.

2) Damit das in den Apparat eingepumpte Gas möglichst schnell die Temperatur der Umgebung annehme, und um zu vermeiden, dass dasselbe durch die vom Strom erwärmten Drahtrollen selbst sehr erwärmt werde, wurden die inneren, kleineren sechs Drahtrollen entfernt und das Versuchsrohr frei in die Mitte der sechs grossen äusseren gelegt. Die nunmehr zwischen dem Versuchsrohr und den Rollen frei circulirende Luft verhinderte eine erhebliche Erwärmung des eingeschlossenen Gases.

3) Obgleich wir uns neuerdings noch einmal durch Versuche überzeugt hatten, dass das Eisenrohr, welches das Kupferrohr umgab, um dasselbe gegen Durchbiegungen zu schützen, den Betrag der Drehung in den Gasen nicht messbar beeinflusste, haben wir dies Eisenrohr, um in der Folge allen diesbezüglichen Einwendungen zu begegnen, durch ein aufgeschlitztes Messingrohr ersetzt.

4) Haben wir die Drehung in den Gasen direct mit der Drehung in einer gleichlangen Flüssigkeitssäule bei gleicher Stromstärke verglichen, sodass eine gesonderte Bestimmung der Stromstärke überflüssig wurde. Zu diesem Zweck wurde ein Messingrohr, von der Länge des die Gase enthaltenden Kupferrohrs, welches an beiden Enden durch Glasplatten verschlossen war, mit destillirtem Wasser gefüllt und neben das Kupferrohr gelegt. Die Glasplatten waren so weit von den Enden der Rollen entfernt, dass, wie sorgfältige Versuche lehrten, durch dieselben keine merkliche Drehung eintrat. Wir haben uns auch noch durch specielle Versuche überzeugt, dass, — was freilich die Theorie im voraus erwarten liess — innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen Drehungen in der Flüssigkeit gefunden wurden, mochte das Rohr genau in der Axe der Rollen liegen oder nahe an der Wand derselben.

Als Vergleichsflüssigkeit haben wir bei unseren jetzigen Versuchen nicht mehr wie früher Schwefelkohlenstoff, sondern, wie erwähnt, Wasser angewendet, weil bei Benutzung

der erstern Flüssigkeit selbst durch eine geringe Erwärmung von Seiten der Drahtrollen in dem langen Rohr bald soviel Schlieren erzeugt wurden, dass die Schwefelkohlenstoffsäule nicht mehr durchsichtig blieb, und dadurch eine genaue Bestimmung der Drehung unausführbar wurde.

Für die Bestimmung der Drehung im Wasser wurde Natronlicht benutzt, für die in den Gasen, wie früher, Kalklicht. Die Methode der Beobachtung war dieselbe wie früher.

Jeder einzelne, unten mitgetheilte Versuch besteht aus sechs Bestimmungen der Drehung im Gas und einer Bestimmung der Drehung im Wasser, die in der Reihenfolge ausgeführt wurden, dass zuerst dreimal die Drehung im Gas, dann einmal die Drehung im Wasser und darauf wieder dreimal die Drehung im Gas bestimmt wurde. Jede einzelne Bestimmung ist die Differenz der Mittel aus 10 Einstellungen bei Lauf des Stromes in einem Sinn und 10 anderen bei umgekehrter Stromrichtung.

Wir beabsichtigten nun hauptsächlich die Drehung in den Gasen Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und atmosphärische Luft möglichst genau zu bestimmen; es sind daher im Laufe dieses Winters für jedes dieser Gase 10 Versuche ausgeführt, deren Resultate in der folgenden Tabelle enthalten sind. Die Gase H und O wurden in der in unserer ersten Abhandlung angegebenen Weise entwickelt; der Stickstoff wurde nach der Vorschrift von Gibbs (Ber. d. Berl. chem. Ges. Bd. **10.** 1877) aus reinem salpetrigsaurem Kali dargestellt. Auch der Stickstoff zeigt, wie die bereits früher untersuchten Gase, Wasserstoff, Sauerstoff und Luft eine Drehung im Sinn des positiven Stromes. Die Temperatur der Gase im Kupferrohr war bei den Versuchen durchschnittlich 20° Celsius.

Wasserstoff.

Versuchs-Nr.	Dichte	Drehung im Gas in Graden pro Atm.	Drehung im Wasser in Graden	Verhältniss
1	157	0,00834	19,27	0,000 433
2	157	751	17,98	418
3	157	779	17,04	457
4	242	770	18,33	420
5	242	760	17,82	426
6	150	781	18,58	421
7	150	693	17,81	389
8	228	846	18,51	457
9	228	471	11,27	418
10	228	826	18,31	451
			Mittel	0,000 429

Sauerstoff.

1	223	0,00551	16,33	0,000 338
2	195	633	19,06	332
3	195	505	15,94	317
4	239	726	18,62	390
5	239	403	11,54	349
6	260	645	17,66	365
7	260	592	16,77	353
8	267	674	17,58	383
9	267	600	16,96	353
10	258	626	17,32	362
			Mittel	0,000 354

Stickstoff.

1	215	0,00840	18,87	0,000 445
2	215	801	17,70	453
3	224	754	18,95	398
4	224	732	18,13	404
5	231	693	17,33	399
6	231	634	16,02	396
7	205	744	17,35	429
8	205	665	16,52	402
9	209	751	16,72	449
10	181	670	18,28	368
			Mittel	0,000 415

Atmosphärische Luft.

1	208	0,00790	17,50	0,000 451
2	208	737	17,16	430
3	231	748	17,60	425
4	231	699	16,47	424
5	250	663	14,34	462
6	155	608	16,44	370
7	258	732	17,91	408
8	258	722	17,39	415
9	213	678	17,04	395
10	213	584	16,70	350
			Mittel	0,000 413

Aus der vorstehenden Tabelle ergibt sich, dass Wasserstoff, Stickstoff und atmosphärische Luft nahezu dieselbe Drehung zeigen; Sauerstoff dreht etwas weniger als jene Gase, die Differenz der Drehung in Sauerstoff und Stickstoff ist indess nicht so beträchtlich, dass dadurch eine merkliche Verschiedenheit in den Drehungen der Luft und des Stickstoffs bedingt werde.

Eine einfache Beziehung der electromagnetischen Drehung zum Brechungsexponenten der Gase lässt sich nicht erkennen. Bekanntlich hat H. Becquerel[1]) eine Relation aufgestellt, nach welcher für die meisten Körper der Quotient $\frac{d}{n^2(n^2-1)}$ constant sein soll, wo d die Drehung und n den Brechungsexponenten bedeutet. Dieselbe erweist sich jedoch in dem vorliegenden Fall als völlig unzulässig. Bildet man z. B. für die Gase N und H die Ausdrücke $n^2(n^2-1)$, so erhält man:

für Stickstoff 0,000 60
„ Wasserstoff 0,000 28.

Da nun d für beide Gase bis auf wenige Procente gleich ist, so ist der Ausdruck $\frac{d}{n^2(n^2-1)}$ für Wasserstoff über doppelt so gross als für Stickstoff. Dass der Brechungsexponent einer Substanz für die Grösse der in derselben zu beobachtenden Drehung ein massgebender Factor sei, ist sehr wahrscheinlich, eine ebenso wichtige Grösse ist aber auch ihre diamagnetische Inductionsconstante. Es ist sehr auffällig, dass der stark diamagnetische Wasserstoff trotz seines kleinen Brechungsvermögens die Polarisationsebene so stark dreht.

Ausser diesen Versuchen mit den vier genannten Gasen wurden noch fünf Versuche mit Kohlenoxyd ausgeführt.

---

1) Becquerel, Ann. de chim. et de phys. (5) **12.** 1877.

Kohlenoxyd.

Versuchs-Nr.	Dichte	Drehung im Gas in Graden pro Atm.	Drehung im Wasser in Graden	Verhältniss
1	171	0,01376	16,95	0,000 811
2	132	1239	17,89	692
3	132	1228	16,73	734
4	207	1299	17,38	747
5	207	1265	16,17	782
			Mittel	0,000 753

Um das Drehungsvermögen der Gase, statt auf Wasser, auf Schwefelkohlenstoff, wie wir es früher gethan, zu beziehen, ist es nöthig, das Verhältniss der Drehungen von Wasser und Schwefelkohlenstoff zu kennen. Die älteren Angaben hierüber differiren ziemlich erheblich (cf. die Angaben von Bertin, E. Becquerel, de la Rive und Verdet in Wiedemann's Lehre vom Galvanismus), zum Theil wohl deshalb, weil die Drehung der Flüssigkeiten mit der Temperatur variirt.

Nach Bichat[1]) nimmt das magnetische Drehungsvermögen des Wassers von 10° bei 60° C. im Verhältniss von 1,043 zu 1 ab, während das des Schwefelkohlenstoffs bei der Temperatur t:

$$d_t = 1 - 0{,}001\,04\,t - 0{,}000\,014\,t_2$$

ist, wenn dasjenige bei 0° gleich 1 gesetzt wird.

H. Becquerel[2]) findet das Verhältniss der Drehungen in Schwefelkohlenstoff und Wasser für Natronlicht bei 17° C. = 3,25. Zur Controle haben wir selbst noch durch eine Zahl von Versuchen dieses Verhältniss bestimmt und fanden für die Temperatur von 20° C. 3,28.

Diese Angaben genügen, um das Verhältniss für jede Temperatur zu berechnen. Die Temperatur des Wassers in unserem Vergleichsrohr war durchschnittlich 20° C.; nimmt man das Mittel aus den Becquerel-Bichat'schen und unseren Angaben für diese Temperatur, so hat man, um unsere Werthe für die Drehung der Gase auf Schwefelkohlenstoff

1) Bichat, Ann. de l'école normale. 2. Série. **3.** p. 307 und Journ. de phys. **8.** p. 204. 1879.

2) Becquerel, Compt. rend. **80.** p. 1376. 1875.

von der Temperatur 20° C. zu reduciren, dieselben durch 3,25 zu dividiren. Man erhält in dieser Weise:

für Wasserstoff	0,000 132
„ Sauerstoff	0,000 109
„ Stickstoff	0,000 127
„ atmosphärische Luft	0,000 127
„ Kohlenoxyd . . .	0,000 232

Der Werth für atmosphärische Luft stimmt mit dem von H. Becquerel gefundenen gut überein. Eine Vergleichung der obigen Werthe mit unseren früheren ergibt für Wasserstoff und Kohlenoxyd eine gute Uebereinstimmung, dagegen für Sauerstoff und atmosphärische Luft nicht. Die Ursache dieser Abweichungen ist ohne Zweifel einmal in der geringen Zahl der früheren Bestimmungen und zweitens darin zu suchen, dass, wie eingangs erwähnt, bei unseren letzten Versuchen einige Fehlerquellen, die früher vorhanden waren, beseitigt worden sind. Wir unterlassen es deshalb, die früheren und jetzigen Versuche zu Mittelwerthen zu verbinden.

Mit CH_4 haben wir keine grössere Zahl von Versuchen angestellt, da wir die nöthigen Quantitäten CH_4 nicht sicher rein darstellen konnten. Zwei Versuche gaben in Uebereinstimmung mit den früheren ein beträchtliches Drehvermögen; nämlich bezogen auf CS_2, 0,00043 und 0,00045.

Strassburg und Giessen, den 20. März 1880.

IV. *Zur Theorie der inconstanten galvanischen Elemente; von Fr. Exner.*

(Aus dem 80. Bde. d. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. II. Abth. Dec.-Heft. Jahrg. 1879; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Wenn wir galvanische Elemente mit zwei Flüssigkeiten (Daniell, Grove, Bunsen) als constante, solche mit nur einer Flüssigkeit (Smee, Volta) als inconstante Elemente bezeichnen, so beziehen sich die Ausdrücke constant oder inconstant natürlich nur auf die electromotorische Kraft, nicht aber auf den Widerstand; bleibt ein Daniell'sches Element längere Zeit geschlossen, so ändert sich dadurch sein anfänglicher Werth

nicht wesentlich, schliesst man dagegen ein Smee'sches Element auch nur auf sehr kurze Zeit, so sinkt seine ursprüngliche electromotorische Kraft dadurch schon bedeutend. Dieser Unterschied zwischen einem Daniell und einem Smee wird gegenwärtig allgemein dem Umstande zugeschrieben, dass nur in letzterem sich eine galvanische Polarisation einstellt, die sich von der ursprünglichen Kraft des Elementes subtrahirt. Während im Daniell der bei der Oxydation des Zinkes frei werdende Wasserstoff an der negativen Electrode zur Reduction von Kupfer verbraucht wird, also gar nicht in Gasform an derselben erscheint, scheidet sich im Smee (Zn, H_2SO_4 aq, Pt) derselbe frei ab und bedeckt das Platin mit einer Wasserstoffschicht. Da nun, wie man bisher allgemein angenommen hat, ein Metall, z. B. Platin, durch Berührung mit Wasserstoff electromotorisch erregt wird, so ist hierin der Grund zu einer Polarisation gegeben, deren electromotorische Kraft sich natürlich von der anfänglichen des Elementes subtrahirt und so das rasche Absinken der letzteren nach Schluss des Elementes bedingt.

Diese Erklärungsweise des Phänomens scheint mir aus mehrfachen Gründen unhaltbar; zunächst deshalb, weil, wie im Nachfolgenden gezeigt werden soll, eine solche Polarisation in galvanischen Elementen überhaupt nicht existirt.

In einer frühern Untersuchung über die Natur der galvanischen Polarisation[1]) habe ich an der Hand der Thatsachen die Ansicht entwickelt, dass es eine sogenannte electromotorische Erregung der Metalle durch den Contact mit Gasen nicht gibt; ich habe ferner darin den Nachweis geliefert, dass die in irgend einem Zersetzungsapparate entstehende Polarisation ihren Ursprung, ganz entgegen der jetzt herrschenden Ansicht, lediglich in der Wiedervereinigung der ausgeschiedenen Jonen hat, also in der Rückbildung des zersetzten Electrolyten, und dass dabei die Electroden, insofern sie nicht selbst chemisch verändert werden, nur die Rolle von Zu- und Ableitern der Electricität spielen. Dabei ist die electromotorische Kraft der Polarisation durch

1) Exner, Wien. Ber. 78. p. 347. 1879 und Wied. Ann. 6. p. 353. 1879.

die dem rückläufigen chemischen Processe entsprechende Wärmetönung gemessen, ganz so wie die electromotorische Kraft irgend eines Elementes durch die Wärmetönung der in demselben auftretenden chemischen Vorgänge.

Es ist einleuchtend, dass nach dieser Theorie unter zweierlei Umständen die Zerlegung eines Electrolyten ohne gleichzeitig auftretende Polarisation stattfinden kann: erstens, wenn aus irgend welchen Gründen eine Rückbildung desselben aus den Jonen unmöglich ist und zweitens, wenn diese Rückbildung mit der Wärmetönung gleich Null vor sich geht. Der erste Fall tritt z. B. ein bei der Electrolyse von Wasser zwischen Electroden aus Zink; da ist eine Rückbildung des Wassers unmöglich, da der ausgeschiedene Wasserstoff nicht im Stande ist, den Sauerstoff aus seiner Verbindung mit Zink zu treiben; die Polarisation ist daher gleich Null. Der zweite Fall wird beobachtet, sobald man irgend eine Salzlösung zwischen Electroden aus dem zugehörigen Metalle zersetzt, z. B. Kupfervitriol zwischen Kupfer- oder Zinkvitriollösung zwischen Zinkelectroden etc. Hier ist die Wärmetönung bei Rückbildung des Electrolyten gleich Null und somit auch die Polarisation. Es kann demnach eine Polarisation nur dann eintreten, wenn die Rückbildung des Electrolyten unter Wärmegewinn vor sich geht, wie etwa bei der Zersetzung des Wassers zwischen Kupferelectroden, wo der ausgeschiedene Wasserstoff das Kupfer unter Rückbildung von Wasser und unter Wärmegewinn reducirt.

Wir wollen nun zunächst, von dieser Anschauung ausgehend, und dann vom Standpunkte der Contacttheorie die Vorgänge in einem sogenannten polarisirbaren Elemente, z. B. in einem Smee, betrachten.

Die electromotorische Kraft des Smee'schen Elementes lässt sich mit der eines Daniell'schen, die wir als Einheit wählen wollen, leicht folgendermassen vergleichen, wenn wir für die sich abspielenden chemischen Processe in bekannter Weise die Wärmewerthe nach J. Thomsen setzen.

Für 1 Aequivalent verbrannten Zinkes werden im Daniell verfügbar 24300 Calorien. Bei gleichem Zinkverbrauch kann das Smee offenbar nur viel weniger Wärme, respective

electromotorische Kraft liefern; denn da in demselben für ein Aequivalent verbrannten Zinkes auch ein Aequivalent Wasserstoff frei wird, so muss auch die äquivalente Menge Wassers zersetzt werden. Wir erhalten dem entsprechend für die Verbrennung eines Aequivalentes Zink und für die Ueberführung derselben in gelöstes schwefelsaures Zinkoxyd 52370 Calorien verfügbar. Davon werden aber auf die gleichzeitige Zersetzung des Wassers verwendet 34570 Calorien. Somit verbleiben im ganzen 17800 Calorien.

Wenn wir also die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes zur Einheit wählen, so erhalten wir: $D=1$; $S=0{,}732$.

Diese electromotorische Kraft des Smee'schen Elementes wollen wir zum Unterschiede von der thatsächlich beobachteten kurzweg die theoretische nennen.

Untersuchen wir nun, ob nach der im Vorangehenden zu Grunde gelegten Theorie eine Aenderung dieser theoretischen electromotorischen Kraft durch den Eintritt einer Polarisation möglich ist. Diese Frage verneint sich sofort; denn da eine Polarisation nur als Folge einer Rückbildung des zersetzten Electrolyten im Elemente auftreten könnte, der Wasserstoff aber nicht im Stande ist, das Zink aus seiner Verbindung mit Sauerstoff zu treiben — die Verbrennungswärme des Zinkes ist bedeutend grösser als die des Wasserstoffes — so entfällt damit jeder Grund zur Entstehung einer Polarisation. Die an einem Smee'schen Elemente beobachtete electromotorische Kraft, die wir der Kürze halber die effective nennen wollen, müsste also mit der theoretischen übereinstimmen und, wie diese, vollkommen constant sein.

Aus der ganzen Betrachtungsweise geht auch weiter hervor, dass diese electromotorische Kraft ungeändert dieselbe bleiben muss, gleichgiltig, welches Metall den negativen Pol des Elementes bildet, so lange nur die chemischen Vorgänge dieselben bleiben. Ersetzen wir z. B. das Platin durch Kupfer (Volta's Element) oder durch Kohle, so muss diese Abänderung ohne Einfluss auf die Kraft des Elementes sein.

Betrachten wir nun die Sache vom Standpunkte der Contacttheorie. Auch diese muss als Maass der electromotorischen Kraft die Wärmetönung der chemischen Processe ansehen, um nicht mit dem Principe von der Erhaltung der Kraft in Widerspruch zu kommen. Auch nach der Contacttheorie berechnet sich also die theoretische electromotorische Kraft des Smee zu 0,732 *D*. Da aber die Bedeckung des Platins mit Wasserstoff zur Entstehung einer Polarisation Veranlassung gibt, so müsste die effective electromotorische Kraft um diesen Betrag kleiner erscheinen, als die theoretische; mit anderen Worten, es müsste die Kraft eines frisch zusammengestellten Smee'schen Elementes mit dem Werthe 0,732 *D* beginnen und nach Schliessung desselben rasch auf einen vorläufig nicht näher bestimmten tieferen Werth absinken.

Vergleichen wir nun die Erfahrung mit diesen Folgerungen aus der chemischen, resp. aus der Contacttheorie.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass die electromotorische Kraft eines Smee'schen Elementes während des Gebrauches schnell abnimmt, und zwar um den weitaus grössten Theil des Betrages gleich zu Anfang, während es später einen ziemlich constanten Werth einhält. Diese Beobachtung macht man wenigstens an Smee'schen Elementen von der allgemein üblichen Form, bei denen sich das Zink und das Platin in demselben Gefässe mit angesäuertem Wasser befinden.

Es scheint auf den ersten Blick, als würde dieses Factum sehr zu Gunsten der Contacttheorie und direct gegen die chemische Theorie sprechen; allein diese Täuschung verschwindet sofort, wenn man die Vorgänge im Smee'schen Elemente auch nur oberflächlich in quantitativer Hinsicht untersucht. Was fordert denn die Contacttheorie? Sie fordert, dass die electromotorische Kraft mit dem Werthe 0,73 D. beginne und auf einen niedrigeren absinke. Und was ergibt das Experiment? Es ergibt, dass das Smee'sche Element anfangs eine Kraft hat, grösser als ein Daniell, und dass diese bald nach Schliessung auf den Werth 0,73 *D* herabsinkt, auf diesem Werth aber vollkommen constant

bleibt, wie ein Daniell auf dem seinigen. Mit anderen Worten, es ist die schliessliche effective (beobachtete) electromotorische Kraft gleich der von der chemischen Theorie geforderten theoretischen und gleich der von der Contacttheorie verlangten anfänglichen, noch durch keine Polarisation verminderten Kraft. Fragen wir gleich weiter, wie gross denn die Verminderung ist, die der anfängliche Werth 0,73 *D* durch die Polarisation erleiden soll, so gibt uns die Contacttheorie darauf keine Antwort. Es hat zwar Beetz[1]) die Polarisation des Platins durch Wasserstoff zu 0,81 *D* bestimmt, allein diese Grösse — die, nebenbei bemerkt, gar keinen Sinn hat, wie ich in meiner eingangs erwähnten Arbeit über die galvanische Polarisation zeigte — bezieht sich auf das sogenannte Maximum der Polarisation. In der That, wäre die Gegenkraft im Smee'schen Elemente gleich 0,81 *D*, so müsste die effective Kraft derselben negativ sein, was eine Unmöglichkeit wäre. Die Contacttheoretiker haben deshalb angenommen, dass die Grösse der Polarisation von der Intensität des primären Stromes abhänge — was, wenn einmal Zersetzung eintritt, gleichfalls nicht wahr ist — und vorausgesetzt, dass dieselbe im Smee'schen Elemente immer unter der Kraft des primären Stromes (0,73 *D*) bleibe, eine Voraussetzung, die absolut unbegründet ist. Dass diese Erklärung durch eine von der Stromstärke abhängige Polarisation eine unrichtige ist, geht schon aus Folgendem hervor. Construirt man sich zwei Smee'sche Elemente, von denen das eine einen viele hundertmal grösseren Widerstand hat als das andere, so müsste nach der Contacttheorie in dem Elemente mit grossem Widerstand die Polarisation viel geringer, die effective electromotorische Kraft somit viel grösser sein, als in dem anderen. Der Versuch spricht dagegen, es zeigen beide Elemente absolut dieselbe Kraft, und ausserdem ist diese nicht kleiner, sondern gleich der theoretischen von 0,73 *D*.

Nach alledem ist die bisher übliche Betrachtungsweise der Vorgänge in einem inconstanten Elemente nicht danach

1) Beetz, Wied. Ann. **5**. p. 1. 1878.

angethan, zur Aufklärung derselben auch nur das Geringste beizutragen. Versuchen wir dagegen, vom Standpunkte der chemischen Theorie der Sache näher zu kommen.

Die chemische Theorie betrachtet als Quelle des electrischen Stromes einzig und allein die chemischen Vorgänge im Element und setzt die erzeugte electromotorische Kraft der Wärmetönung dieser Vorgänge proportional. Danach ist klar, dass die Kraft eines Elementes so lange constant bleibt, als in der Natur der chemischen Processe sich nichts ändert, dass aber auch eine jede derartige Aenderung von einer entsprechenden Schwankung der electromotorischen Kraft begleitet werden muss. Im Smee'schen Elemente spielen sich kurz die folgenden Processe ab, während der Auflösung von einem Aequivalent Zink. Es wird die entsprechende Menge Wasser zersetzt — ob direct oder nach Abspaltung von SO_3 ist gleichgiltig, da in letzterem Falle die zur Abspaltung nöthige Wärmemenge sofort wieder ersetzt wird, wenn sich SO_3 mit dem überschüssigen Wasser verbindet. Ein solcher Ueberschuss von Wasser, in dem das Schwefelsäurehydrat gelöst ist, muss allerdings stets vorhanden sein, wenn die Betrachtungen gelten sollen; es ist auch bekannt, dass, wenn man zu den höchsten Concentrationen übergeht, sich dann die electromotorische Kraft in der entsprechenden Weise ändert.

Von den Zersetzungsproducten des Wassers wird der Wasserstoff am negativen Pol frei, der Sauerstoff oxydirt das Zink, das weiter in gelöstes schwefelsaures Zinkoxyd übergeführt wird. Die letzteren Processe liefern, die Wasserzersetzung verbraucht Wärme; die restirende Differenz von 17800 Calorien gibt schliesslich ein Maass der erzeugten electromotorischen Kraft (0,732 *D*).

Dieser Werth muss constant bleiben, so lange sich im Wärmewerth der chemischen Processe nichts ändert, d. h. so lange wir es mit einem idealen Smee'schen Elemente zu thun haben. Die Elemente in der Gestalt, wie wir sie gewöhnlich verwenden, genügen aber dieser Bedingung aus zwei Gründen nicht, von denen sich der eine wie der andere leicht beheben lässt, so lange es sich nur um eine wissen-

schaftliche Untersuchung und nicht um eine praktische Verwerthung der Elemente handelt. Die beiden in Rede stehenden Ursachen haben entgegengesetzte Tendenz, die eine sucht die Kraft des Elementes zu erhöhen, die andere sie zu vermindern; die erste ist die Anwesenheit von freiem Sauerstoff im Wasser, die andere ist die Bildung von Zinksulfatlösung im Elemente.

Wir wollen nun die Wirkung dieser beiden Ursachen genauer erwägen. Dass jedes Wasser, das frei an der Luft steht, eine gewisse Menge Sauerstoff gelöst enthält, darüber kann wohl kein Zweifel herrschen. Jeder, der sich mit galvanischer Polarisation oder mit der Erscheinung der electrolytischen Convection beschäftigt hat, wird wissen, wie ausserordentlich schwer, ja nahezu unmöglich es ist, Wasser vollkommen luftfrei zu erhalten. Auskochen desselben oder Auspumpen mittelst einer gewöhnlichen Luftpumpe genügt bei weitem nicht; nur lange dauerndes Stehenlassen im Vacuo einer Quecksilberluftpumpe vermag die absorbirten Gase nahezu vollständig zu entfernen. Enthält aber das Wasser des Smee'schen Elèmentes freien Sauerstoff, dann wird der Wärmewerth der chemischen Processe ein wesentlich anderer. Der Wasserstoff, der sonst am Platin frei werden würde, findet jetzt in dessen Umgebung Sauerstoff vor und verbindet sich mit demselben zu Wasser, wobei wieder eine gewisse Wärmemenge verfügbar wird. Gesetzt den Fall, es wäre am Platin und in der Umgebung desselben eine genügende Sauerstoffmenge vorhanden, um den ganzen Wasserstoff zu oxydiren, welche Wirkung würde dies auf die Kraft des Elementes haben? Durch die Bildung des $ZnSO_4$ und Lösung desselben werden gewonnen 52370 Calorien per Aequivalent, für das gleichzeitig zersetzte Wasser kämen davon in Abzug 34570 Calorien; da aber eine thatsächliche Wasserzersetzung nicht eintritt, weil der frei werdende Wasserstoff vom gelösten Sauerstoff sofort wieder oxydirt wird, so entfällt die betreffende Wärmeverminderung vollständig, und es bleiben zur Erzeugung von electromotorischer Kraft die vollen 52370 Calorien verfügbar; d. h. das Smee'sche Element hätte in diesem äussersten Falle eine Kraft = 2,15 *D*.

Dieser Fall, dass der ganze Wasserstoff vor seinem Freiwerden wieder oxydirt wird, dürfte wohl sehr selten vorkommen und jedenfalls nur äusserst kurze Zeit dauern; aber ein gewisser Theil desselben wird insolange stets wieder zu Wasser werden, als noch ein Sauerstoffvorrath vorhanden ist, und eine diesem Theile entsprechende Erhöhung der electromotorischen Kraft über die theoretische wird das Element anzeigen. Bedenkt man nun, dass der absorbirte Sauerstoff im Vergleich mit dem entwickelten Wasserstoff stets eine ziemlich beschränkte Menge repräsentirt, so wird man begreifen, warum die Kraft des Smee'schen Elementes, wenn dasselbe frisch in Gebrauch gesetzt wird, stets mit einem Werthe anhebt, der zwischen 0,73 und 2,15 D liegt und warum dieser Werth in kurzer Zeit auf den theoretischen von 0,73 D herabsinkt. Dieses Absinken erfolgt eben in dem Maasse, als der Vorrath an Sauerstoff sich erschöpft. Ich unterlasse es vorläufig, auf all' die bekannten Umstände einzugehen, die die Kraft eines solchen Elementes temporär erhöhen, wie: Schütteln, Einblasen von Luft, Herausheben des Platins aus der Flüssigkeit etc.; die Erklärung ergibt sich in jedem einzelnen Falle von selbst. Nur auf ein Factum möchte ich noch aufmerksam machen, das man oft zu beobachten Gelegenheit hat. Schliesst man ein Smee'sches Element, das lufthaltiges Wasser enthält, so bemerkt man ein Auftreten des Wasserstoffes oft erst eine halbe Minute nach Herstellung des Schlusses, was deutlich zeigt, dass die ersten Partien desselben oxydirt wurden. Desgleichen ist es eine bekannte Erscheinung, dass in einem Wasservoltameter der Wasserstoff oft erst beträchtlich später erschien, als der Sauerstoff.

Dieser Einfluss des gelösten Sauerstoffes auf die electromotorische Kraft eines Elementes ist auch schon öfters beobachtet worden, so haben z. B. De Fonvielle und Dehérain[1]) gefunden, dass Batterien, die mit sauerstoffhaltigem Wasser gefüllt sind, beträchtlich stärker wirken, als solche mit luftfreiem. Auch Marié-Davy[2]) hat gerade

1) De Fonvielle u. Dehérain. Compt. rend. 47.
2) Marié-Davy, Compt. rend. 53.

in Bezug auf das Smee'sche Element einen bedeutenden Einfluss des gelösten Sauerstoffes auf die electromotorische Kraft constatirt.

Wenn es sich nun darum handelt, die wirkliche Kraft eines Smee'schen Elementes zu bestimmen, d. h. eines Elementes, dessen Processe dem Schema $Zn|H_2SO_4aq.|Pt$ entsprechen, so ist es vor allem nöthig, sich dem Einflusse des gelösten Sauerstoffes zu entziehen. Da Auskochen, Auspumpen und dergleichen immer nur sehr mangelhaft nützt, so bleibt nichts übrig, als den Sauerstoffvorrath durch die Wasserstoffentwicklung des Elementes selbst sich erschöpfen zu lassen, was, wenn der Widerstand desselben nicht sehr gross ist, stets in kurzer Zeit, meist in 1—2 Minuten, erreicht ist. Man findet dann, wie die nachfolgenden Beobachtungen zeigen werden, die electromotorische Kraft vollkommen constant und genau gleich dem theoretischen Werthe von 0,73 *D*.

Nun wäre noch der zweite Umstand zu erwähnen, der die Kraft des Smee'schen Elementes beeinflusst, nämlich die Bildung von Zinkvitriollösung. Die Wirkung dieses Umstandes ist zu bekannt, als dass ich weiter darauf eingehen sollte, ich will nur kurz erwähnen, dass in dem Maasse, als die Zinkvitriollösung neben dem Wasser zersetzt wird, die electromotorische Kraft des Elementes abnehmen muss, da zu dieser Zersetzung bedeutend mehr Wärme verbraucht wird, als zu der des Wassers. Es lässt sich auch ohne weiteres einsehen, dass, sobald der ganze Strom nur mehr durch Zinkvitriollösung gehen kann, dann die Kraft des Elementes auf Null herabsinken muss, indem die ganze durch Verbrennung des Zinkes auf der einen Seite gewonnene Arbeit zur Ausscheidung einer äquivalenten Menge Zinkes auf der anderen Seite verbraucht wird. Man hat dann eben kein Smee'sches Element mehr, sondern Zink und Zink in einer Lösung von Zinkvitriol.

Dieser Einfluss des gelösten Zinkvitriols lässt sich im Experimente aber sehr leicht beheben, man hat zu dem Zwecke nichts weiter zu thun als das Zink und das Platin in getrennte Gefässe zu geben und diese durch einen Säure-

bügel miteinander zu verbinden. Zieht man die Glasröhre, die den Bügel bildet, etwa noch auf einer Seite in eine feine Spitze aus, so kann das Element durch Stunden geschlossen bleiben, ohne dass eine irgend merkliche Menge von Zinkvitriol in das Gefäss mit Platin gelangt. Bei einem so zusammengestellten Elemente dauert es infolge des grösseren Widerstandes natürlich etwas länger, bis der Vorrath von absorbirtem Sauerstoff erschöpft ist.

Ich will nun an die Mittheilung der Beobachtungen gehen; da die Versuche nichts weiter bezweckten, als eine Bestimmung der electromotorischen Kraft des Smee'schen Elementes, eine Bestimmung die sich jederzeit leicht und ohne Vorbereitungen wiederholen lässt, so glaube ich mich auch in Bezug auf die Mittheilung von Versuchen auf Weniges beschränken zu können. Das Dilemma, welches durch die nun folgenden Versuchsresultate gelöst werden soll, will ich noch einmal kurz so formuliren: Die Contacttheorie verlangt, dass die electromotorische Kraft eines Smee'schen Elementes mit dem Werthe 0,732 *D* beginne, dann aber auf einen niedrigeren Werth absinke, der abhängt von der Grösse der entstandenen Polarisation, d. h. auch von der Grösse des Widerstandes; ferner, dass dieselbe sich ändert, je nach der Natur des negativen Metalles. Die chemische Theorie dagegen fordert, dass das Smee'sche Element anfangs eine Kraft habe zwischen 0,732 und 2,15 *D*, dass dieser Werth absinke bis auf 0,732 *D* und von da ab vollkommen constant sei; und zwar gleichgiltig, welches Metall den negativen Pol bildet, so lange dasselbe nicht zu chemischen Veränderungen Anlass bietet. Ferner muss der Werth 0,732 *D* auch unabhängig sein vom Widerstande des Elementes.[1])

Die nun folgenden Bestimmungen geschahen sämmtlich auf electrometrischem Wege aus Gründen, auf die ich noch zurückkommen werde. Die Versuchsanordnung war kurz die folgende: Von den beiden Polen des isolirt aufgestellten Elementes gingen Leitungsdrähte zu den Klemmen

1) Die Widerstände der äusseren Schliessungen waren bei allen Versuchen gleich Null zu setzen.

eines gewöhnlichen, gleichfalls isolirten Contactschlüssels, der den Strom zu schliessen und zu unterbrechen gestattete. Von dem einen Pol ging ausserdem eine Leitung zur Erde und von dem andern eine solche zur Nadel eines Branly'schen Quadrantenelectrometers, dessen Quadrantenpaare durch eine Zamboni'sche Säule auf constanter Potentialdifferenz gehalten wurden. Die natürlich mit Fernrohr und Scala abgelesenen Ausschläge waren den electromotorischen Kräften proportional; letztere wurden auf den Ausschlag eines Normal-Daniell als Einheit bezogen. Bei den folgenden Beobachtungen befanden sich das Zink und das Platin des Smee'schen Elementes in getrennten Gefässen.

Es wurde zunächst der Effect des Normal-Daniell ($Zn \mid H_2SO_4$ aq. $\mid H_2O \mid Cu\,SO_4$ aq. $\mid Cu$) bestimmt. Unter N ist die Ruhelage des Electrometers, unter A der Ausschlag nach Verbindung mit dem Elemente notirt. Diese Messung geschieht einfach dadurch, dass in der oben gegebenen Anordnung — an Stelle des Smee natürlich das Daniell gesetzt — durch Oeffnen des Schlüssels der Strom des vorher in sich geschlossenen Elementes für die Dauer der Messung unterbrochen wird; die electromotorischen Kräfte werden somit im ungeschlossenen Elemente bestimmt.

Normal-Daniell:

$$\begin{aligned} N &= 685 \\ A &= 711 \\ \hline D &= 26. \end{aligned}$$

Der electromotorischen Kraft von 1 D entspricht somit eine Ablenkung von 26 Scalentheilen.

Smee's Element. Frisch gefüllt und noch nicht geschlossen:

$$\begin{aligned} N &= 695 \\ A &= 725 \\ \hline S &= 30 = 1{,}15\ D. \end{aligned}$$

Das Element hatte somit, bevor noch Wasserstoffentwicklung eintrat, eine Kraft von $\frac{30}{26} = 1{,}15\ D$. Nun wurde dasselbe ohne äusseren Widerstand in sich selbst geschlossen und von Zeit zu Zeit eine Bestimmung gemacht; die Unterbrechung während der Messung dauerte nie länger als

$^1/_4$ Minute. Unmittelbar nach der ersten Beobachtung ergab sich nach kurzer Schliessung des Elementes:

$$N = 698$$
$$A = 720$$
$$S = 22 = 0{,}81\ D.$$

Von der nächsten Beobachtung ab war schon der Werth constant wie aus Folgendem hervorgeht:

$N = 699$
$A = 718$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 698$
$A = 717$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 700{,}5$
$A = 719{,}5$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 700$
$A = 718{,}5$
$S = 18{,}5 = 0{,}712\ D.$

$N = 703{,}5$
$A = 722{,}5$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 701$
$A = 720$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 703{,}5$
$A = 723$
$S = 19{,}5 = 0{,}750\ D.$

$N = 704$
$A = 723$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 703{,}5$
$A = 722{,}5$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 737$
$A = 756$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

$N = 742$
$A = 761$
$S = 19 = 0{,}731\ D.$

Zur Controle wurde schliesslich noch einmal der Ausschlag des Daniell bestimmt:

$$N = 735$$
$$A = 761$$
$$D = 26$$

und mit dem anfänglichen Werthe vollkommen übereinstimmend gefunden. Das Smee'sche Element war während dieser Versuchsreihe über eine Stunde geschlossen gewesen, ohne dass, wie man sieht, seine Kraft im geringsten vom theoretischen Werthe (0,732 *D*) abgewichen wäre. Dagegen ist der Einfluss des gelösten Sauerstoffes bei den ersten beiden Beobachtungen ganz in der Weise bemerkbar, wie es die chemische Theorie fordert; allein die Existenz einer galvanischen Polarisation wird durch nichts fühlbar.

Eine weitere Versuchsreihe, die mit demselben Elemente angestellt wurde, ergab vollkommen identische Resultate; es wurde dasselbe erst durch 5 Minuten geschlossen und dann während der darauffolgenden $1^1/_2$ Stunden fünf Bestimmungen gemacht, welche alle $S = 0{,}731$ ergaben.

Hat man also das Zink und Platin in getrennten Gefässen, sodass der gelöste Zinkvitriol nicht so bald zum Platin gelangen kann, so bleibt die electromotorische Kraft vollkommen constant, auch wenn das Element durch $1^1/_2$ Stunden geschlossen bleibt.

Befindet sich, wie dies gewöhnlich der Fall ist, das Zink und Platin in demselben Gefäss, so genügt natürlich schon ein momentaner Schluss, um durch die reichliche Wasserstoffentwicklung das Wasser am Platin sauerstofffrei zu machen; allein die electromotorische Kraft bleibt nicht lange auf dem theoretischen Werthe, sondern sinkt, sobald die Zinkvitriollösung merklich an der Electrolyse participirt. Die folgenden Zahlen geben hierfür ein Beispiel. Es wurden an einem solchen Elemente successive die Kräfte beobachtet:

$S = 0{,}74$ $S = 0{,}73$ $S = 0{,}73$ $S = 0{,}74$ $S = 0{,}72$.

Dabei war das Element durch eine halbe Stunde geschlossen. Nach einer weiteren halben Stunde sank die Kraft auf 0,70 und später auf 0,60 ab.

Die vorstehenden Resultate schliessen sich enge an die Consequenzen der chemischen Theorie an, sie widersprechen dagegen vollständig den Folgerungen der Contacttheorie. Nicht nur, dass die bei reichlicher Wasserstoffentwicklung beobachtete electromotorische Kraft vollkommen mit der theoretischen, ohne Rücksicht auf eine etwaige Polarisation berechneten übereinstimmt, es zeigt sich auch, dass diese Kraft vom Widerstande des Elementes, also von der Stromstärke unabhängig ist. Bei den zuerst mitgetheilten Versuchen waren die getrennten Gefässe für Zink und Platin durch ein in eine Capillare ausgezogenes Glasröhrchen verbunden, der Widerstand des Elementes somit ausserordentlich viel grösser als im zweiten Falle; nichtsdestoweniger ergaben sich dieselben Werthe. Der Contacttheorie zufolge

müsste aber die Polarisation sich namentlich mit der Stromstärke ändern.

Mit den vorstehenden Versuchen stimmen auch die wenigen verlässlichen Zahlen anderer Beobachter sehr gut überein. So fand z. B. Crova[1]) die electromotorische Kraft eines in Vacuo untersuchten Smee'schen Elementes anfänglich gleich 0,800 *D* und später auf dem Werthe 0,735 *D* ganz constant. Man sieht, dass Spuren des absorbirten Sauerstoffs auch im Vacuo noch zurückbleiben. Gleicherweise fand Naccari[2]) die Kraft eines Smee'schen Elements, wenn dasselbe noch nicht geschlossen war, gleich 1,25 *D*, nach kurzem Schluss aber schon = 0,742 *D*.

Es ist auffallend, dass die Beziehungen dieser Zahlen zu den Folgerungen der beiden Theorien und zu der sogenannten Polarisation in Elementen nicht längst bemerkt wurden; es mag wohl der Umstand mit dazu beigetragen haben, dass die Kräfte solcher inconstanter Elemente meist nach einer Compensationsmethode auf galvanometrischem Wege gemessen wurden. Es lässt sich leicht übersehen, dass man auf diesem Wege zu ganz falschen Vorstellungen gelangen musste; denn da das compensirende Element, das stets stärker sein muss als das zu messende Smee'sche, am Platin des letzteren Sauerstoff entwickelt, so ist klar, dass auf diese Weise die Kraft des Smee viel zu gross gefunden werden wird. Ich habe zur Controle solche Messungen nach der Poggendorff'schen Compensationsmethode mit einem Siemens'schen Universalgalvanometer ausgeführt und folgende Resultate erhalten:

Das compensirende Element war ein Bunsen, das zu bestimmende ein Smee, dessen Zink und Platin sich in getrennten Gefässen befanden. Das Vergleichselement war ein Daniell. Blieb die Verbindung der Elemente Smee und Bunsen mit dem Galvanometer beständig geschlossen, so war $S = 1{,}12\ D$ und vollkommen constant. Das bedeutet nichts anderes, als jenen Werth des Smee, der dem Gleich-

1) Crova, Pogg. Ann. **153.** p. 272. 1874.
2) Naccari, Cimento (2) **9.**

gewichtszustande zwischen Verbrauch von Sauerstoff (am Platin) durch den Strom des Smee, und Erzeugung von Sauerstoff durch den Strom des Bunsen ebendaselbst entspricht.

Lässt man aber das Smee'sche Element in sich selbst geschlossen, und stellt man die Verbindung desselben mit den übrigen Theilen nur momentan zur Messung her, so sinkt der beobachtete Werth sofort auf 0,73 *D* und bleibt constant, wie lange man auch das Element für sich geschlossen lassen mag.

Wir wollen nun noch die Vorgänge in einem Volta'schen Elemente untersuchen, d. i. in einem Smee'schen, dessen Platin durch reines Kupfer ersetzt ist. Nach der chemischen Theorie wird ein solches Element sich nicht von einem Smee'schen unterscheiden, nach der Contacttheorie dagegen wesentlich, und zwar schon aus dem Grunde, weil die Polarisation des Kupfers durch Wasserstoff eine andere sein soll, als die des Platins.

Das Experiment entscheidet auch hier wieder zu Gunsten der chemischen Theorie, indem sich die electromotorische Kraft eines Volta'schen Elementes genau so gross ergibt, als die eines Smee'schen. Die Versuchsanordnung war im Folgenden genau dieselbe wie im Vorangehenden, das Zink und Kupfer befanden sich wieder in getrennten Gefässen. In einem frisch gefüllten Elemente wurden successive die folgenden Werthe für die electromotorische Kraft, das Daniell als Einheit gesetzt, erhalten:

0,827 0,748 0,731 0,731 0,731 0,731 0,731 0,731.

Während der Dauer dieser Versuchsreihe war das Element durch $1^1/_2$ Stunden geschlossen und, wie man sieht, nicht vollkommen constant. Der höhere Werth der ersten Beobachtung hat seinen Grund wieder in der Anwesenheit von freiem Sauerstoff genau wie beim Smee'schen Elemente. Es kann vorkommen, wenn die entwickelte Wasserstoffmenge nicht hinreicht, den gelösten Sauerstoff zu beseitigen, dass letzterer das Kupfer direct oxydirt; dadurch entwickelt sich natürlich ein Strom im entgegengesetzter Richtung, wie der durch die Oxydation des Zinks hervorgerufene und die Kraft

des Elementes erscheint zu klein. Man erkennt das Vorhandensein dieser Wirkung nicht nur sofort am Electrometer, sondern auch an der Schwärzung des vorher blanken Kupfers. Sollen also unsere Betrachtungen auch auf das Volta'sche Element anwendbar sein, so muss dafür gesorgt sein, dass das Kupfer nicht selbst chemische Veränderungen erleidet, also vollkommen blank bleibt.

Ist der Widerstand des Elementes nicht gar zu gross, also die entwickelte Wasserstoffmenge nicht gar zu gering, so kann man das Kupfer bei Stunden langem Gebrauche ganz intact erhalten. Es ist selbstverständlich, dass die mitgetheilten Versuche sich nur auf diesen Fall erstrecken.

Zum Beweise, dass auch hier die Stromstärke keinen Einfluss auf die electromotorische Kraft hat, wie es die Contacttheorie fordert, führe ich noch die folgenden Versuche an, bei denen sich das Kupferblech und das Zink in demselben Gefässe befanden. Es wurden gleich vom Anfang an die Werthe erhalten:

0,731 0,731 0,731 0,731 0,731

Das Element war nahezu $^1/_2$ Stunde geschlossen, im weiteren Verlauf sank allmählich die Kraft auf 0,6 *D* infolge der Zersetzung der Zinkvitriollösung.

Diese Versuche — ich halte es nicht für nöthig, deren mehrere anzuführen, da sie alle vollkommen identisch ausfielen — zeigen also, dass zwischen einem Smee'schen und einem Volta'schen Elemente kein Unterschied besteht, dass beide constante und unpolarisirbare Elemente sind. Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn wir das Platin des Smee'schen Elementes etwa durch Kohle ersetzen; dass Beetz[1]) für diesen Fall den Werth 1,31 *D* erhielt, kann seinen Grund nur darin haben, dass derselbe nach der Compensationsmethode gewonnen wurde, einer Methode, die nach dem oben Auseinandergesetzten sich hier nicht anwenden lässt, weil sie zu grosse, und zwar in unbestimmtem Maasse zu grosse Werthe liefert. Dasselbe gilt von dem Werthe für das Smee'sche Element, den Beetz (l. c.) zu 1,61 *D* angibt.

1) Beetz, Wied. Ann. 5. p. 1. 1878.

Diese Zahl beweist nur, wie viel Sauerstoff durch das compensirende Element am Platin des Smee ausgeschieden wurde. Hätte diese Menge hingereicht, den ganzen vom Smee'schen Elemente gelieferten Wasserstoff zu oxydiren, so würde man auf diese Weise sogar den Werth 2,15 *D* erhalten haben. Es hat also dieser Werth gar keine fixe Bedeutung.

Es ist nicht möglich, hier auf alle Einzelheiten der sehr umfangreichen Literatur einzugehen; die vielen Irrthümer, theils in Anschauungen, theils in Zahlen, ergeben und lösen sich von selbst, sobald man den Boden der Contacttheorie verlässt. Nur auf einiges möchte ich noch aufmerksam machen; es gibt z. B. Gerland[1]) die electromotorischen Kräfte des Smee'schen Elementes sehr verschieden an, je nachdem das Platin durch Cu, Ag oder Au ersetzt ist, allein bei einer genauen Prüfung der Sache überzeugt man sich leicht, dass diese Differenzen verschwinden, sobald man mit sauerstofffreien Flüssigkeiten arbeitet. Dasselbe gilt von den Kräften der Combinationen: $Cu|H_2O|Ag$; $Cu|H_2O|Au$; $Cu|H_2O|Pt$, welche Gerland gleichfalls verschieden angibt; in Wasser, welches keinen Sauerstoff absorbirt enthält, sind diese Kräfte sämmtlich gleich Null.

Man hat, wie mir scheint, auch die Rolle, die depolarisirende Substanzen im Smee'schen Elemente spielen, bisher nicht ganz richtig aufgefasst. Wenn das Platin von irgend einem Superoxyd, z. B. Braunstein, umgeben ist, so hat man die Ursache der verstärkenden Wirkung desselben darin gesucht, dass der Wasserstoff verhindert wird, sich am Platin abzuscheiden und dasselbe zu polarisiren.[2]) In Wahrheit wächst aber die electromotorische Kraft deshalb, weil der Wasserstoff wieder zu Wasser oxydirt wird, daher von der aus der Oxydation des Zinkes stammenden Wärmemenge (äquivalent 2,15 *D*) nichts zur Wasserzersetzung verbraucht wird.

Es ist auch durchaus nicht gleichgiltig — wie es die

1) Gerland, Pogg. Ann. **187.** p. 552. 1869.
2) Beetz, Pogg. Ann. **150.** p. 535. 1873.

Contacttheorie wohl annehmen muss — auf welche Weise der Wasserstoff gehindert wird, das Platin zu polarisiren. Bedecken wir letzteres z. B. mit Kupferoxyd, sodass der Wasserstoff bei seiner Rückbildung Kupfer reduciren muss, so wird nur ein Theil der Verbrennungswärme des Wasserstoffs wiedergewonnen, und die electromotorische Kraft liegt zwischen 0,732 und 2,15 *D*. Wird der Wasserstoff durch freien Sauerstoff in der Flüssigkeit oxydirt, so wird die ganze Verbrennungswärme desselben gewonnen, und die Kraft ist = 2,15 *D*. Stammt endlich der oxydirende Sauerstoff aus einer Verbindung, aus der er sich unter Wärmeentwicklung loslöst — und dies ist eben bei den Superoxyden der Fall — so wird noch mehr Wärme gewonnen, als die Wasserzersetzung erfordert, und die electromotorische Kraft des Elementes steigt über 2,15 *D*. Das ist in der That der wahre Grund der ausserordentlichen Wirkung von Superoxyden in der galvanischen Kette.

Fassen wir die Resultate der vorliegenden Untersuchung kurz zusammen, so erhalten wir Folgendes:

Eine sogenannte galvanische Polarisation in Elementen gibt es nicht, jedes Element ist unpolarisirbar. Die schon von W. Thomson[1]) auf Grund der chemischen Vorgänge im Elemente vermuthete Beziehung, dass die Natur des negativen Poles gleichgiltig sei, bestätigt sich vollkommen, solange natürlich derselbe nicht selbst chemisch verändert wird. Ein Smee'sches Element nach dem Schema Zn | H_2SO_4 aq. | H_2SO_4 aq. | Pt. zusammengestellt und wirkend, ist absolut constant.

Fragen wir schliesslich, woher es kommt, dass ein Daniell'sches Element, den Einfluss des freien Sauerstoffs nicht in gleichem Maasse zeigt, wie ein Smee'sches, so ist die Antwort darauf die: 1. eine concentrirte Kupfervitriollösung absorbirt beträchtlich weniger Sauerstoff als angesäuertes Wasser; 2. der aus der Wasserzersetzung stammende Wasserstoff findet reichlich $CuSO_4$ zur Reduction des Kupfers vor, es wird also nur der weitaus kleinste Theil

1) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 2.

desselben von freiem Sauerstoff oxydirt werden, und 3. ist es eine bekannte Thatsache, dass ein noch so sorgfältig zusammengestelltes Daniell'sches Element, wenn es lange offen gestanden, eine etwas grössere electromotorische Kraft besitzt, als wenn es geschlossen war, ein Beweis, dass der Unterschied zwischen einem Daniell'schen und einem Smee'schen Elemente einzig und allein ein quantitativer, nicht aber ein qualitativer ist.

V. *Ueber die specifische Wärme des Wassers; von A. Wüllner.*[1]

Hr. Prof. Pfaundler machte mich im vorigen Jahre auf einen Unterschied in der Einführung des Wärmeverlustes wegen der Temperatur der Umgebung in der Formel zur Berechnung der specifischen Wärme bei Versuchen nach der Mischungsmethode aufmerksam, wie ich die Formel im 3. Bande meiner Experimentalphysik, 3. Aufl., p. 399 abgeleitet habe, und sie Hr. von Münchhausen zur Berechnung angewandt, und wie Hr. Pfaundler dieselbe gegeben hat[2]). Ist p das Gewicht, c die specifische Wärme, T die Anfangstemperatur des zu untersuchenden Körpers, Π der Wasserwerth des Calorimeters mit Zubehör, ϑ_0 die Anfangstemperatur des Calorimeters, t die dem Körper und Calorimeter gemeinsame Endtemperatur, $\Sigma \Delta t$ die Temperaturcorrection, so lautet meine Formel:

$$c = \frac{\Pi(t - \vartheta_0 + \Sigma \Delta t)}{p(T - t)},$$

während Hr. Pfaundler setzt:

$$c = \frac{\Pi(t - \vartheta_0 + \Sigma \Delta t)}{p(T - t - \Sigma \Delta t)}.$$

Wenn auch bei den meisten Versuchen dieser Unterschied die Resultate nur innerhalb der Grenzen der Beobachtungs-

---

1) Nachtrag zu der Abhandlung Wied. Ann. **1.** p. 373. 1877.

2) Pfaundler, Pogg. Ann. **129.** p. 102. 1866.

fehler beeinflusst, so konnte derselbe doch zur Erkennung der Aenderungen der specifischen Wärme des Wassers, die in den Zehnteln eines Procent liegen, von Bedeutung sein. Ich habe deshalb die Correctionsberechnung mit Rücksicht auf die Versuche von Münchausen's nochmals revidirt und gesehen, dass in der That beide Formeln nicht allgemein richtig sind, sondern nur gewissen Grenzfällen entsprechen, resp. dass für beide Formeln der Werth von $\Sigma \Delta t$ etwas anders bestimmt werden muss, wie Hr. Pfaundler und ich es gethan haben.

Die strenge Formel ergibt sich auf folgende Weise. Der Körper vom Gewichte p, dessen specifische Wärme c ist, hat sich von der Temperatur T auf die Temperatur t abgekühlt, welche das Calorimeter nach so langem Warten zeigt, dass sicher die Temperatur des Körpers und des Calorimeters nicht mehr verschieden ist. Der Körper hat also die Wärmemenge:

$$pc(T-t)$$

abgegeben. Diese Wärme hat das Calorimeter mit Zubehör, dessen Wasserwerth Π ist, von ϑ_0 auf t erwärmt, ausserdem hat aber das Calorimeter einen Theil ausgestrahlt. Nennen wir den letztern W, so ergibt sich zur Bestimmung von c die Gleichung:

$$pc(T-t) = \Pi(t-\vartheta_0) + W.$$

Zur Bestimmung von ϑ_0 und W beobachtet man nun den Gang der Temperatur von 20 zu 20 Secunden und zwar erstens eine Anzahl Intervalle, bevor man den Körper eintaucht, und dann nach dem Eintauchen solange, bis die Temperaturänderung des Calorimeters in den aufeinander folgenden Intervallen die gleiche geworden ist, zum Beweise, dass Körper und Calorimeter dieselbe Temperatur haben. Nun seien die vor dem Eintauchen beobachteten Temperaturen:

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots$$

sodass $\tau_1 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_3 \ldots = v$, die Abnahme der Temperatur vor dem Eintauchen ist für das einzelne Intervall. Wenn dann τ_n die letzte vor dem Eintauchen beobachtete Temperatur ist, so ist $\vartheta_0 = \tau_n - v$.

Dann wird die Reihe der Temperaturen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ beobachtet; nehmen wir an, dass von dem Intervall, dessen Endtemperatur ϑ_n ist, die Temperaturänderung constant sei, sodass $\vartheta_n = t$ ist, und seien die dann noch beobachteten Temperaturen:

$$\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 \ldots \text{ und } \tau'_1 - \tau'_2 = \tau'_2 - \tau'_3 \ldots = v'.$$

Ist nun O die strahlende Oberfläche des Calorimeters, also des Bodens, des Cylindermantels, so weit das Wasser in demselben reicht, und die obere Fläche der Flüssigkeit, ist ferner E das mittlere Emissionsvermögen dieser Flächen, ist x die Temperatur der Umgebung und ϑ die mittlere Temperatur während eines Intervalles, während dessen sich der Körper abkühlt, so ist der Wärmeverlust ΔW während dieses Intervalles:

$$\Delta W = OE(\vartheta - x) = a(\vartheta - x),$$

und W ist die Summe $\Sigma \Delta W$, dieselbe berechnet für alle Intervalle von ϑ_0 bis ϑ_n.

Zur Bestimmung von a und x dienen die Beobachtungen von v' und v. Zunächst wird, wenn τ' die mittlere Temperatur in den Intervallen bedeutet, aus denen v' abgeleitet ist, und wenn ΔW_2 die der Temperaturänderung v' entsprechende Wärmeabgabe des Calorimeters ist:

$$(1) \qquad \Delta W_2 = OE(\tau' - x) = a(\tau' - x).$$

Betreffs der Wärmeabgabe ΔW_1, welche der Temperaturerniedrigung v vor dem Eintauchen des Körpers entspricht, ist zu beachten, dass da die ausstrahlende Oberfläche eine andere ist, weil durch das Eintauchen des Körpers das Wasser im Calorimeter steigt. Vor dem Eintauchen strahlt somit ein kleinerer Theil des Cylindermantels. Ist die gesammte strahlende Oberfläche dann gleich O_0, so wird:

$$(2) \qquad \Delta W_1 = O_0 E(\tau - x) = \frac{O_0}{O} OE(\tau - x) = \frac{O_0}{O} a(\tau - x).$$

Bestimmt man a und x aus (1) und (2), so wird:

$$\Delta W = \frac{\Delta W_2 - \frac{O}{O_0}\Delta W_1}{\tau' - \tau}(\vartheta - \tau) + \frac{O}{O_0}\Delta W_1.$$

Nun ist: $\Delta W_1 = \Pi . v, \qquad \Delta W_2 = \Pi\left(1 + \frac{pc}{\Pi}\right)v'.$

Damit wird:

$$\Delta W = \Pi\left\{\frac{\left(1+\frac{pc}{\Pi}\right)v'-\frac{O}{O_0}v}{\tau'-\tau}(\vartheta-\tau)+\frac{O}{O_0}v\right\}$$

und schliesslich:

$$\Sigma\Delta W = W = \Pi\left\{\frac{\left(1+\frac{pc}{\Pi}\right)v'-\frac{O}{O_0}v}{\tau'-\tau}\left(\sum_1^{n-1}\vartheta+\frac{\vartheta_n+\vartheta_0}{2}-n\tau\right)+n\frac{O}{O_0}v\right\}.$$

Setzt man den in der Hakenklammer eingeschlossenen Ausdruck gleich $\Sigma\Delta t$, so ergibt sich für die Berechnung der specifischen Wärme der von mir angegebene Ausdruck. Die von mir begangene Ungenauigkeit besteht nun darin, dass ich bei der Bestimmung von $\Sigma\Delta t$ im Zähler den Factor $1+\frac{pc}{\Pi}$ gleich 1 gesetzt, also ausser Acht gelassen habe, dass bei Beobachtung der Abkühlung v' der Wasserwerth des Calorimeters nicht Π, sondern $\Pi+pc$ ist. Ausserdem habe ich früher die Aenderung der strahlenden Oberfläche nicht beachtet. Wie man sieht, ist bis auf den Einfluss der Aenderung der Oberfläche meine frühere Berechnungsweise nur richtig, wenn die Beobachtung so geführt ist, dass $v'=0$. Eine derjenigen des Hrn. Pfaundler ähnliche Gleichung erhält man, wenn man aus dem Ausdrucke für W das pc enthaltende Glied auf die andere Seite schafft; dieselbe geht in die Pfaundler'sche über, wenn man die Beobachtung so führt, dass $v=0$ ist, wenn also die Anfangstemperatur gleich der der Umgebung ist.

Um den Einfluss der verschiedenen Umstände auf den schliesslichen Werth der berechneten specifischen Wärme kennen zu lernen, habe ich Hrn. Dr. von Reiss, der augenblicklich in meinem Laboratorium mit einer Untersuchung über die specifischen Wärmen von Flüssigkeiten beschäftigt ist, gebeten, die Correction $\Sigma\Delta t$ für eine Anzahl Versuche zu berechnen, einmal nach meiner alten ungenauen Formel, zweitens nach der richtigen Formel, drittens mit Vernachlässigung der Aenderung der Oberfläche. Bei den Versuchen, sie betrafen die specifische Wärme des Benzols, war:

$$1+\frac{pc}{\Pi}=1{,}052\,,\qquad \frac{O}{O_0}=1{,}175\,.$$

Folgende kleine Tabelle gibt die Anzahl n der Intervalle

vom Eintauchen, bis die Temperaturänderung constant wurde, die beobachteten Werthe v und v', und unter I die nach der vollständigen Formel, unter II die mit Vernachlässigung der Oberflächenänderung unter III die nach meiner alten Formel berechneten Werthe von $\Sigma \Delta t$:

Nr. des Versuches	n	v	v'	$\Sigma \Delta t$		
				I	II	III
1	8	+0,0025	+0,0155	+0,120	+0,119	+0,114
2	8	0,0000	+0,012	+0,096	+0,096	+0,091
3	10	−0,013	+0,004	+0,023	+0,026	+0,024
4	9	−0,008	+0,009	+0,068	+0,070	+0,066
5	12	−0,010	−0,0044	−0,066	−0,064	−0,062
6	10	−0,005	0,00	−0,008	−0,007	−0,007

Die Temperaturänderung des Calorimeters $t - \vartheta_0 + \Sigma \Delta t$ wird bei diesen Versuchen, je nachdem man $\Sigma \Delta t$ nimmt, nach:

Nr. des Versuchs	I	II	III	Nr. des Versuchs	I	II	III
1	2,240	2,239	2,234	4	2,958	2,960	2,956
2	2,596	2,596	2,591	5	1,344	1,346	1,348
3	3,893	3,896	3,894	6	1,192	1,193	1,193

Hiernach würde also der grösste Fehler, der durch Ausserachtlassen der Aenderung der strahlenden Oberfläche eintreten kann, etwa 0,25 Proc., der durch die Ungenauigkeit der frühern Formel bedingte etwa 0,35 Proc. betragen können, wobei die Fehler je nach den Werthen resp. Vorzeichen von v und v' bald positiv, bald negativ werden.

Da es sich nun bei der Untersuchung der specifischen Wärme des Wassers um die Erkennung der Zehntel Procent handelt, habe ich Hrn. von Münchhausen ersucht, die Correctionen für die von ihm ausgeführten Versuche nach der genauen Formel umzurechnen. Derselbe theilte mir dann mit, dass bei seinen Versuchen stets $v = o$ gewesen wäre, dass somit für seine Versuche die Werthe $\Sigma \Delta t$ im Verhältnisse von Π zu $\Pi + p$ zu vergrössern seien. Die aus den Versuchen des Hrn. von Münchhausen sich ergebenden Werthe der specifischen Wärmen des Wassers werden darnach:

Nr. der Reihe	T	t	ϑ_0	c	c_1
I	42,37	26,70	20,07	1,0058	1,0033
II	42,00	25,34	17,22	1,0076	1,0037
III	43,27	25,99	17,32	1,0077	1,0038
IV	54,02	26,47	17,76	1,0084	1,0052
V	64,25	27,11	18,66	1,0080	1,0067
VI	61,53	26,04	17,91	1,0091	1,0068

Zur Vergleichung habe ich unter c_1 die früher berechneten Werthe angegeben; der grösste Unterschied gegen früher ist bei II und III 0,39 Proc., weil eben bei den Beobachtungen $v = o$ war.

Wie man sieht, stimmen die neuberechneten Werthe nicht so gut miteinander überein, wie die früher berechneten; der Grund ist, dass die von Hrn. von Münchhausen berechneten Correctionen für die Reihen II und III erheblich grösser sind als für die Reihe I, und dass diejenige für die Reihe V beträchtlich kleiner ist als für VI. Diese grossen Unterschiede sind mir nach der Mittheilung von Münchhausen's, dass v stets gleich o gewesen sei, nicht erklärlich. Leider konnte ich die Beobachtungen v. Münchhausens, um selbst nochmals die Correctionsberechnungen zu revidiren, nicht mehr erhalten, da ich kurz nach Empfang der von ihm neu berechneten Werthe von c von der Direction der Realschule zu Nowgorod die Nachricht erhielt, dass v. Münchhausen mit Tode abgegangen sei. Bei der mir bekannten wahrhaft peinlichen Genauigkeit von Münchhausen's kann ich keinem der gefundenen Werthe vor den anderen einen Vorzug geben; benutzt man alle gleichmässig, so gibt bei Beschränkung auf eine Constante die Methode der kleinsten Quadrate für die wahre specifische Wärme die Gleichung: $k = 1 + 0{,}000\,425\,t$,
also den Temperaturcoëfficient fast genau um die Hälfte grösser wie früher.

Mit dieser Gleichung werden obige Werthe:

Reihe	beobachtet	berechnet	Reihe	beobachtet	berechnet
I	1,0058	1,0050	IV	1,0084	1,0080
II	1,0076	1,0055	V	1,0080	1,0100
III	1,0077	1,0058	VI	1,0091	1,0096

Die Zahlen deuten entschieden darauf hin, dass noch ein quadratisches Glied zur Darstellung der specifischen Wärmen erforderlich ist; wie ich indess schon früher bemerkte, halte ich die Zahlen nicht für ausreichend, dasselbe zu bestimmen.

Zur Vergleichung der sich hiernach ergebenden Veränderlichkeit der specifischen Wärme des Wassers mit den von anderen Physikern gefundenen Werthen, bemerke ich, dass der Temperaturcoëfficient sich von demjenigen, den Hr. Pfaundler aus der II. Reihe der Baumgartner'schen Versuche ableitet, 0,000 384, nur um 0,000 068 unterscheidet.

Zusatz. Ich erhalte soeben von Hrn. H. A. Rowland dessen Untersuchung über das mechanische Wärmeäquivalent freundlichst zugesandt, in welchem derselbe auch die Versuche v. Münchhausen's über die specifische Wärme des Wassers bespricht. Hr. Rowland bemerkt dort, es seien bei v. Münchhausen's Versuche keine Angaben gemacht, mit welchem Thermometer die Temperaturen bestimmt seien, es sei indess wahrscheinlich, dass sie mit einem Geissler'schen Quecksilberthermometer bestimmt seien, und in dem Falle müsste die Zunahme der specifischen Wärme viel zu gross gefunden sein.

Dem gegenüber weise ich auch auf die Bemerkung Seite 597 und 598 der Abhandlung hin: „Die Thermometer waren sorgfältigst miteinander und mit dem Luftthermometer verglichen, sodass alle späteren Angaben direct Grade des Luftthermometers bedeuten. Da die Thermometer nicht vollständig in das Wasser eintauchen konnten, wurden die Vergleichungen der Thermometer mit dem Luftthermometer so durchgeführt, dass die Quecksilberthermometer stets genau so weit eintauchten, wie sie auch bei den einzelnen Versuchen eintauchten."

Betreffs der Bemerkungen des Hrn. Rowland über die Unsicherheit der Quecksilberthermometer darf ich wohl darauf hinweisen, dass ich schon in der zweiten Auflage meiner Experimentalphysik es betont und in der dritten Auflage noch schärfer hervorgehoben habe, dass man zu genauen physikalischen Messungen kein Thermometer ge-

brauchen soll, welches nicht für die ganze Länge seiner Scala nach dem Luftthermometer graduirt ist; ich darf wohl hinzufügen, dass ich in meinem Laboratorium schon seit Jahren darauf halte, dass, wie ich oben angab, bei diesen Vergleichungen der Quecksilberthermometer mit dem Luftthermometer die Quecksilberthermometer stets genau so eingetaucht werden, wie sie bei den Versuchen eingetaucht sind, zu welchen sie benutzt werden sollen.

Bei den Versuchen v. Münchhausen's wurde diese Vergleichung nach jeder Versuchsreihe wiederholt.

Aachen, April 1880.

VI. *Ueber die specifische Wärme der Gemische von Essigsäure und Wasser; von Dr. M. A. von Reiss.*

Nach den Untersuchungen Regnault's[1]) lässt sich die specifische Wärme von Metalllegirungen aus denjenigen der Bestandtheile berechnen, die specifische Wärme ist gleich der mittlern der Bestandtheile, oder die Legirung braucht zur Erwärmung ebenso viel Wärme, wie wenn man die Bestandtheile für sich erwärmte. Dass dieses jedoch nicht für Gemische von Flüssigkeiten gilt, haben Bussy und Buignet[2]) und besonders Schüller[3]) gezeigt. Nach dem letztern ist die specifische Wärme der Gemische häufig höher als die berechnete mittlere.

Aus den Untersuchungen Regnault's[4]) geht auch hervor, dass die specifische Wärme der festen Körper mit ihrer Dichte sich ändert, und zwar mit wachsender Dichte kleiner wird. Dass für Flüssigkeiten diese Beziehung nicht all-

1) Regnault, Ann. de chim. et de phys. (3) **1.** p. 129. 1841.
2) Buignet, Comp. rend. **64.** p. 330. 1866.
3) Schüller, Pogg. Ann. **136.** p. 70. 1869, und Ergbd. **5.** p. 116. 1870.
4) Regnault, Ann. de chim. et de phys. **73.** p. 5. 1840.

gemein gilt, ergibt sich schon aus den vorliegenden Werthen der specifischen Wärmen der Salzlösungen und Flüssigkeitsgemische.

Die bekannte abnorme Aenderung der Dichte von Gemischen aus Essigsäure und Wasser schien mir geeignet, die Frage zu beantworten, ob irgend eine erkennbare Beziehung zwischen den Dichtigkeiten und specifischen Wärmen vorhanden sei. Ich habe deshalb eine grosse Anzahl solcher Gemische untersucht; dabei hat sich allerdings eine ganz eigenthümliche Beziehung zwischen der Dichte und den specifischen Wärmen dieser Gemische herausgestellt. Wenn dieselbe auch wohl keineswegs allgemein gilt, so scheint sie doch interessant genug, um die Mittheilung dieser Versuche zu rechtfertigen.

Es wurde eine Reihe von 20 Gemischen in der Art dargestellt, dass entsprechende Mengen von reiner, bei 117° siedender Essigsäure und Wasser abgewogen wurden; zur Controle wurden die Gemische dann noch titrirt. Die specifischen Wärmen dieser Flüssigkeiten wurden nach dem Kopp'schen von Wüllner modificirten Verfahren[1]) bestimmt. Um den Dampfraum möglichst klein zu machen, wurde statt des gebräuchlichen Reagensgläschens ein kleines Fläschchen mit capillarem Hals angewandt; der Hals war oben erweitert, um den Stöpsel aufnehmen zu können. Das Fläschchen wurde dann so weit mit Flüssigkeit gefüllt, dass dieselbe bei ihrer Ausdehnung nicht in den Hals steigen konnte. Zur Berechnung der Correction wegen der Wärmeabgabe an die Umgebung wurde die in Wüllner's Lehrbuch der Physik, Bd. 3. S. 400 angegebene Formel benutzt. Die Formel ist allerdings, wie Prof. Wüllner in vorstehender Notiz zeigt, nicht streng richtig; da aber bei meinen Beobachtungen in der Regel die Temperaturänderung vor dem Eintauchen das entgegengesetzte Vorzeichen hatte, als nach dem Eintauchen, so ergab sich, dass die neuen Termen der Formel sich gegenseitig compensirten, oder doch dass die nach der neuen Formel berechneten Werthe gegen die nach der

1) Wüllner, Lehrb. der Physik. 3. p. 406.

einfachern berechneten nur Abweichungen gaben, die durchaus innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler lagen.

Für die reine Essigsäure erhielt ich bei sechs Versuchen folgende Werthe, die zugleich erkennen lassen, wie weit die bei den einzelnen Versuchen erhaltenen Werthe voneinander abweichen. Der Wasserwerth des Calorimeters sammt Zubehör war bei diesen wie bei allen Versuchen gleich 85 g; das Gewicht der Essigsäure war 6,4968 g, der Wasserwerth des Fläschchens 0,8196 g. Die jedesmalige Temperatur des Quecksilberbades ist unter T, die Endtemperatur des Calorimeters unter t, und die Anfangstemperatur unter ϑ_0 angegeben, ebenso unter $\Sigma \Delta t$ das Correctionsglied.

T	t	ϑ_0	$\Sigma \Delta t$	c
60,95	19,215	17,227	+0,040	0,5100
61,20	19,284	17,225	+0,030	0,5104
60,90	19,252	17,224	+0,011	0,5120
60,95	19,358	17,368	+0,050	0,5153
61,60	20,020	18,034	+0,045	0,5129
62,30	20,222	18,228	+0,050	0,5106
Mittel 61,32	19,559	17,551		0,5118

In der folgenden Tabelle sind unter p die Gewichtstheile Essigsäure in 100 Theilen des Gemisches, unter T die Mittel der für jedes Gemisch gewählten Temperaturen des Quecksilberbades, unter t die Mittel der Endtemperaturen, unter ϑ_0 die der Anfangstemperaturen des Calorimeters, unter c die beobachteten specifischen Wärmen, als Mittel aus in der Regel vier Versuchen, und unter c_1 die aus den Bestandtheilen berechneten specifischen Wärmen angegeben. Ausserdem sind unter $\frac{c}{c_1}$ die Quotienten der beobachteten und berechneten specifischen Wärmen angegeben. Bei der Berechnung der specifischen Wärmen wurde die des Wassers gleich 1,006 gesetzt, wie ich sie aus einigen Versuchen in naher Uebereinstimmung mit denjenigen von v. Münchhausen zwischen denselben Temperaturgrenzen fand. Die Werthe von c_1 ergeben sich somit aus der Gleichung:

$$c_1 = 0{,}01\,[(100-p)\,1{,}006 + p.0{,}5118] = 0{,}01\,(100{,}6 - p.0{,}4942).$$

p	T	t	ϑ_0	c	c_1	$\frac{c}{c_1}$
93,2	61,47	16,49	14,47	0,5395	0,5455	0,989
87,8	61,00	17,69	15,58	0,5639	0,5721	0,989
85,0	60,76	21,51	19,51	0,5901	0,5859	1,007
82,0	65,76	20,12	17,57	0,6171	0,6008	1,027
77,6	62,31	18,07	15,70	0,6440	0,6226	1,034
70.3	64,84	20,02	17,40	0,6784	0,6586	1,031
67,0	60,11	17,20	14,77	0,6890	0,6749	1,021
64,5	61,42	21,24	18,92	0,6977	0,6872	1,016
62,0	65,62	21,88	19,21	0,7217	0,6996	1,032
59,0	65,53	22,34	19,15	0,7382	0,7144	1,034
56,0	62,00	20,91	18,24	0,7588	0,7292	1,040
53,0	62,36	20,88	18,16	0,7708	0,7441	1,036
50,0	61,96	21,66	18,52	0,7777	0,7588	1,025
47,0	62,75	21,32	18,56	0,7929	0,7737	1,024
38,0	62,45	21,92	19,14	0,8349	0,8182	1,021
28,1	62,87	20,49	17,43	0,8854	0,8661	1,022
19,3	62,46	20,19	17,17	0,9308	0,9106	1,022
10,8	62,79	20,89	17,31	0,9692	0,9527	1,017
5,4	63,12	20,25	16,49	0,9906	0,9793	1,011
2,7	60,72	19,84	16,35	0,9998	0,9926	1,007

Die letzte Columne vorstehender Tabelle lässt erkennen, dass die specifischen Wärmen der Gemische aus Essigsäure und Wasser gegenüber den mittlern, aus den Bestandtheilen berechneten einen höchst eigenthümlichen Verlauf haben. Für die Gemische, welche mehr als 85 Proc. Essigsäure enthalten, ist die specifische Wärme zunächst kleiner als die aus den Bestandtheilen berechnete, bei weiterem Wasserzusatz wird die specifische Wärme grösser als die berechnete und erreicht ein Maximum bei 77 Proc. Dieses Maximum entspricht dem zweiten Hydrate der Essigsäure, welches gleichzeitig unter allen Gemischen aus Essigsäure und Wasser die grösste Dichtigkeit hat. Bei Vermehrung des Wassergehaltes nähert sich die beobachtete specifische Wärme wieder der berechneten mittlern und kommt ihr am nächsten bei 65,9 Proc. Essigsäure, entsprechend dem dritten Hydrate; die Curve steigt wieder und erreicht ein zweites Maximum bei 56 Proc. in der Nähe des vierten Hydrates, von wo sie allmählich gegen die gerade Linie abfällt.

Die Zunahme der specifischen Wärme gegenüber der berechneten mittlern entspricht sehr annähernd der Contraction, welche die Mischungen erfahren, wenn man von den

drei ersten Gemischen absieht, deren specifische Wärme kleiner oder fast dieselbe ist wie die berechnete mittlere. Folgende Tabelle lässt das erkennen, sie enthält die specifischen Gewichte der Mischungen bei 20° und 40° und die für 40° berechneten Contractionen, da die beobachteten specifischen Wärmen etwa der Temperatur von 40° C. entsprechen; neben den Contractionswerthen, also den Quotienten aus den wirklichen Dichten und den aus den Bestandtheilen berechneten ist nochmals die letzte Spalte der vorigen Tabelle, also die Quotienten aus der beobachteten und der aus den Bestandtheilen berechneten specifischen Wärme angeführt.

p	Dichte bei 20°	Dichte bei 40°	Contraction	$\frac{c}{c_1}$
100	1,0471	1,0248	—	—
93,2	1,0604	1,0379	1,0148	0,989
87,8	1,0647	1,0431	1,0218	0,989
85,0	1,0654	1,0446	1,0243	1,007
82,0	1,0664	1,0460	1,0267	1,027
77,6	1,0677	1,0480	1,0300	1,034
70,3	1,0666	1,0475	1,0320	1,031
67,0	1,0655	1,0470	1,0327	1,021
64,5	1,0645	1,0460	1,0326	1,016
62,0	1,0634	1,0455	1,0328	1,032
59,0	1,0618	1,0443	1,0326	1,034
56,0	1,0600	1,0430	1,0324	1,040
53,0	1,0577	1,0415	1,0319	1,036
50,0	1,0555	1,0397	1,0313	1,025
47,0	1,0536	1,0377	1,0301	1,024
38,0	1,0452	1,0306	1,0259	1,021
28,1	1,0323	1,0224	1,0211	1,022
19,3	1,0245	1,0140	1,0155	1,022
10,8	1,0166	1,0051	1,0093	1,017
5,4	1,0059	0,9986	1,0045	1,011
2,7	1,0020	0,9955	1,0023	1,007
0,0	0,9982	0,9924	—	—

Eine Vergleichung der Zahlen der beiden letzten Spalten vorstehender Tabelle zeigt, dass mit Ausnahme des Minimums in der Nähe des dritten Hydrates und des schwachen Maximums in der Nähe des vierten Hydrates für die Mischungen, welche weniger als 82 Proc. Essigsäure haben, die Contractionscoëfficienten von den Quotienten aus der wirklichen und mittlern specifischen Wärme nur um Beträge abweichen, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtungs-

fehler liegen. Abweichend von dem Verhalten der festen Körper zeigt sich demnach bei den Gemischen aus Essigsäure und Wasser im allgemeinen mit der Dichtigkeitszunahme eine dieser proportionale Zunahme der specifischen Wärmen.

In wie weit sich diese Beziehung bei andern Mischungen zeigt, müssen weitere Untersuchungen ergeben, ich bemerke nur, dass die specifischen Wärmen der Alkoholwassermischungen eine sehr viel erheblichere Vergrösserung der specifischen Wärmen zeigen, dass indess, worauf schon Schüller hingewiesen hat, das Maximum der Vergrösserung in der Nähe des Maximums der Contraction liegt.

Physikalisches Laboratorium der technischen Hochschule zu Aachen, April 1880.

VII. *Ueber eine veränderte Form meines Beweises für das Maxwell'sche Gesetz der Energievertheilung; von Oskar Emil Meyer.*

Auf die Erläuterungen, welche ich zu meinem Beweise[1]) des Maxwell'schen Gesetzes für die Vertheilung der Energie auf eine Schar von Gastheilchen gegeben habe[2]), um ihn gegen die Angriffe des Hrn. Boltzmann[3]) zu vertheidigen, hat derselbe mit neuen Bemerkungen[4]) geantwortet, welche ich nicht unerwidert lassen will. Ehe ich jedoch auf dieselben im einzelnen eingehe, halte ich es für nöthig, den Kernpunkt des Streites nochmals hervorzuheben. Denselben bildet die von mir behauptete Eigenschaft der Maxwell'schen Function, dass bei einer endlichen Anzahl von Theilchen das Vorkommen solcher Werthe der Geschwindigkeiten, welche in Uebereinstimmung mit dem Gesetze die gegebenen Mittel-

1) Meyer, Kinetische Theorie der Gase. p. 259 ff. Breslau 1877.
2) Meyer, Wied. Ann. 7. p. 317. 1879.
3) Boltzmann, Wien. Ber. 76. Abth. 2. Oct. 1877.
4) Boltzmann, Wied. Ann. 8. p. 653. 1879.

werthe der Geschwindigkeit und der Energie liefern, ein Maximum der Wahrscheinlichkeit besitze. Hr. Boltzmann bestreitet nicht allein die Richtigkeit dieser Auffassung, sondern erklärt es auch für nicht zulässig und für unmöglich, aus der Voraussetzung jener Eigenschaft den Beweis des Maxwell'schen Gesetzes zu führen. Ich will deshalb zunächst eine neue Form dieses Beweises mittheilen, welche auf einem etwas andern, von den Einwendungen des Hrn. Boltzmann unberührten Wege zum Ziele führt; doch ist die Grundlage, auf welcher der Beweis beruht, dieselbe geblieben; nur zeigt sich der Unterschied, dass es jetzt nicht nöthig erscheint, die Voraussetzung in derselben Allgemeinheit wie früher einzuführen, sondern dass es möglich wird, die Hypothese einigermassen einzuschränken.

Nach Mittheilung dieses veränderten Beweises werde ich dann auf die Einwendungen, welche Hr. Boltzmann erhoben hat, näher eingehen.

Es sei eine unbegrenzte Schar von Gastheilchen gegeben, in welcher der Gleichgewichtszustand der Energievertheilung bereits eingetreten ist. Derselbe sei so beschaffen, dass der mittlere Werth der kinetischen Energie eines Theilchens der gegebenen Grösse E gleich komme; ferner seien a, b, c die Componenten der Geschwindigkeit, mit welcher das Gas als Ganzes sich fortbewegt, oder mit anderen Worten, es seien a, b, c die gegebenen Mittelwerthe der Componenten u, v, w der molecularen Geschwindigkeit. Aus dieser Schar werde eine Anzahl von N Theilchen, eins nach dem andern, herausgegriffen. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, bei einem dieser Griffe ein Theilchen mit den Werthen u, v, w der Geschwindigkeiten zu erhaschen, mit $F(u, v, w)$. Nennen wir nun die Componenten des zuerst gegriffenen Theilchens u_1, v_1, w_1, die des zweiten u_2, v_2, w_2 u. s. f., so erhalten wir als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir gerade diese Werthe in dieser Reihenfolge treffen, das Product:

$$P = F(u_1, v_1, w_1)\, F(u_2, v_2, w_2) \ldots\ F(u_N, v_N, w_N).$$

Ueber dieses Product mache ich eine der früheren ähnliche Voraussetzung, welche ich zur Grundlage meines Beweises wähle. Ich habe früher angenommen, dass das Product ein Maximum seines Werthes erreiche, wenn die angetroffenen Werthe der Componenten den vier Bedingungsgleichungen:

$$NE = \tfrac{1}{2}\Sigma m\,(u_n^2 + v_n^2 + w_n^2)$$
$$Na = \Sigma u_n, \qquad Nb = \Sigma v_n, \qquad Nc = \Sigma w_n$$

genügen, wo m die Masse eines Theilchens bedeutet; ich habe also angenommenen, dass unter allen denkbaren Möglichkeiten die grösste Wahrscheinlichkeit demjenigen Falle oder auch denjenigen Fällen zukomme, bei welchen die Werthe so zusammentreffen, dass in dem herausgegriffenen Theile des Gases derselbe mittlere Zustand der Bewegung und der Energie gefunden wird, wie er in der gesammten Masse bestand. Statt dieser sehr allgemein gehaltenen Hypothese will ich nun, um jedem Einwande zu begegnen, die Annahme dahin beschränken, dass ich dem soeben charakterisirten besonderen Falle nicht mehr die grösste Wahrscheinlichkeit unter allen Möglichkeiten zuschreibe; sondern ich will nur voraussetzen, dass die Wahrscheinlichkeit eines solchen Falles grösser sei als die eines Falles, in welchem alle N Theilchen eine Vermehrung oder Verminderung ihrer Bewegung um eine Geschwindigkeit von gleicher Grösse und gleicher Richtung erfahren haben. Meine jetzige Annahme besteht demnach darin, dass das Product P in dem Falle, dass die 3 N Grössen u_n, v_n, w_n den obigen vier Bedingungsgleichungen genügen, einen grössern Werth besitzen solle, als wenn alle u_n um den gleichen Betrag vermehrt oder vermindert werden; ebenso, wenn alle v_n, oder wenn alle w_n um gleiche Grössen vergrössert oder verkleinert werden. Es wird also, wenn wir den constanten Zuwachs als Differential auffassen, gefordert, dass:

$$F(u_1 + du, v_1, w_1) \ldots F(u_N + du, v_N, w_N) < F(u_1, v_1, w_1) \ldots F(u_N, v_N, w_N)$$
$$F(u_1, v_1 + dv, w_1) \ldots F(u_N, v_N + dv, w_N) < F(u_1, v_1, w_1) \ldots F(u_N, v_N, w_N$$
$$F(u_1, v_1, w_1 + dw) \ldots F(u_N, v_N, w_N + dw) < F(u_1, v_1, w_1) \ldots F(u_N, v_N, w_N)$$

sein solle; hieraus folgt, dass:

$$0 = \Sigma \frac{d \log F(u_n, v_n, w_n)}{d u_n}, \qquad 0 = \Sigma \frac{d \log F(u_n, v_n, w_n)}{d v_n},$$

$$0 = \Sigma \frac{d \log F(u_n, v_n, w_n)}{d w_n}$$

sein muss, wenn in diesen Gleichungen den variabeln Grössen nacheinander die Werthe $u_1, v_1, w_1, \ldots u_N, v_N, w_N$, welche zusammen die vier Bedingungsgleichungen erfüllen, ertheilt werden, und darauf die N Differentialquotienten addirt werden.

Nun aber gibt es unendlich viele verschiedene Systeme von Werthen, durch welche die vier Bedingungsgleichungen aufgelöst werden; denn wir können bei ganz beliebiger Verfügung über die Werthe von $3N-4$ der $3N$ Grössen u_n, v_n, w_n immer noch den vier Gleichungen durch zweckmässige Bestimmung der Werthe der vier letzten Grössen genügen. Jedes dieser unendlich vielen Werthsysteme muss auch die Summe der logarithmischen Differentialquotienten von F verschwinden machen, ohne dass es nöthig wäre, über den Werth einer weiteren der $3N$ Grössen zu verfügen.

Es ist nur eine Wiederholung desselben Gedankens, wenn ich sage, dass wir $3N-4$ der Grössen u_n, v_n, w_n als willkürlich veränderlich und die vier übrigen als Functionen der anderen ansehen dürfen; werden diese vier Grössen nach den vier Bedingungsgleichungen bestimmt, so hat die Function F immer die Eigenschaft, dass die Summen der Werthe ihres logarithmischen Differentialquotienten $= 0$ werden.

Demnach darf das Verfahren der Variation angewandt werden. Es ist auch:

$$0 = \sum \frac{d \log F(u_n + \delta u_n, v_n + \delta v_n, w_n + \delta w_n)}{d u_n} \text{ u. s. w.,}$$

wenn ebenfalls:

$$NE = \tfrac{1}{2} \Sigma m [(u_n + \delta u_n)^2 + (v_n + \delta v_n)^2 + (w_n + \delta w_n)^2]$$

$$Na = \Sigma (u_n + \delta u_n); \quad Nb = \Sigma (v_n + \delta v_n); \quad Nc = \Sigma (w_n + \delta w_n)$$

gemacht wird. Hieraus ergibt sich, dass die Variation:

$$0 = \sum \left\{ \frac{d^2 \log F}{d u_n^2} \delta u_n + \frac{d^2 \log F}{d u_n d v_n} \delta v_n + \frac{d \log F}{d u_n d w_n} \delta w_n \right\}$$

nebst zwei ähnlichen verschwindet, wenn die 3 N Variationen δu_n, δv_n, δw_n an die vier Bedingungen gebunden sind:

$$0 = \Sigma m (u_n \delta u_n + v_n \delta v_n + w_n \delta w_n)$$
$$0 = \Sigma \delta u_n , \quad 0 = \Sigma \delta v_n , \quad 0 = \Sigma \delta w_n .$$

Eliminiren wir mittelst der letzten vier Gleichungen vier der 3 N Variationen aus der vorhergehenden Gleichung, so enthält dieselbe nur die $3N-4$ übrig bleibenden, welche wir als vollkommen willkürliche Grössen ansehen dürfen. Die Gleichung zerfällt demnach in $3N-4$ unabhängige Gleichungen.

Um diese Elimination auszuführen, addire ich die vier letzten Gleichungen zur Hauptgleichung, nachdem ich sie multiplicirt habe mit den Factoren A, α, α_1, α_2, welche ich so bestimme, dass aus der Summe vier der Variationen fortfallen. Der Rest liefert dann $3N-4$ Gleichungen, welche mit den vier die Constanten A, α, α_1, α_2 bestimmenden Relationen zusammen 3 N Gleichungen von der Form:

$$0 = \frac{d^2 \log F}{du_n^2} + Amu_n + \alpha$$
$$0 = \frac{d^2 \log F}{du_n dv_n} + Amv_n + \alpha_1$$
$$0 = \frac{d^2 \log F}{du_n dw_n} + Amw_n + \alpha_2$$

darstellen. Entsprechende Gleichungen erhalten wir durch gleiche Behandlung des zweiten und dritten Differentialquotienten:

$$0 = \frac{d^2 \log F}{dv_n du_n} + Bmu_n + \beta \text{ u. s. f.},$$

in denen B, β u. s. w. wie A und die α constant sind. Doch können diese Gleichungen nur dann nebeneinander bestehen, wenn die durch grosse Buchstaben bezeichneten Constanten A, B ... verschwinden. Somit ergibt sich, dass die zweiten Differentialquotienten von $\log F$ sämmtlich constante Grössen sind; und zwar gilt diese Bemerkung wegen der Willkürlichkeit der u_n, v_n, w_n allgemein für jeden Werth der Argumente.

Die ersten Differentialquotienten derselben Grösse sind

also lineare Functionen, und zwar müssen wir diese nach dem Schema:

$$\frac{d \log F}{d u_n} = -\alpha (u_n - a) - \alpha_1 (v_n - b) - \alpha_2 (w_n - c),$$

wo a, b, c wie früher die Mittelwerthe bedeuten, ansetzen, weil die Summe die Eigenschaft haben muss, zu verschwinden, wenn die obigen Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Diese Gleichungen gelten, wie die früheren, identisch für jeden beliebigen Werth der u_n, v_n, w_n; wir können also die Indices fortlassen. Ferner erkennt man, dass die Coëfficienten, weil die Coordinatenrichtungen in Bezug auf die nach Abzug der allgemeinen fortschreitenden Bewegungen a, b, c übrig bleibenden calorischen Molecularbewegungen $u - a$, $v - b$, $w - c$ unterschiedslos sind, in folgender Beziehung zu einander stehen müssen:

$$\frac{d \log F}{d u} = -2 k m (u - a) - l m (v - b) - l m (w - c)$$

$$\frac{d \log F}{d v} = -l m (u - a) - 2 k m (v - b) - l m (w - c)$$

$$\frac{d \log F}{d w} = -l m (u - a) - l m (v - b) - 2 k m (w - c),$$

wo k und l zwei neue Constanten sind.

Aus diesen Differentialgleichungen folgt durch Integration sofort das Maxwell'sche Gesetz, und zwar zunächst in der Form:

$$\log F(u, v, w) = \varepsilon - k m [(u-a)^2 + (v-b)^2 + (w-c)^2]$$
$$- l m [(u-a)(v-b) + (v-b)(w-c) + (w-c)(u-a)],$$

wo ε eine Constante ist. Da jedoch die Function F, als Ausdruck einer Wahrscheinlichkeit, nur Werthe zwischen 0 und 1 annehmen kann, ihr Logarithmus also stets für jeden Werth der Variabeln negativ sein muss, so erkennt man sofort, dass die Constante $l = 0$ sein muss. Schliesslich erscheint also das Gesetz Maxwell's in der Form:

$$F(u, v, w) = C e^{-k m [(u-a)^2 + (v-b)^2 + (w-c)^2]},$$

wo C eine Constante ist, welche durch k und mit dieser Grösse aus dem Mittelwerthe E der Energie zu bestimmen ist.

Der Beweis dieses Gesetzes ist somit geführt auf Grund der Annahme, dass das Gesetz, welches für eine unendliche Zahl von Theilchen in unbedingter Strenge gültig ist, bei einer endlichen Anzahl das wahrscheinlichste unter anderen möglichen sei.

Da Hr. Boltzmann eine Rechnung mittheilt, welche zu beweisen scheint, dass die gefundene Function gar kein Maximum darstellt, so wird es nicht überflüssig sein, zu prüfen, ob unsere Lösung der Aufgabe die verlangte Bedingung, dass das Product P ein Maximum werde, auch wirklich erfüllt. Wir bilden deshalb aus dem gefundenen Werthe der Function F den Ausdruck des Productes:

$$P = C^N e^{-km\Sigma[(u_n-a)^2+(v_n-b)^2+(w_n-c)^2]}.$$

Man erkennt sofort, dass diese Grösse für die Werthe der Argumente, welche den Gleichungen:

$$0 = \Sigma(u_n - a), \quad 0 = \Sigma(v_n - b), \quad 0 = \Sigma(w_n - c),$$
$$0 = \Sigma\left[\tfrac{1}{2}m(u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) - E\right]$$

genügen, ein Maximum erreicht, weil sie grösser wird, als der Werth:

$$P' = C^N e^{-km\Sigma[(u_n+h-a)^2+(v_n-b)^2+w_n-c)^2]},$$

den ich für dieselbe Function erhalte, wenn ich in derselben z. B. alle u_n um dieselbe constante Grösse h von positivem oder negativem Werthe vermehre; es ist nämlich:

$$P' = Pe^{-km N h^2},$$

also $P' < P$, was zu beweisen war.

Hr. Boltzmann beweist dagegen, dass nach seinem Verfahren die Function P nicht den Charakter eines Maximums erkennen lasse, sondern dass sie eine andere ebenfalls durch das Verschwinden des ersten Differentialquotienten angezeigte Eigenschaft besitze, nämlich die Eigenschaft, dass sie sich nicht ändere, wenn von einem Werthsysteme der Variabeln, welches den vier Bedingungsgleichungen genügt, zu einem andern übergegangen werde. Diese Bemerkung ist ganz richtig; und ebenso ist es richtig, dass ich früher in

meinem Beweise die letztere Eigenschaft benutzt habe, ohne hervorzuheben, dass dieselbe im streng mathematischen Sinne nicht mehr als Maximum zu bezeichnen ist. Diese Ungenauigkeit habe ich jetzt in meiner neuen Darstellung beseitigt, indem ich die beiden Arten, in welchen die Veränderung der Function P vor sich gehen kann, durch die Bezeichnungen der Variations- und der Differentialrechnung unterschieden habe. Ich habe jedoch auch früher damit keineswegs einen Fehler begangen, schon deshalb nicht, weil ich die Bedingung, dass der zweite Differentialquotient negativ sein solle, gar nicht, vielmehr nur die andere Eigenschaft benutzt habe, dass der erste Differentialquotient verschwinde.

Aber auch mein formell ungenauer Ausdruck ist sachlich zu rechtfertigen. Mein Verfahren bestand nicht darin, die einzelnen Punkte, an denen ein Maximum eintritt, aufzusuchen, sondern die vorgenommene Variation hatte, um mich eines geometrischen Ausdruckes zu bedienen, die Bedeutung, dass längs einer Maximumlinie fortgeschritten wurde. Der Streit über das Maximum, welcher sich zwischen Hrn. Boltzmann und mir erhoben hat, lässt sich hiernach nicht treffender charakterisiren als durch ein Gleichniss. Ein Wanderer gehe längs der Kammhöhe eines Gebirgszuges, welcher von keinem hervorragenden Gipfel unterbrochen wird; es ist unbestreitbar mathematisch richtig, dass die horizontale geradlinige Bahn kein Maximum besitzt; und doch befindet sich der Mann stets auf der höchsten Höhe des Gebirges.

Hr. Boltzmann wirft mir ferner vor, dass ich den mathematischen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier oder mehrerer Werthe der molecularen Geschwindigkeit bei den herausgegriffenen Theilchen unrichtig gebildet haben soll. Auf die neue Darstellung passt dieser Tadel gewiss nicht mehr; ich hoffe vielmehr, dass aus derselben zu erkennen sein wird, dass meinen Formeln nicht derjenige Sinn unterzulegen ist, welchen Hr. Boltzmann in ihnen sucht. Sein Missverständniss meiner Absicht ist daraus entstanden, dass ich an einer

Stelle des Textes meines Buches, und zwar auf p. 262, Ausdrücke gebraucht habe, welche falsch aufgefasst werden können. Wenn dort von einem und dem anderen Theilchen die Rede ist, so ist dies strenger so zu verstehen, als sei von dem ersten und dem zweiten gesprochen. In die Formeln ist diese Ungenauigkeit nicht übergegangen. Nachsichtige Leser werden dieselbe hoffentlich gern entschuldigen; denn, wenn auf p. 260 ganz unten bestimmt wird, dass die Geschwindigkeitscomponenten des $n$ten Theilchens u_n, v_n, w_n seien, so wird es kaum als unerlässlich nothwendig gefordert werden, anderthalb Seiten weiter die Möglichkeit des Falles auszuschliessen, dass das erste Theilchen die Componenten u_2, v_2, w_2 besitze, während das zweite die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 habe.

Breslau, Februar 1880.

VIII. *Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten; von H. F. Weber.*

(Fortsetzung von p. 129.)

II. Resultate der benutzten Versuchsmethode.

1. Nachdem der Werth dieser Hülfsgrösse h_1 ermittelt worden war, konnte zur Bestimmung des innern Wärmeleitungsvermögens der verschiedenen Flüssigkeiten geschritten werden. Die Herstellung der Flüssigkeitslamelle, deren Wärmeleitung untersucht werden sollte, geschah in folgender Weise. Auf die genau horizontal gestellte, gut plan abgeschliffene untere Kupferplatte von 16,03 cm Durchmesser und ca. 0,5 cm Dicke wurden drei genau gleich dicke, 0,231 cm dicke, Glasstückchen von 2 mm Breite und 3 mm Länge gelegt; auf diese drei Glasstückchen wurde die obere, auf ihrer untern Fläche möglichst plan geschliffene Kupferplatte von genau demselben Durchmesser, 16,03 cm, aufgesetzt. In der Mitte der obern Kupferplatte war eine etwa 1 mm weite, nach oben etwas erweiterte Durchbohrung an-

gebracht, durch welche mittelst einer eng ausgezogenen Glasröhre die zu untersuchende Flüssigkeit zwischen die Platten gefüllt wurde. Während des Füllens wurde dafür Sorge getragen, dass alle Luft aus dem Zwischenraume beider Platten durch die Flüssigkeit verdrängt wurde, und die Zufuhr an Flüssigkeit wurde unterbrochen, sowie sich die Flüssigkeit rings an den Plattenrändern mit einem ca. 1 mm dicken, regelmässig gekrümmten Bauche herausdrängte. Die zäheren Flüssigkeiten, wie Wasser, Salzlösungen, Oele, Glycerin, wurden durch die Capillarkräfte so fest an den Plattenrändern gehalten, dass dieselbe Füllung beliebig viele Male zu Versuchen benutzt werden konnte. Gewöhnlich wurde die Füllung nach je drei Versuchen wieder erneuert.

Die durch die Wärmeleitung allmählich erfolgende Abnahme der Temperatur der Flüssigkeitslamelle hatte natürlich eine geringe Contraction derselben zur Folge. Durch diese Contraction zog sich die Ausbauchung der Flüssigkeitslamelle allmählich zurück und ging gegen das Ende des Versuches in eine geringe Einbauchung an den Plattenrändern über. Beim Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Weite der Ausbauchung so gross gewählt, dass die nach erfolgter Abkühlung stattfindende Einbauchung von nahezu gleicher Grösse war. Die Existenz dieser geringen Aus-, resp. Einbauchung der Flüssigkeitslamelle ändert natürlich an den Resultaten der Rechnung, die darauf keine Rücksicht nahm, nur äusserst wenig, da ja die Flächengrösse F, durch welche die Wärmeleitung vor sich geht, mehr als 200 qcm umfasst.

Zur Untersuchung der sehr leichtflüssigen und rasch verdampfenden Flüssigkeiten, wie Aether, Schwefelkohlenstoff, Benzin u. s. w. wurde die Herrichtung der Lamelle in etwas anderer Weise vorgenommen. Auf dieselbe untere Kupferplatte wurde ein sehr dünner, nur 0,75 mm dicker, ca. 2 cm hoher Glasring von genau demselben Durchmesser 16,03 cm mit Gummi aufgekittet. Der Durchmesser der obern Kupferplatte war so weit verkleinert worden (bis auf 15,90 cm), dass dieselbe bequem in diesen Ring eingesetzt, resp. herausgenommen werden konnte. Nachdem die drei oben erwähnten Glasstückchen auf die untere Kupferplatte gelegt worden

waren, wurde die obere Kupferplatte vorsichtig in den Glasring eingesetzt und sodann die zu untersuchende Flüssigkeit in langsamer Strömung so lange in den Zwischenraum zwischen beiden Platten eingefüllt, bis alle Luft verdrängt war. Hierauf wurde noch so viel Flüssigkeit nachgefüllt, dass der sehr enge Zwischenraum zwischen der Mantelfläche der obern Kupferplatte und der innern Fläche des dünnen Glascylinders bis zum vierten Theile seiner Höhe gefüllt wurde, damit trotz der geringen Contraction, die durch die allmähliche Abkühlung der Flüssigkeitslamelle während des Versuchs in letzterer eintreten musste, der Zwischenraum zwischen beiden Platten stets vollständig mit Flüssigkeit erfüllt blieb.

Nach der Füllung überliess man das Plattensystem eine Zeit lang der Zimmertemperatur und beobachtete während dieser Zeit die Ruhelage des Galvanometermagnets zehn Minuten hindurch von Minute zu Minute. Es wurde nur dann zur Ausführung einer Beobachtungsreihe geschritten, wenn die Aenderungen der magnetischen Declination in gleichen Zeitlängen nahezu gleich gross waren. Grössere Aenderungen der Ruhelage des Galvanometermagnets während einer Minute als $1{,}2$ Scalentheil kamen im Laufe aller Versuchsreihen nicht vor. War die Ruhelage des Galvanometermagnets und ihre Aenderung pro Minute hinreichend sicher fest gelegt, so wurde das Plattensystem an einer über Rollen laufenden Schnur vorsichtig auf eine rasch untergeschobene, planparellel geschliffene und horizontal gestellte Eisplatte herabgelassen und sofort mit einer dauernd auf 0^0 abgekühlten hohlen cylindrischen Kappe aus Kupferblech überdeckt. Zwei Minuten später wurde das Thermoelement, dessen eine Löthstelle, wie schon oben erwähnt wurde, permanent in Eis gehalten wurde, in den Galvanometerkreis eingeschaltet, und nach Ablauf weiterer 20 Secunden begannen die Ablesungen der Ablenkungen des Galvanometermagnets. Für die besseren Wärmeleiter, wie Wasser, Salzlösungen u. s. w., wurden diese Ablesungen mit dem Schlage jeder zehnten Secunde, für die schlechteren Wärmeleiter, wie Alkohol, Benzin u. s. w., mit dem Schlage jeder fünfzehnten oder zwanzigsten Secunde

vorgenommen. War die Ablenkung des Galvanometermagnets auf ca. 100 Scalentheile herabgesunken, was nach vier bis acht Minuten eintrat, so wurde die Versuchsreihe abgebrochen, der Galvanometerkreis geöffnet, die neue Ruhelage des Magnets bestimmt und die minutliche Aenderung dieser Ruhelage während weiterer zehn Minuten beobachtet. Mit Hülfe der Annahme, dass die während der Versuchsreihe stattgefundene minutliche Aenderung der Ruhelage gleich dem Mittel aus der vor und aus der nach der Versuchsreihe constatirten minutlichen Aenderung war (eine Annahme, die in Anbetracht des kurzen, zwischen den Beobachtungen der Ruhelagen liegenden Zeitintervalls von sechs bis zehn Minuten ganz unbedenklich ist), liess sich für jeden Zeitmoment der Ablesungen der Magnetablenkungen die zugehörige Ruhelage herausrechnen.

Zur Veranschaulichung der Leistungsfähigkeit der benutzten Methode mögen jetzt die vollständigen Protocolle von drei Versuchsreihen folgen. Die erste Versuchsreihe ist die erste, die ich an dem besten nichtmetallischen flüssigen Wärmeleiter, an Wasser, ausgeführt habe; die zweite ist die erste Versuchsreihe, die an Glycerin, einer Flüssigkeit von mittlerem Wärmeleitungsvermögen ausgeführt wurde; die letzte Tabelle enthält die letzte Versuchsreihe, die ich mit dem schlechtesten nichtmetallischen flüssigen Wärmeleiter, mit Benzin, unternommen habe.

Die erste Spalte in jeder dieser drei Tabellen enthält die Beobachtungszeit. Die zweite Spalte gibt die Ablenkung x des Galvanometermagnets (in Millimetern ausgedrückt und bereits auf Bogen reducirt), die dritte Spalte liefert die der Ablenkung x entsprechende Temperatur u der obern Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle, die vierte Spalte enthält die gewöhnlichen Logarithmen der Ablenkungen, und die fünfte Spalte gibt die Differenzen der Logarithmen je zweier Ablenkungen, die um die Zeiteinheit, die Minute, voneinander abstehen.

Wärmeleitung des Wassers.

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$
3h 2′ 0″	266,5	15,59	2,42570	0,16611
10	251,3	14,69	2,40019	0,16567
20	235,4	13,76	2,37181	0,16579
30	219,9	12,86	2,34223	0,16354
40	207,3	12,12	2,31660	0,16248
50	193,6	11,32	2,28691	0,16208
3′ 0″	181,8	10,63	2,25959	0,16197
10	171,6	10,04	2,23452	0,16337
20	160,7	9,41	2,20602	0,16031
30	150,9	8,76	2,17869	0,15916
40	142,6	8,34	2,15412	0,16024
50	133,3	7,80	2,12483	0,15822
4′ 0″	125,2	7,33	2,09760	0,15609
10	117,8	6,89	2,07115	0,15628
20	111,1	6,49	2,04571	0,15529
30	104,6	6,12	2,01953	0,15265
40	98,6	5,76	1,99388	0,15502
50	92,6	5,41	1,96661	0,15571
5′ 0″	87,4	5,14	1,94151	0,15618
10	82,2	4,78	1,91487	—
20	77,7	4,54	1,89042	—
30	73,6	4,30	1,86688	—
40	69,0	4,04	1,83886	—
50	64,7	3,80	1,81090	—
6′ 0″	61,0	3,56	1,78538	—

Wäre der Werth des Quotienten $\frac{k}{\varrho c}$ beim Wasser eine von der Temperatur unabhängige Grösse, so müssten die in der letzten Spalte stehenden Differenzen durch die ganze Beobachtungsreihe constant bleiben. Dieses ist durchaus nicht der Fall; die Werthe dieser Differenzen sinken stetig mit abnehmender Temperatur. Die Mittelwerthe dieser Differenzen während der beiden ersten, der beiden mittleren und der beiden letzten Temperaturen sind z. B.:

0,16428, 0,16054 und 0,15524.

Diese Aenderungen des Quotienten $\frac{k}{\varrho c}$ sind so beträchtlich und haben eine solche Richtung, dass sie aus einer Variation des Werthes ϱc, d. h. der specifischen Wärme der Volumeneinheit nicht erklärt werden können; denn diese letztere Grösse wächst mit steigender Temperatur und der Coëfficient der Zunahme für 1° C. ist für das benutzte Tem-

peraturintervall höchstens von der Ordnung 0,0005. Schon diese erste Beobachtungsreihe legt also die Thatsache auf das evidenteste dar, dass die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers mit steigender Temperatur zunimmt und zwar ganz erheblich zunimmt.

Diese erste für Wasser ausgeführte Versuchsreihe ist die unregelmässigste von allen, die ich ausgeführt habe. In allen später ausgeführten änderten sich die Differenzen der letzten Spalte bei weitem regelmässiger. Die in dieser ersten Versuchsreihe vorhandenen Sprünge in den Differenzen der letzten Spalte rühren unzweifelhaft von kleinen, unregelmässigen Schwankungen der Ruhelage des Galvanometermagnets her, die nicht controlirt werden konnten. Die der Physik im eidgenössischen Polytechnikum zugewiesenen Räume sind leider so gelegen und von solcher Beschaffenheit, dass kleine, unregelmässige Schwankungen der Ruhelage eines fein gestellten Galvanometermagnets nicht verhindert werden können. In anderen, speciell für physikalische Zwecke eingerichteten Instituten wird man die benutzte Methode viel besser auswerthen können, als mir es in unseren, auch den bescheidensten physikalischen Forderungen kaum genügenden Räumlichkeiten möglich war.

Auch aus den folgenden Versuchsreihen über die Wärmeleitung im Glycerin und Benzin lassen sich dieselben Folgerungen ziehen, die soeben für die Wärmeleitung im Wasser aus der zuerst angeführten Versuchsreihe gezogen worden sind.

Wärmeleitung des Glycerins.

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$
4h 16′ 0″	325,5	19,49°	2,51255	0,08832
10	315,2	18,87	2,49859	0,09001
20	304,0	18,20	2,48287	0,08982
30	294,2	17,62	2,46864	0,08933
40	284,2	17,02	2,45362	0,08982
50	275,0	16,47	2,43933	0,09025
17′ 0″	265,6	15,90	2,42423	0,08938
10	256,2	15,34	2,40858	0,08843
20	247,2	14,80	2,39305	0,08770
30	239,5	14,34	2,37931	0,08839
40	231,1	13,84	2,36380	0,08826
50	223,4	13,38	2,34908	0,08710

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$
18′ 0″	216,2	12,94°	2,33485	0,08762
10	209,0	12,51	2,32015	0,08715
20	202,0	12,09	2,30535	0,08708
30	195,4	11,70	2,29092	0,08707
40	188,6	11,29	2,27554	0,08633
50	182,8	10,95	2,26198	0,08676
19′ 0″	176,7	10,58	2,24723	0,08676
10	171,0	10,24	2,23300	—
20	165,3	9,90	2,21827	—
30	159,9	9,57	2,20385	—
40	154,6	9,26	2,18921	—
50	149,7	8,97	2,17522	—
20′ 0″	144,7	8,66	2,16047	—

Die Mittelwerthe der Differenzen der letzten Spalte für die beiden ersten, die beiden mittleren und die beiden letzten Minuten sind:

0,08959, 0,08821 und 0,08697.

Wärmeleitung des Benzins.

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$
7h 3′ 0″	223,4	14,41°	2,34908	0,05023
20	215,0	13,87	2,33244	0,05027
40	206,8	13,34	2,31555	0,05002
4′ 0″	199,0	12,26	2,29885	0,04965
20	191,5	12,35	2,28217	0,04917
40	184,3	11,89	2,26553	0,04857
5′ 0″	177,5	11,45	2,24920	0,04808
20	171,0	11,03	2,23300	0,04774
40	164,8	10,63	2,21696	0,04729
6′ 0″	158,9	10,25	2,20112	0,04700
20	153,2	9,88	2,18526	0,04696
40	147,8	9,54	2,16967	0,04713
7′ 0″	142,6	9,20	2,15412	0,04759
20	137,5	8,87	2,13830	0,04698
40	132,6	8,56	2,12254	0,04626
8′ 0″	127,8	8,24	2,10653	0,04508
20	123,4	7,96	2,09132	—
40	119,2	7,69	2,07628	—
9′ 0″	115,2	7,43	2,06145	—

Die Mittelwerthe der Differenzen der letzten Spalte für das erste, das zweite und das letzte Drittel der Beobachtungsreihe sind:

0,04987, 0,04778 und 0,04667.

Eine ähnlich grosse Abnahme der Differenz der Logarithmen je zweier um eine Zeitminute abstehender Aus-

schläge des Galvanometermagnets zeigte sich im Verlaufe jeder Beobachtungsreihe und bei allen untersuchten Flüssigkeiten. Die Wärmeleitungsfähigkeit der 14 untersuchten Flüssigkeiten nimmt daher mit steigender Temperatur so erheblich zu, dass dieses Factum schon aus einer Versuchsreihe, die sich nur über ein Temperaturintervall von circa 10° hin erstreckt, in der ausgeprägtesten Weise hervortritt.

Die Annahme, die wir oben zur Entwicklung der Theorie der Versuche gemacht haben, die Wärmeleitungsfähigkeit k der Flüssigkeiten ist eine Constante, bestätigt sich also nicht. Es wäre daher jetzt nothwendig, die Theorie der ausgeführten Versuche auf Grund der Annahme zu entwickeln, dass die innere Wärmeleitungsfähigkeit k der Flüssigkeiten ebenso wie die Dichte und die specifische Wärme eine Function der Temperatur, etwa in erster Annäherung eine lineare Function der Temperatur ist. Ich habe versucht, die Theorie auf Grund dieser Annahme in möglichster Strenge zu entwickeln, bin aber bei der Ausführung der Rechnung auf Schwierigkeiten gestossen, die ich bis jetzt nicht vollkommen zu meiner Zufriedenheit heben konnte.

Ich begnüge mich daher vorläufig mit einer ersten Annäherung: ich berechne das Wärmeleitungsvermögen aus den Mittelwerthen der Differenzen der Logarithmen der um die Zeiteinheit voneinander abstehenden Galvanometerausschläge und sehe in diesem Werthe einen sehr angenähert richtigen Mittelwerth des Wärmeleitungsvermögens, welcher einer Temperatur entspricht, die gleichkommt der mittleren Temperatur der Flüssigkeitslamelle.

Die folgenden Tabellen enthalten die Resultate von 89 Versuchsreihen, die ich an 14 verschiedenen nichtmetallischen Flüssigkeiten und für nahezu dieselbe mittlere Temperatur ausgeführt habe. Die Reihenfolge der untersuchten Flüssigkeiten ist nach der Intensität des Wärmeleitungsvermögens geordnet, und zwar beginnt die Reihe mit dem besten flüssigen nichtmetallischen Wärmeleiter, dem Wasser. Unter dem Namen der untersuchten Flüssigkeit befinden sich diejenigen Werthe, welche die Dichte ϱ und die specifische Wärme c derselben für die benutzte mittlere Ver-

suchstemperatur besitzen. Darauf folgen die Mittelwerthe der Differenzen der gewöhnlichen Logarithmen der um eine Zeitminute voneinander abstehenden Galvanometerausschläge und die zugehörige Mitteltemperatur der Flüssigkeitslamelle. Daran reiht sich der allgemeine Mittelwerth dieser Differenz und der dazu gehörige allgemeine Mittelwerth der Lamellentemperatur, und daran schliesst sich endlich der aus diesem allgemeinen Mittelwerthe berechnete Mittelwerth des Wärmeleitungsvermögens der Flüssigkeit an. Diese letztere Grösse wurde nach der früher besprochenen Weise mittelst der Daten berechnet:

$\Delta = 0{,}231$ cm	$\varrho_1 = 8{,}865$	$h_1 = 0{,}0057$
$\Delta_1 = 1{,}023$ cm	$c_1 = 0{,}0932$	$\frac{F_1}{F} = 1{,}252$

Wasser.		Kupfervitriollösung.	
$\varrho = 1{,}000$		$\varrho = 1{,}160$	
$c = 1{,}000$		$c = 0{,}848$	
0,15786	4,1°	0,14931	4,5°
0,15428	4,2	0,14762	4,2
0,15537	4,1	0,15030	4,3
0,15415	4,2	0,14961	4,7
0,15738	4,3	0,14884	4,4
0,15736	4,0	0,14743	4,2
0,15521	4,1	0,14780	4,6
0,15810	4,2		
0,15677	4,0	0,14870	4,4°
0,15521	4,1	$k = 0{,}0710$	
0,15619	4,1°		
$k = 0{,}0745$			

In dem Falle der Wärmeleitung des Wassers ist allerdings das Auftreten von Flüssigkeitsströmungen infolge von Dichtigkeitsunterschieden nicht vollständig durch die Versuchsanordnung ausgeschlossen. Die anomale Variation der Dichte des Wassers zwischen 0° und 8° lässt in den unteren Partien der Wasserlamelle während der ganzen Versuchsdauer und in der ganzen Dicke der Wasserlamelle während der letzten Stadien des Versuchs dichtere Schichten über weniger dichten entstehen. Es lässt sich indess sofort begreifen, dass wegen der sehr geringen Differenz der Wasserdichten zwischen 0° und 8° — dieser Unterschied beträgt

nur 0,0001 des Mittelwerths der Dichte dieses Temperaturintervalls — wegen der sehr grossen Zähigkeit des Wassers in diesen niederen Temperaturen und wegen der sehr geringen Dicke der benutzten Wasserlamelle eine irgend erhebliche Flüssigkeitsströmung nicht zu Stande kommen und mithin auch die durch Strömungen bewirkte Modification des Vorganges der Wärmeleitung nur eine ganz geringe sein kann. Dass dieses in der That der Fall ist, liess sich mit aller Schärfe experimentell darlegen. Ganz verdünnte wässerige Salzlösungen, wie äusserst schwach concentrirte Lösungen von Kochsalz und Zinkvitriol, welche keine anomale Variation der Dichte zwischen 0° und 8° besitzen, zeigten Werthe für das Wärmeleitungsvermögen, die so gut wie vollständig genau mit dem gefundenen Wärmeleitungsvermögen des Wassers übereinstimmten.

Zinkvitriollösung.		Zinkvitriollösung.		Zinkvitriollösung.		Kochsalzlösung.	
$\varrho = 1{,}134$		$\varrho = 1{,}272$		$\varrho = 1{,}362$		$\varrho = 1{,}178$	
$c = 0{,}861$		$c = 0{,}765$		$c = 0{,}706$		$c = 0{,}800$	
0,15198	4,6°	0,14551	4,7°	0,14764	4,7°	0,14671	4,3°
0,15172	4,7	0,14749	4,5	0,14533	4,5	0,14822	4,4
0,14827	4,5	0,14665	4,3	0,14377	4,6	0,14783	4,5
0,14707	4,4	0,14716	4,4	0,14544	4,5	0,14837	4,4
0,14974	4,5	0,14570	4,5	0,14511	4,4	0,14671	4,2
0,14797	4,5	0,14690	4,4	0,14442	4,5	0,14638	4,5
0,14946	4,5°	0,14650	4,5°	0,14529	4,5°	0,14737	4,4°
$k = 0{,}0711$		$k = 0{,}0698$		$k = 0{,}0691$		$k = 0{,}0692$	

Glycerin.		Alkohol.		Schwefelkohlenstoff.		Aether.	
$\varrho = 1{,}220$		$\varrho = 0{,}795$		$\varrho = 1{,}271$		$\varrho = 0{,}728$	
$c = 0{,}605$		$c = 0{,}566$		$c = 0{,}254$		$c = 0{,}520$	
0,08802	6,7°	0,06592	5,1°	0,05988	5,5°	0,05667	5,4°
0,08828	6,4	0,06651	4,9	0,05924	5,4	0,05701	5,5
0,08718	6,2	0,06607	5,2	0,05842	5,2	0,05535	5,2
0,08793	6,2	0,06631	5,3	0,05849	5,3	0,05625	5,3
0,08884	6,5	0,06670	5,4	0,05931	5,6	0,05582	5,3
0,08744	6,4	0,06542	5,3	0,05910	5,5	0,05679	5,5
0,08795	6,4°	0,06615	5,2°	0,05907	5,4°	0,05631	5,4°
$k = 0{,}0402$		$k = 0{,}0292$		$k = 0{,}0250$		$k = 0{,}0243$	

Olivenöl.		Chloroform.		Citronenöl.		Benzin.	
$\varrho = 0{,}911$		$\varrho = 1{,}485$		$\varrho = 0{,}818$		$\varrho = 0{,}701$	
$c = 0{,}471$		$c = 0{,}233$		$c = 0{,}438$		$c = 0{,}381$	
0,05412	6,8°	0,05194	6,5°	0,05057	5,4°	0,04794	5,2°
0,05505	6,7	0,05116	6,2	0,05060	5,6	0,04821	5,0
0,05390	6,8	0,05148	6,3	0,04939	5,4	0,04722	5,3
0,05401	6,5	0,05165	6,6	0,04996	5,3	0,04780	4,9
0,05435	6,5	0,05098	6,4	0,05113	5,7	0,04753	5,2
0,05471	6,6	0,05142	6,3	0,04917	5,1	0,04792	5,1
0,05436	6,6°	0,05127	6,4°	0,05001	5,4°	0,04777	5,1°
$k = 0{,}0235$		$k = 0{,}0220$		$k = 0{,}0210$		$k = 0{,}0200$	

2. Die in den vorstehenden Tabellen enthaltenen Resultate stelle ich jetzt, mit Beibehaltung derselben Reihenfolge, übersichtlich zusammen.

	k.	ϱ	c	$\gamma = \varrho . c$	$\eta = \frac{k}{\varrho c}$
Wasser	0,0745	1,000	1,000	1,000	0,0745
Kupfervitriollösung . .	0,0710	1,160	0,848	0,984	0,0722
Zinkvitriollösung I . .	0,0711	1,134	0,861	0,976	0,0729
Zinkvitriollösung II .	0,0698	1,272	0,765	0,973	0,0721
Zinkvitriollösung III .	0,0691	1,362	0,706	0,962	0,0718
Kochsalzlösung	0,0692	1,178	0,800	0,942	0,0735
Glycerin	0,0402	1,220	0,605	0,738	0,0545
Alkohol	0,0292	0,795	0,566	0,450	0,0649
Schwefelkohlenstoff . .	0,0250	1,271	0,254	0,325	0,0769
Aether	0,0243	0,728	0,520	0,378	0,0643
Olivenöl	0,0235	0,911	0,471	0,429	0,0548
Chloroform	0,0220	1,485	0,233	0,346	0,0636
Citronenöl	0,0210	0,818	0,438	0,358	0,0587
Benzin	0,0200	0,701	0,381	0,270	0,0741

Eine Vergleichung der für das Wärmeleitungsvermögen erhaltenen Werthe mit den Werthen des Products aus Dichte und specifischer Wärme, d. h. mit den Werthen der specifischen Wärme der Volumeneinheit (dieser specifischen Wärme wurde in der Tabelle das Zeichen γ beigelegt) lässt erkennen, dass die Wärmeleitungsfähigkeit ganz ausnahmslos in strengster Abhängigkeit von der specifischen Wärme der Volumeneinheit steht. Die Flüssigkeit mit der grössten specifischen Wärme der Volumeneinheit, das Wasser, hat auch das grösste Wärmeleitungsvermögen; die Flüssigkeit, welcher die kleinste specifische Wärme der Volumeneinheit zukommt, das Benzin,

zeigt auch den kleinsten Werth des Wärmeleitungsvermögens. Alle wässerigen Salzlösungen zeigen nahezu die gleiche specifische Wärme der Volumeneinheit, und zwar eine nur um einige Procente kleinere als die des Wassers, und ihre Wärmeleitungsfähigkeiten sind ebenfalls nahezu gleich gross, und zwar ebenfalls um einige Procente kleiner als die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers. Es ist deswegen der letzten Tabelle eine Columne angefügt worden, in welcher der Quotient aus dem beobachteten Wärmeleitungsvermögen k und der specifischen Wärme der Volumeneinheit γ verzeichnet ist. Die Grösse dieses Quotienten bleibt nahezu dieselbe für alle die vierzehn untersuchten Flüssigkeiten, obschon sich diese Flüssigkeiten in der extremsten Weise voneinander unterscheiden, wie z. B. der ausserordentlich leichtflüssige Schwefelkohlenstoff und die äusserst dickflüssige, stark concentrirte Lösung III von schwefelsaurem Zink.

Um einen besseren Ueberblick über den Grad der Uebereinstimmung der verschiedenen Werthe dieses Quotienten η zu geben, lasse ich in der folgenden Tabelle die verschiedenen untersuchten Flüssigkeiten in derselben Reihenfolge nacheinander folgen, in welcher sich die ihnen zugehörigen Werthe von η ordnen.

	k	γ	$\eta = \frac{k}{\gamma}$
Schwefelkohlenstoff . . .	0,0250	0,325	0,0769
Benzin	0,0200	0,270	0,0741
Wasser	0,0745	1,000	0,0745
Kupfervitriollösung	0,0710	0,984	0,0722
Zinkvitriollösung I	0,0711	0,976	0,0729
Zinkvitriollösung II . . .	0,0698	0,973	0,0721
Zinkvitriollösung III . . .	0,0691	0,962	0,0718
Kochsalzlösung	0,0692	0,942	0,0735
Alkohol	0,0292	0,450	0,0649
Aether	0,0243	0,378	0,0643
Chloroform	0,0220	0,346	0,0636
Citronenöl	0,0210	0,358	0,0587
Olivenöl	0,0235	0,429	0,0548
Glycerin	0,0402	0,738	0,0545

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass die Grösse des Wärmeleitungsvermögens der untersuchten Flüssigkeiten in erster Linie der specifischen Wärme der Volumeneinheit proportional ist. Die für Schwefelkohlenstoff, Benzin, Wasser und die fünf Salzlösungen gewonnenen Resultate lassen wohl kaum einen Zweifel an dieser Thatsache aufkommen. Zweifellos ergibt sich aber auch das weitere Factum, dass der Quotient η für ausserordentlich zähe Flüssigkeiten, wie Glycerin, Olivenöl, einen etwas kleineren Werth besitzt als für leichtflüssige Flüssigkeiten, dass also die Grösse der inneren Reibung einigen Einfluss auf die Höhe der Wärmeleitungsfähigkeit ausübt. Indess ist dieser Einfluss nur ein sehr kleiner; in den Zinkvitriollösungen I, II, III nimmt die innere Reibung mit wachsender Concentration fast bis zum zwanzigfachen Werthe der innern Reibung des Wassers zu, und es nimmt der Quotient η nur in eben noch merkbarer Weise ab; und für Glycerin, dessen innere Reibung mehr als achthundertmal so gross ist als die der leichtflüssigen Flüssigkeiten, ist der Werth von η immer noch vergleichbar mit den Werthen dieses Quotienten, den die leichtflüssigen Flüssigkeiten liefern. Ausser der Constanten der inneren Reibung scheinen noch andere Eigenschaften der Flüssigkeiten einigen Einfluss auf die Grösse des Quotienten η auszuüben; denn die drei Flüssigkeiten Alkohol, Aether und Chloroform, deren innere Reibungsconstanten mit denen von Wasser und Benzin vollkommen vergleichbar sind, zeigen etwas kleinere Werthe für η als die beiden zuletztgenannten Flüssigkeiten.

Als allgemeines Resultat der ausgeführten Untersuchungen lässt sich also hinstellen: der Werth der Wärmeleitungsfähigkeit einer Flüssigkeit lässt sich durch die Form ausdrücken:

$$k = \eta \cdot \varrho \cdot c,$$

in welcher η einen Coëfficienten bedeutet, welcher sich von Flüssigkeit zu Flüssigkeit nur wenig ändert. Weitere Untersuchungen, die in der nächsten Zeit ausgeführt werden sollen, müssen entscheiden, in welcher Abhängigkeitsform der Coëfficient η von der Constanten der inneren Reibung steht, und

welche anderen Eigenschaften der Flüssigkeiten die Grösse dieses Coëfficienten in merkbarer Weise beeinflussen.

Das Resultat, dass die Wärmeleitungsfähigkeit nichtmetallischer, durchsichtiger Flüssigkeiten der specifischen Wärme der Volumeneinheit, d. h. dem Wärmevorrath in der Volumeneinheit sehr angenähert proportional ist, und dass die innere Reibung und sonstige Eigenschaften der Flüssigkeiten nur einen kleinen, secundären Einfluss auf die Grösse des Wärmeleitungsvermögens haben, scheint mir für die noch zu begründende Theorie des flüssigen Aggregatzustandes von der hervorragendsten Wichtigkeit zu sein.

Die gefundene Thatsache, dass der Quotient $\frac{k}{\varrho c}$ eine für alle Flüssigkeiten nahezu constante Grösse ist, lässt sich noch in anderer Form ausdrücken. Die durch die Wärmeleitung bedingte Bewegung der Temperatur u innerhalb einer unbegrenzten Flüssigkeit ist durch die partielle Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\varrho c}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}.$$

Ist nun die Grösse $\frac{k}{\varrho c}$ für die verschiedenen Flüssigkeiten nahezu constant, so ist auch die Temperaturbewegung, die sich in den verschiedensten Flüssigkeiten aus derselben anfänglichen Temperaturvertheilung heraus entwickelt, angenähert genau dieselbe. Sind also z. B. die anfänglichen Temperaturvertheilungen in einer Reihe verschiedener Flüssigkeiten identisch, so gleichen sich die bestehenden Temperaturungleichheiten in allen diesen Flüssigkeiten nahezu gleich rasch aus. Führen wir für die Grösse $\frac{k}{\varrho c}$ die Bezeichnung „Temperaturleitungsfähigkeit" ein — eine Bezeichnung, die im Gebiete der Theorie der Wärmeleitung bereits von verschiedenen Physikern gebraucht wurde — so lässt sich das gefundene allgemeine Resultat am kürzesten so formuliren: **Durchsichtige, nichtmetallische Flüssigkeiten haben bei gleicher Temperatur nahezu die gleiche Temperaturleitungsfähigkeit.**

3. Wie schon oben erwähnt wurde, liess sich aus jeder der besprochenen 89 Versuchsreihen deutlich erkennen, dass

das Wärmeleitungsvermögen aller untersuchten Flüssigkeiten mit steigender Temperatur zunimmt. Um die Grösse dieser Zunahme festzustellen, habe ich das Wärmeleitungsvermögen für vier verschiedene Flüssigkeiten bei einer höheren Temperatur, bei einer mittlern Temperatur von circa 25°, nach demselben Verfahren bestimmt.

Die untere Kupferplatte wurde auf einen von vier starken Füssen getragenen, möglichst fest aufgestellten Ring von starkem Kupferblech wasserdicht aufgesetzt. Nachdem der Zwischenraum zwischen den beiden Kupferplatten mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt worden war, wurde das ganze Plattensystem auf eine constante Temperatur von nahezu 45° erwärmt. War diese Temperatur gleichmässig durch das ganze System verbreitet, so wurde von einem bestimmten Zeitmomente an der Wasserstrahl der vollständig geöffneten Wasserleitung des Laboratoriums senkrecht gegen die untere Basisfläche der unteren Kupferplatte gerichtet. Dadurch wurde die Temperatur der unteren Kupferplatte nach ausserordentlich kurzer Zeit auf die constante Temperatur U des Wassers der Wasserleitung zurückgeführt und dauernd auf dieser Temperatur erhalten, da die grosse Wassermasse (40 Liter pro Minute), die gegen die Platte sprühte, in jedem Zeitelemente die aus der Flüssigkeitslamelle der untern Platte zugeleitete Wärme vollständig fortführte. In dem Momente, in welchem die Abkühlung begann, wurde weiter über das ganze Plattensystem eine Hülle mit derselben constanten Temperatur U gestülpt. Die eine Löthstelle des zur Temperaturmessung benutzten Termoelementes war, wie früher, in der obern Kupferplatte eingelöthet, die andere Löthstelle war der constanten Temperatur U des abkühlenden Wassers ausgesetzt.

Das Beobachtungsverfahren war genau das frühere, und die zur Berechnung der Beobachtungsresultate dieser Versuchseinrichtung dienenden Formeln sind genau dieselben, wie die früher entwickelten; es bedeutet nur u nicht mehr wie früher die Temperatur der oberen Kupferplatte, sondern den Ueberschuss der Temperatur der obern Kupferplatte über die constante Temperatur U der Umgebung. Nach den früher

gegebenen Bemerkungen über das benutzte Thermoelement wird aber dieser Temperaturüberschuss u direct durch den auf Bogen reducirten Galvanometerausschlag in relativem Maasse geliefert.

Nach diesem Verfahren habe ich für Wasser, für die früher untersuchte Kochsalzlösung, für die obige Zinkvitriollösung III und für Glycerin die Wärmeleitungsfähigkeit für eine mittlere Temperatur von circa 24° bestimmt. Um auch für diese Abänderung der Versuchsmethode eine deutliche Vorstellung von der Leistungsfähigkeit der Methode geben zu können, lasse ich zunächst das volle Protokoll der für Wasser ausgeführten ersten Versuchsreihe folgen. Die Bedeutung der Zahlen der einzelnen Spalten ist genau dieselbe wie in den früher gegebenen gleichartigen Tabellen.

8h 39′ 0″	18,02°	246,9	2,39252	0,18137
15	16,31	223,5	2,34728	0,18274
30	14,58	199,8	2,30060	0,17871
45	13,17	180,4	2,25624	0,18033
40′ 0″	11,86	162,5	2,21085	0,17904
15	10,69	146,4	2,16554	0,17654
30	9,67	132,4	2,12189	0,17691
45	8,69	119,1	2,07591	0,17664
41′ 0″	7,86	107,6	2,03181	0,17872
15	7,11	97,5	1,98900	0,17475
30	6,43	88,1	1,94498	0,17339
45	5,79	79,3	1,89927	—
42′ 0″	5,20	71,3	1,85309	—
15	4,77	65,2	1,81425	—
30	4,31	59,1	1,77159	—

Hiernach war der Mittelwerth von $\frac{1}{t_{n+i}-t_n} \log\left(\frac{u_n}{u_{n+i}}\right)$ gleich 0,17741; da der mittlere Ueberschuss der Temperatur der Wasserlamelle über die Temperatur U der untern Platte gleich 4,81° war, und die Temperatur U 18,50° betrug, so entsprach dem Mittelwerthe 0,17741 eine mittlere Temperatur der Wasserlamelle gleich 23,31.

Die folgenden Tabellen geben alle die gefundenen Mittelwerthe der Grösse $\frac{1}{t_{n+i}-t_n} \log\left(\frac{u_n}{u_{n+i}}\right)$ und die zugehörigen mittleren Lamellentemperaturen. Unter jeder Tabelle stehen zunächst die resultirenden Mittelwerthe, und zuletzt folgt der Werth des Wärmeleitungsvermögens, der sich aus diesen beobachteten Mittelwerthen und aus den weiteren Daten für

M_1, c_1, h_1, F, F_1 und Δ, die wir bereits oben angegeben haben, berechnet.

Wasser		Kochsalzlösung		Zinkvitriol-lösung		Glycerin	
$\varrho = 0{,}998$	$c = 1{,}000$	$\varrho = 1{,}175$	$c = 0{,}804$	$\varrho = 1{,}358$	$c = 0{,}709$	$\varrho = 1{,}206$	$c = 0{,}613$
0,17803	23,8°	0,17061	26,3°	0,16301	23,67°	0,09435	25,4°
0,17874	23,9	0,17141	26,0	0,16342	23,51	0,09517	25,3
0,18186	23,4	0,17282	26,7	0,15976	23,00	0,09440	25,1
0,17778	23,6	0,17153	26,1	0,16365	23,60	0,09308	25,0
0,17811	23,9	0,17260	26,0	0,16412	23,42	0,09500	25,3
0,17934	23,8	0,17100	26,6	0,16279	23,44	0,09451	25,1
0,17993	23,6	0,17166	26,28	$k = 0{,}0776$		0,09440	25,20
0,17853	23,8	$k = 0{,}0809$				$k = 0{,}0433$	
0,17875	23,6						
0,17909	23,67						
$k = 0{,}0857$							

Nach den Ergebnissen aller ausgeführten Versuchsreihen ist hiernach das Wärmeleitungsvermögen für:

Wasser	$k = 0{,}0745$	für die mittlere Temperatur	4,10°
	$k = 0{,}0857$	„ „ „ „	23,67°
Kochsalzlösung	$k = 0{,}0692$	für die mittlere Temperatur	4,40°
	$k = 0{,}0809$	„ „ „ „	26,28°
Zinkvitriollösung	$k = 0{,}0691$	für die mittlere Temperatur	4,50°
	$k = 0{,}0776$	„ „ „ „	23,44°
Glycerin	$k = 0{,}0402$	für die mittlere Temperatur	6,25°
	$k = 0{,}0433$	„ „ „ „	25,20°

Nehmen wir an, das Wärmeleitungsvermögen dieser Flüssigkeiten wächst zwischen 4° und 25° in linearer Weise mit steigender Temperatur, setzen wir also $k = k_0(1 + \alpha u)$, und leiten wir die Constanten k_0 und α aus den angegebenen Beobachtungsdaten ab, so finden wir für:

Wasser:	$k_0 = 0{,}0722$	$\alpha = 0{,}00786$
Kochsalzlösung:	$k_0 = 0{,}0669$	$\alpha = 0{,}00790$
Zinkvitriollösung:	$k_0 = 0{,}0670$	$\alpha = 0{,}00670$
Glycerin:	$k_0 = 0{,}0391$	$\alpha = 0{,}00423$

Für sämmtliche dieser vier Flüssigkeiten ist der Coëfficient α dem Wärmeleitungsvermögen k_0 nahezu proportional; ob dieses auch für die übrigen Flüssigkeiten stattfindet, müssen weitere Beobachtungen entscheiden.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

IX. *Ueber anomale Dispersion im glühenden Natriumdampf; von A. Kundt.*

Die erste Beobachtung einer Anomalie in der Dispersion des Lichtes ist bekanntlich von Le Roux an Joddampf gemacht. Joddampf, der hauptsächlich nur die äussersten blauen und rothen Strahlen durchlässt, zeigt eine stärkere Brechung für die rothen als für die blauen Strahlen. Als dann von Christiansen die anomale Dispersion an Fuchsin entdeckt wurde, und ich die gleiche Erscheinung an vielen Körpern fand und die Beziehungen zwischen Dispersionsanomalien und Absorption des Lichtes und Oberflächenfarben nachwies, sprach ich in meiner dritten Mittheilung über anomale Dispersion[1]) die Vermuthung aus, dass auch die Gase, welche zuweilen so energische Absorption für gewisse Strahlengattungen besitzen, Dispersionsanomalien in der Nachbarschaft dieser Strahlengattungen zeigen müssten.

Ich fügte indessen hinzu: „Ob es aber jemals gelingen wird, die Brechungsanomalie an jedem der einzelnen Absorptionsstreifen der Gase und glühenden Dämpfe, von denen einzelne eine so grosse Anzahl von sehr schmalen Absorptionsstreifen zeigen, nachzuweisen, muss dahingestellt bleiben."

In letzter Zeit habe ich wenigstens bei einem glühenden Dampf, dem des Natriums, in der That eine Dispersionsanomalie in der Nähe derjenigen Strahlen, die dieser Dampf absorbirt und aussendet, beobachtet.

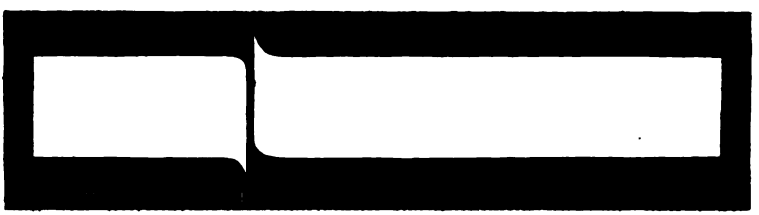
Was für den Natriumdampf gilt, wird jedenfalls bei allen anderen absorbirenden Gasen und Dämpfen statthaben und zwar für jedes einzelne Absorptionsmaximum derselben; damit ist meine frühere Vermuthung experimentell bestätigt.

Zu der Beobachtung am Natriumdampf wurde ich auf folgende Weise geführt. — Als ich mit dem Assistenten des Instituts Hrn. Dr. Kohlrausch für eine Vorlesung den bekannten Versuch der Umkehrung der hellen Natriumlinie in eine dunkle anstellte, fiel uns beiden auf, dass, wenn

[1]) Kundt, Pogg. Ann. **144.** p. 132. 1871.

der absorbirende Natriumdampf sehr dicht, und die dunkle Linie im Spectrum sehr breit war, der obere und untere Rand desselben in der Nähe der dunklen Linie eine eigenthümliche Ausbuchtung zeigte. Bei näherer Betrachtung erkannte ich bald, dass wir es mit einer Dispersionsanomalie zu thun hatten, bedingt durch die Dispersion in der kegelförmigen Natriumflamme.

Das Spectrum mit der dunklen Linie hatte auf dem Schirm, auf dem dasselbe projicirt war, die beigezeichnete



Form. Die Anordnung des Versuchs war folgende: Mittelst electrischen Lichts war durch ein Prisma mit verticaler Kante ein horizontales, sehr lichtstarkes Spectrum auf dem Schirm entworfen. In den Gang der Lichtstrahlen wurde ein Bunsen'scher Brenner gestellt und in diesen mit einem Eisenlöffelchen ein Stück Natrium gebracht. Bringt man das Löffelchen genau in die Mitte des Innern der Flamme des Bunsen'schen Brenners, so gelingt es leicht, über demselben die Flamme als einen sehr intensiv gelb leuchtenden Kegel zu erhalten. Dieser Kegel wirkt nun wie ein Prisma mit oben liegender horizontaler brechender Kante. Zeigt der glühende Natriumdampf eine Dispersion, so würde also dieser Kegel von Strahlen, die horizontal durch ihn hindurchgehen, ein (allerdings wegen der Kegelform unreines) verticales Spectrum liefern müssen. Gehen die Strahlen zugleich durch ein Glasprisma mit verticaler, und das Natriumprisma mit horizontaler brechender Kante, so erhalten wir ein Spectrum, welches, wenn im Dampf Dispersion vorhanden ist, die oben gezeichnete Form haben muss.[1]) Da die brechende Kante des Natriumprismas oben liegt, so ist der Brechungs-

1) Kundt, Pogg. Ann. **144.** p. 128–137. 1871.

exponent des Dampfes für diejenigen Strahlen der grösste, welche am meisten nach unten abgelenkt sind. Die Zeichnung zeigt, dass in Uebereinstimmung mit meinen Untersuchungen an festen Körpern und Flüssigkeiten mit Annäherung an den Absorptionsstreifen von der rothen Seite des Spectrums der Brechungsexponent sehr zunimmt, auf der grünen Seite der dunklen Linie kleiner ist als auf der andern und dann schnell wieder wächst.

Nachdem die Erscheinung einmal erkannt war, habe ich den Versuch sehr oft wiederholt, und wenn es gelingt, eine recht regelmässig conische Natriumflamme von grosser Intensität zu erhalten, so ist die Anomalie in der Brechung sehr beträchtlich. Ich habe auch, statt die Erscheinung objectiv auf einem Schirm zu entwerfen, dieselbe subjectiv mit dem Fernrohr beobachtet.

Der mitgetheilte Versuch gelingt aber nur, wenn die Intensität der Natriumflamme eine sehr grosse ist — wie sie eben durch Verbrennen von metallischem Natrium erhalten wird —, und zwar aus folgendem Grunde. Während die Natriumflamme, die man durch Einführen eines Natriumsalzes in die Flamme des Bunsen'schen Brenners erhält, spectral untersucht zwei helle Linien zeigt, die beiden *D*-Linien, ändert sich die Erscheinung, wenn man in den Brenner ein etwa erbsengrosses Stück Natrium bringt. Zuerst treten die beiden *D*-Linien deutlich auf, dann, wenn das Natrium stärker zu verdampfen beginnt, verbreitern sich diese Linien erheblich, verschmelzen bei noch grösserer Dichte des Dampfes in eine, und endlich treten gewöhnlich auf diesem breiten gelben Bande mit verwaschenen Rändern zwei feine schwarze Linien auf, entsprechend den *D*-Linien. Diese dunklen Linien sind erzeugt durch die Absorption des die helle Natriumflamme umgebenden kälteren Natriumdampfes. Die angegebenen Erscheinungen sind bereits von Hankel[1]) und Ciamician[2]) und vielleicht auch von andern beobachtet.

Entsprechend dem Emissionsvermögen der Natrium-

1) Hankel, Berichte der Leipziger Akademie, 1871. p. 307.

2) Ciamician, Wien. Ber. 78. p. 887. 1878.

flamme bei vermehrter Dichte des Dampfes, ändert sich das Absorptionsvermögen.

Während eine mit Natronsalz gefärbte Flamme, als absorbirendes Medium in den Gang der Strahlen eingeschaltet, in einem Spectrum im Gelben zwei scharfe dunkle Absorptionslinien gibt, verschmelzen bei grösserer Dichte des Dampfes diese Absorptionslinien zu einem einzigen breiten Bande mit verwaschenen Rändern. Bei dieser breiten Absorptionsbande tritt nun die Dispersionsanomalie deutlich sichtbar auf, während sie bei den schmalen Absorptionslinien jedenfalls auch vorhanden, aber nicht zu erkennen ist, da sie hier auf einen ganz ausserordentlich kleinen Bereich ganz in der Nähe der beiden Seiten jeder Absorptionslinie beschränkt bleibt.

Würde man ein wirkliches Prisma aus glühendem Natriumdampf bilden können, so würde man wohl auch schon bei geringerer Dichte des Dampfes Andeutungen von anomaler Dispersion an den schmalen Absorptionslinien beobachten können.

Meine Bemühungen, die kegelförmige Flamme durch seitlich angebrachte Platten von Glas oder Glimmer in eine prismatische zu verwandeln, führten aber zu keinem Ziel. Ebenso wenig habe ich bisher bei anderen glühenden Dämpfen Dispersionsanomalien beobachtet, indem ich Metallsalze in den Bunsen'schen Brenner brachte; die Dichte dieser Dämpfe und damit ihre Absorption ist für die von mir angewandte Beobachtungsmethode zu gering. Mit verbesserten Beobachtungsmethoden und sehr dichten Dämpfen wird man zweifellos die gleiche Erscheinung wie am Natriumdampf erhalten. —

An das Vorstehende knüpfe ich noch eine Bemerkung, die, soviel mir bekannt, noch nicht ausgesprochen ist. —

Diejenigen festen und flüssigen Substanzen, welche für gewisse Strahlenpartien starke Absorption und für benachbarte Strahlenpartien anomale Dispersion zeigen, haben, wie ich früher gezeigt habe, für dieselben Strahlenpartien ein starkes Reflexionsvermögen.[1])

Nachdem nachgewiesen ist, dass die glühenden Gase in

1) cf. auch Stokes, Pogg. Ann. **91.** p. 158. 1854, und **96.** p. 522. 1855.

der Nachbarschaft der von ihnen stark absorbirten Strahlen anomale Dispersion zeigen, wird man nach Analogie der Erfahrung bei flüssigen und festen Körpern annehmen müssen, dass die Gase auch diejenigen Strahlen, die sie stark absorbiren, mithin auch aussenden, stark reflectiren. Eine Natriumflamme würde mithin Strahlen von der Schwingungszahl der *D*-Linie viel stärker reflectiren als alle anderen leuchtenden Strahlen des Spectrums, also eine gelbe Oberfläche zeigen. Versuche zur Prüfung dieser Folgerung, die voraussichtlich erhebliche Schwierigkeiten bieten würden, habe ich bisher nicht angestellt.

Bevor solche Versuche vorliegen, und die Stärke der auswählenden Reflexionen der glühenden Gase einigermassen quantitativ bestimmt ist, wäre es verfrüht, weitere Schlüsse auf das Vorhandensein einer solchen zu bauen. Ich will nur darauf hinweisen, dass wenn das Reflexionsvermögen der glühenden Gase für gewisse Strahlenpartien ein erheblich grösseres ist, als für alle andern, dies vielleicht für die spectroskopische Untersuchung derjenigen Himmelskörper, welche wie z. B. Kometen theils eigenes, theils reflectirtes Licht aussenden, nicht ohne Bedeutung wäre.

Wenn das Licht eines solchen Körpers aus einzelnen isolirten Partien besteht oder schmälere hellere Banden auf einem dunklen continuirlichen Spectrum zeigt, so sind wir nach unseren bisherigen Kenntnissen gewohnt, anzunehmen, dass das Licht dieses discontinuirlichen Spectrums lediglich und ausschliesslich Licht sei, welches der Körper als Selbstleuchter aussendet. —

Besitzt der Körper ein auswählendes Reflexionsvermögen, so ist obiger Schluss nicht ohne weiteres zulässig. —

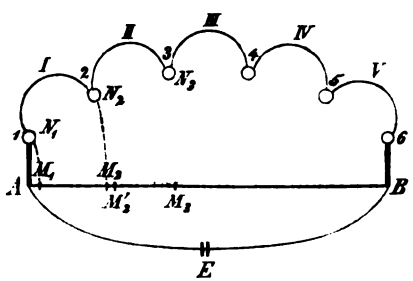
Man könnte sich sogar als extremsten Fall eine nicht leuchtende, sehr dichte Gasmasse in unserem Sonnensystem denken, welche auswählende Absorption und mithin für viele einzelne Strahlenpartien auswählendes Reflexionsvermögen besitzt. Eine solche Gasmasse, von der Sonne intensiv beleuchtet, würde, ohne selbstleuchtend zu sein, ein discontinuirliches Spectrum durch Reflexion zeigen.

Strassburg, März 1880.

X. *Ueber eine einfache Methode der galvanischen Calibrirung eines Drahtes; von V. Strouhal und C. Barus.*

Die Methoden, deren man sich zur Calibrirung eines Drahtes, wie z. B. bei der Kirchhoff-Wheatstone'schen Brückencombination zu bedienen pflegt, leiden ohne Zweifel an dem Uebelstand, dass zu deren Ausführung von vornherein Widerstände erfordert werden, die auf anderem Wege in gewissen einfachen Verhältnissen abgeglichen worden sind. Die Genauigkeit des gewünschten Resultates wird auf diese Weise von der Genauigkeit einer früheren Abgleichung abhängig gemacht, wodurch von vornherein die zu erwartenden Fehler im Caliber des Drahtes durch unvermeidliche Fehler im Abgleichen der Widerstände in Zweifel gestellt werden, umsomehr, je kleiner sie ausfallen. Bei der Wichtigkeit der Aufgabe für präcise Widerstandsbestimmungen nach der sonst so bequemen Brückenmethode ist daher das Bestreben stets berechtigt, diesen Uebelstand möglichst vollständig zu vermeiden und überdies durch Einfachheit der beanspruchten Mittel die Ausführung möglichst bequem und zugänglich zu machen.

Die im Folgenden beschriebene Methode, deren wir uns wiederholt mit Vortheil bedient haben, ist ein vollständiges Analogon der Methode, die man in bekannter Weise zur Calibrirung eines Thermometers anzuwenden pflegt; sie geht von demselben Gedanken aus, auf welchem die bekannte Hockin-Matthiessen'sche Methode der Brückenverwendung beruht.



Es seien in beistehender Figur bei der bekannten Brückenanordnung ANB und AMB die beiden Stromzweige, dabei AMB der zu calibrirende Draht, ANB eine

Reihe von Widerständen, deren Summe, bei beliebiger Anordnung, constant bleiben soll.

Sind nun M_1 und N_1, resp. M_2 und N_2 zwei Punktepaare gleichen Potentials, und bezeichnet man mit y den Widerstand $N_1 N_2$, mit x den Drahtabschnitt $M_1 M_2$, so ist:

$$y = C.x,$$

wo C eine Constante („Empfindlichkeitsconstante") bedeutet die nur von der Summe der Widerstände ANB abhängt. In der That ist, wenn W diese Summe, L die Gesammtlänge des Drahtes bezeichnet:

$$W = C.L.$$

Es sei ferner a das Calibrirungsintervall, so gewählt, dass $\frac{L}{a} = n$ eine ganze Zahl ist.

Man stellt sich nun zunächst n nahezu gleiche Widerstände her. Wir hatten eine Anzahl von Zehnteln *S.E.* bereits vorliegend, die wir uns vorher zum Zwecke der Widerstandsbestimmungen hergestellt hatten und dabei verwenden konnten. Man kann indessen einfach einen Neusilberdraht von passender Länge und Dicke nehmen und denselben in n nahezu gleiche Stücke zerschneiden, welche dann zweckmässig an amalgamirte Kupferdrahtstücke dickerer Sorte angelöthet werden. Ein genaues Abgleichen ist überflüssig.

Diese n nahezu gleichen Widerstände I, II, III u. s. f. werden durch Vermittelung von Quecksilbernäpfchen hintereinander gereiht. Wir wollen $n = 5$ annehmen. Die vorstehende Figur stellt die Anordnung für diesen Fall schematisch dar. Die Verbindung mit den Endpunkten A und B des Drahtes wird durch dicke Kupferdrähte oder Kupferplatten vermittelt. Die Calibrirung geschieht nun in folgender Weise:

Man setzt den Contact N des durch ein empfindliches Spiegelgalvanoskop gehenden „Brückendrahtes" MN nacheinander in die Näpfchen 1 und 2 und bestimmt auf dem Drahte AMB die entsprechenden Stellungen M_1 und M_2 des Contactes M.

Nun vertauscht man I und II, sodass I an Stelle von II kommt, setzt den Contact N nacheinander in die Näpfchen 2 und 3 und bestimmt wieder die entsprechenden Stellungen M_2' M_3 des Contactes M.

Man lässt nun I weiter vorrücken, indem man es gegen III vertauscht, den Contact N nacheinander in 3 und 4 setzt und die Stellungen M_3' und M_4 bestimmt.

In dieser Weise fährt man fort, bis I an Stelle des letzten Widerstandes V angelangt ist.

Man erhält also dadurch auf der Brücke Strecken $M_1 M_2$, $M_2' M_3$, $M_3' M_4$ u. s. f., welche alle demselben Widerstande proportional sind.

Man übersieht leicht, dass in der That zwischen dieser Methode der Drahtcalibrirung und der bekannten Methode der Thermometercalibrirung eine vollständige Analogie herrscht. Sowie hier ein Quecksilberfaden von einem bestimmten Volumen und der ungefähren Länge $a = \frac{100}{n}$ in der Thermometerröhre verschoben und an der Thermometertheilung dessen Länge, also eine Grösse abgelesen wird, welche unter Annahme eines gleichen Querschnittes der Röhre jenem Volumen proportional ist, so wird auch bei unserer Methode ein Draht von einem bestimmten Widerstande von Stelle zu Stelle verschoben und an der Theilung die Länge, also ebenfalls eine Grösse abgelesen, welche unter Annahme gleichen Querschnittes des zu calibrirenden Drahtes jenem Widerstande proportional ist. Aus den Abweichungen äquivalenter Längen schliesst man dann in beiden Fällen auf das Caliber der Röhre, resp. des Drahtes. Die fixen Punkte, zwischen welchen man einstellt, sind beim Thermometer der Gefrier- und Siedepunkt, in unserem Falle sind es die beiden Verzweigungspunkte A und B.

Sind nun a_1, a_2, a_3 u. s. f. die auf der Theilung abgelesenen äquivalenten Drahtlängen, so ist die mittlere Länge, welche unter Annahme eines mittlern Querschnittes des calibrirten Drahtes dem Calibrirungswiderstand entspricht, gegeben durch:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Da a_1, a_2 ... alle nur sehr wenig von dem Calibrirungsintervall $a = \frac{L}{n}$ abweichen, so ist es für die Berechnung praktischer, in dieselbe nicht die ganzen Längen a_1, a_2, a_3..., sondern nur deren (positive oder negative) Ueberschüsse über a eintreten zu lassen. Wir setzen also:

$$a_1 = a + \delta_1 \qquad a_2 = a + \delta_2 \ldots . a_n = a + \delta_n$$

und ebenso:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = a + \alpha .$$

Dann ist einfacher:

$$\alpha = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n}$$

und daher die Correctionstabelle des Drahtes:

von	0	bis	a . . .	$\alpha - \delta_1$	
„	a	„	$2a$	$\alpha - \delta_2$	
„	$2a$	„	$3a$		$\alpha - \delta_3$

u. s. f.

Daher durch Summation:

Bei	a	Correction	$= \alpha - \delta_1$
„	$2a$	„	$= 2\alpha - \delta_1 - \delta_2$
„	$3a$	„	$= 3\alpha - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3$

u. s. f.

Als besondern Vortheil der Methode möchten wir die Einfachheit der Mittel besonders hervorheben. Ein Nachtheil liegt nur darin, dass viele einzelne Einstellungen zu machen sind, wodurch etwaige Temperaturschwankungen störend eintreten könnten; indessen kann die Arbeit rasch gemacht werden, da genäherte Einstellungen M durch die Natur der Sache selbst gegeben sind. Bei Anwendung eines nur mässig empfindlichen Spiegelgalvanometers sind die Einstellungsfehler von derselben Ordnung wie die Ablesungsfehler; bei unserer $2^1/_2$ m langen Brücke war ein Zehntelmillimeter in der Einstellung noch vollkommen sicher.

Ohne Zweifel würden sich auf Grundlage unseres Prin-

cipes auch andere Methoden, die man für Calibrirung der Thermometer vorgeschlagen hat, auf galvanische Calibrirungen eines Drahtes übertragen lassen. Die angeführte genügt indessen wohl für alle Zwecke.

Würzburg, Physikalisches Institut, 10. April 1880.

XI. *Sprengwirkungen durch Eis; Mittheilung von Ed. Hagenbach.*

Im verflossenen kalten Winter machte ich den gewöhnlichen Sprengversuch durch die beim Gefrieren des Wassers eintretende Ausdehnung. Zufällig erhielt ich bei dieser Gelegenheit einige Erscheinungen, die ich hier mittheile, da sie vielleicht ein weiteres Interesse haben und über diese Art des Sprengens einiges Licht verbreiten können.

Ich benutzte kugelförmige Granaten aus Gusseisen; der äussere Durchmesser betrug 15 cm und der Cubikinhalt 885 ccm; es entspricht diesem ein innerer Durchmesser von 12,8 cm, und daraus folgt eine mittlere Wandstärke von 2,2 cm. Die Granaten wurden mit Wasser gefüllt, mit einem eingeschraubten eisernen Stöpsel verschlossen und der Kälte ausgesetzt.

Den ersten Versuch machte ich am 10. Dec. 1879. Die Granate wurde mittags nach 1 Uhr ins Freie gesetzt. Die Temperatur war um 1 Uhr $-12{,}4^\circ$ C., um 9 Uhr abends $-18{,}4^\circ$ und am andern Morgen um 7 Uhr $-14{,}6^\circ$. Abends um 9 Uhr war an der Kugel noch nichts Besonderes bemerkbar; am andern Morgen um 7 Uhr war sie geplatzt und zeigte die Erscheinung, welche in der nach der Natur aufgenommenen und durch Lithographie reproducirten Photographie auf Taf. III B Fig. 1 u. 2 dargestellt ist. Fig. 1 gibt die Granate von der einen Seite in der ursprünglichen senkrechten Stellung, Fig. 2 von der andern in schiefer Stellung.

Der zweite Versuch wurde am 20. Januar angestellt, als

wir aufs neue eine Kälteperiode hatten. Die Granate wurde wie das erste mal behandelt und vormittags gegen 10 Uhr ins Freie gesetzt. Die Temperatur war morgens 7 Uhr $-20{,}0°$, um 1 Uhr $-12{,}8°$ und abends 9 Uhr $-14{,}2°$. Abends 7 Uhr war noch nichts Besonderes an der Granate bemerkbar; um 9 Uhr war sie gesprungen und zeigte im wesentlichen die Erscheinung, welche von zwei verschiedenen Seiten auf Taf. III B Fig. 3 u. 4 wiedergegeben ist. Die Photographie wurde zwar erst am 21. morgens früh aufgenommen; allein die seit dem Abend eingetretene Aenderung war ganz unbedeutend; es hatte sich nur der ausgetretene cylindrische Eiszapfen etwas verlängert.

Bei diesen Eisgebilden sehen vor allem sehr merkwürdig aus die dünnen, nach aussen zu verjüngten, linear ausgedehnten Eisstäbchen, von welchen das im December erhaltene nach unten und das im Januar erhaltene nach oben zu concav ist. Dieselben haben ganz das Aussehen von zu Eis erstarrten Wasserstrahlen und mahnen einen beinahe an das bekannte Abenteuer des Barons von Münchhausen. Bei näherer Untersuchung zeigten die beiden Eisstrahlen, wie ich der Einfachheit wegen die Gebilde nennen will, abgesehen von der verschieden gerichteten Krümmung, wesentliche Differenzen. Der Strahl vom December ist an der Ansatzstelle, wie man in Taf. III B Fig. 1 u. 2 deutlich sieht, platt, im weitern Verlaufe im Querschnitt rund; dabei zeigt er periodische Anschwellungen oder Knoten; es konnten deren 16 gezählt werden, die im Mittel etwa 7 mm voneinander entfernt waren. Der Strahl vom Januar war, wie der vom December, nach aussen verjüngt und nahm von 9 mm Breite am Anfange bis zu 3 mm Breite am Ende ab. Er war ferner sehr deutlich abgeplattet und zwar nach oben, d. h. nach der concaven Seite zu; der Querschnitt war also kein Kreis, sondern ein mit dem Durchmesser abgeschlossener Halbkreis. Von den Anschwellungen oder Knoten war daran nichts zu bemerken.

Wir versuchen nun, von dem Vorgange der Sprengung und der Entstehung der eigenthümlichen Eisgebilde uns eine Vorstellung zu machen und beginnen mit der Erschei-

nung des 20. Januar, da sich bei ihr die einzelnen Phasen etwas leichter verfolgen lassen.

Da die Kugel ganz mit Wasser angefüllt war, so wurde die Ausdehnung verhindert; es trat deshalb nicht sogleich Eisbildung ein, sondern das Wasser kühlte sich unter Nullgrad ab und übte im sogenannten überschmolzenen Zustande einen bedeutenden Druck auf die starre Hülle aus; diese gab vorerst infolge ihrer Elasticität ein wenig nach, und es trat durch die infolge der Ausdehnung etwas gelockerten Gänge des Schraubengewindes eine kleine Menge des überschmolzenen Wassers aus und floss der Kugel entlang in einem schmalen Streifen nach unten, wie die auf der Kugel zurückgelassene schwarze Spur in Taf. III B Fig. 3 deutlich zeigt; einiges träufelte dann noch auf den hölzernen Stuhl, welcher der Kugel als Unterlage diente. Da das überschmolzene Wasser beim Austritt vom Druck erlöst wurde, musste sofort Gefrieren eintreten. Es zeigte sich das ebensowohl in der Gestalt des gefrorenen Strahles, der nur nach unten, wo er auf der Kugel auflag, flach, sonst aber nicht zerflossen war, als auch an den gefrorenen Wassertropfen, die sich auf dem Stuhle durch das herabträufelnde Wasser gebildet hatten. Es war das im Kleinen die gleiche Erscheinung, die man bei der Bildung von Glatteis beobachten kann; wo man bekanntlich auch zur Erklärung der plötzlichen Eisbildung den überschmolzenen Zustand zu Hülfe nimmt. Das Gefrieren des austretenden Wassers regte die Krystallisation des übrigen Wassers an, und unter dem dadurch entstehenden Drucke flog der Stöpsel mit Gewalt weg. Trotz eifrigen Suchens habe ich ihn bis jetzt nicht finden können, und da ringsherum eine intacte Schneefläche war, auf der man den dunklen Stöpsel leicht gesehen hätte, so darf man annehmen, dass er weit fortgeschleudert wurde, wie das seiner Zeit schon Williams[1]) im Jahre 1785 bei seinen Versuchen in Quebeck beobachtet hatte. Am Gewinde wurden einige Gänge abgerissen, und die Kugel zeigte einige nach aussen divergirende Risse, die offen standen, so

1) Williams, Trans. Royal Soc. Edinburgh. 2. p. 23. 1790.

lange das ausgedehnte Eis in der Kugel war, nach dessen Schmelzung aber infolge der Elasticität des Gusseisens sich wieder schlossen. Dem Stöpsel folgte ein cylindrischer Eiszapfen, der durch die runde Oeffnung herausgepresst wurde; die äussere Streifung desselben zeigte, dass das feste aber plastische Eis mit Gewalt herausgetrieben war; mit diesem Zapfen wurde der schon gebildete und daran hängende Strahl, der natürlich vorerst die der Rundung der Kugel entsprechende Concavität nach unten gekehrt hatte, von der Kugel ab in die Höhe gehoben. Da die Schmelzungswärme, die zum Gefrieren des gesammten Wassers entzogen werden müsste, bedeutend grösser ist als die, welche zur Erwärmung desselben von ungefähr — 15 auf Nullgrad nöthig ist, so konnte im ersten Moment nicht alles gefrieren. Es musste also sowohl der ausgetriebene Eiszapfen als auch das Innere der Kugel noch flüssiges Wasser enthalten. Bei der grossen Kälte fror das im Eiszapfen eingeschlossene Wasser bald; der Zapfen wurde in seiner oberen Hälfte dadurch zersprengt, und vier Lappen legten sich wie die Blätter einer aus der Knospe sich entfaltenden Blume nach aussen um. Die Folge davon war die Umwendung des Strahles, der nun wie ein Horn in die Höhe ragte und die concave abgeplattete Seite nach oben kehrte. Wir haben alle Ursache, anzunehmen; dass der bis dahin betrachtete Vorgang auf eine sehr kurze Zeit, wohl nur wenige Secunden, zusammengedrängt war. Nach und nach fror nun auch das im Innern der Kugel noch vorhandene Wasser; es wurde dadurch langsam der Eiscylinder noch weiter hinausgeschoben, bis er abbrach. Ich schnitt dann das ausgetretene Eis ab und bestimmte nach Schmelzung des die Hohlkugel füllenden Eises die Menge des fehlenden Wassers; ich fand so 82 ccm. Da die ganze Kugel 885 ccm fasste, so ergibt sich daraus für das specifische Gewicht des gebildeten Eises 0,91; es stimmt das in befriedigender Weise mit den bekannten directen Bestimmungen, wenn man bedenkt, dass es sich hier um einen ziemlich rohen Versuch handelt, und dass das Eis jedenfalls ein wenig lufthaltig war.

Die vorgenommene Analyse des Januarexperimentes wird nun auch zur Aufklärung des Decemberexperimentes dienen können.

In der Hauptsache war der Vorgang der gleiche; die Unterschiede wurden hauptsächlich dadurch bedingt, dass der eiserne Zapfen tiefer eingeschraubt war; deshalb wurde nicht der Stöpsel hinausgeschleudert, sondern die Granate förmlich auseinander gesprengt und ein dreieckiges Stück abgehoben. Das den Strahl bildende Wasser trat hier nicht durch das Schraubengewinde aus, sondern an der Stelle, wo die Kugel zuerst platzte, am Divergenzpunkte der Risse. Da somit das Wasser beim Austreten einen geringeren Widerstand zu überwinden hatte, musste es eine grössere Ausflussgeschwindigkeit erlangen; der Strahl legte sich also nicht an die Kugel an, sondern sprang frei in die Luft; er ist deshalb im Querschnitt nicht halbrund, sondern rund. Die Krümmung des Strahles hielt ich zuerst für die Parabel des frei ausströmenden Wasserstrahles. Allein nachdem es mir möglich geworden war, die Entstehung der Krümmung beim Strahl des Januar so genau zu verfolgen, schien mir die Annahme wahrscheinlich, dass auch im December der zuerst in freier Luft entstandene und infolge der grossen Ausflussgeschwindigkeit vorerst ziemlich gerade gefrorene Strahl unter dem Einflusse der Schwere gebogen und an die Kugel angelegt wurde und so nachträglich die Krümmung der Kugel annahm; es ist dabei in Betracht zu ziehen, dass aus dem früher erörterten Grunde der plötzlich gefrorene Strahl jedenfalls noch etwas Wasser enthalten und somit sehr plastisch sein musste. Wenn man in Gedanken das wie ein Deckel aufgehobene ausgebrochene Stück Eisen, an dem der gefrorene Strahl hängt, wieder an die ursprüngliche Stelle zurücklegt, so passt besonders das äussere Ende ganz gut auf die Kugel; die etwas geringere Biegung des Anfanges begreift sich leicht, wenn man bedenkt, dass beim Abheben des Strahles eine Streckung des noch plastischen Eises eintreten musste. Man kann noch bemerken, dass der Strahl einige Millimeter unter dem oberen Rande des ausgebrochenen Stückes ansetzt, was sich dadurch erklärt, dass

das Wasser erst herausspritzte, als der Deckel schon ein bischen gehoben war.

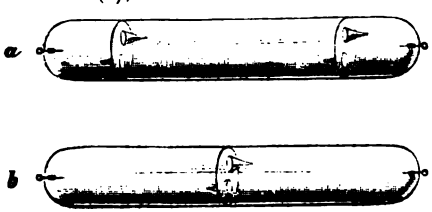
Wir haben nun noch über die periodischen Anschwellungen oder die Knöpfe des Strahles uns Rechenschaft zu geben. Ich nahm zuerst an, dass dieselben den periodischen Aenderungen in der Orientirung des Querschnittes zuzuschreiben sind, die bekanntlich zuerst von Savart genau studirt worden sind. Da, wie Taf. III B Fig. 1 u. 2 zeigen, der Strahl am Ursprung in horizontaler Richtung flach war, so hat diese Erklärung viel für sich. Allein die genauere Untersuchung des Strahles in natura und in der Photographie wies nach, dass der Querschnitt im weiteren Verlaufe nicht länglich und periodisch um 90° gedreht war, sondern stets mehr rund und abwechslungsweise gross und klein. Wir haben es also mit periodischen Erweiterungen und Verengungen des Querschnittes zu thun. Es lässt sich dies vielleicht einfach durch die Annahme erklären, dass der Deckel beim Aufreissen vibrirte, und dass so die zeitlich aufeinander folgenden Vibrationen in räumlicher Auseinanderlegung im austretenden Strahl sich ausprägten.

Es ist mir nicht bekannt, ob solche durch plötzliches Gefrieren entstandene Eisstrahlen auch sonst schon beschrieben sind, zweifle aber nicht daran, dass sie schon häufig vorkamen und auch beobachtet wurden, da ich die auffällige Erscheinung in voneinander etwas verschiedenen Formen bei den beiden von mir angestellten Versuchen erhalten habe. Etwas Aehnliches hat Williams bei einem seiner Versuche bemerkt, er gibt an, dass aus Spalten zwei dünne Eisplatten ausgetreten sind, die Fischflossen glichen. Wir können annehmen, dass damals das überschmolzene Wasser in einer Fläche (nappe) austrat und sofort gefror. A. Cazin gibt in seinem Buche über die Wärme eine Abbildung dieser Erscheinung; da aber die Originalarbeit von Williams keine Tafel enthält, so muss man annehmen, dass dieselbe nicht direct nach der Erscheinung, sondern nachträglich nach der Beschreibung entworfen wurde.

Basel, Anfang April 1880.

XII. *Ueber das Trichterventil in evacuirten Röhren; von W. Holtz.*

Im **155.** Bande der Poggendorff'schen Annalen beschrieb ich eine Röhre, welche in möglichst einfacher Form die Wirkung des Trichterventils auf den Verlauf der electrischen Entladung zeigen sollte. In derselben passirt die Entladung, am besten die verzögerte, welche Schichtung erzeugt, je nach ihrer Richtung bald an dieser bald an jener Stelle. Infolge wiederholter Anfragen wegen der speciellen Beschaffenheit dieser Röhren gebe ich statt einer genaueren Beschreibung nun im Folgenden lieber eine Abbildung derselben Röhre (*a*) nebst einer zweiten (*b*), welche noch einfacher das gedachte Princip vertritt. Die Röhre *a* enthält zwei Scheidewände und vier Trichter, während die Röhre *b* nur mit einer Scheidewand und zwei Trichtern ausgerüstet ist. Die engen Trichteröffnungen müssen möglichst fein, und die Röhre selbst muss möglichst evacuirt sein, jedenfalls soweit, dass die durch eine feuchte Schnur verzögerte Flaschenentladung Schichtung in derselben erzeugt. Auch muss die Scheidewand selbstredend dicht an der Glaswand haften, sodass der Strom eben nur die Trichteröffnungen passiren kann. Im übrigen spielt die Länge oder Weite der Röhre, soweit meine Versuche reichen, keine Rolle. Die beabsichtigte Wirkung tritt aber überhaupt nur bei disruptiven Entladungen und auch mit Sicherheit nur dann ein, wenn die eingeschaltete Luftstrecke eine gewisse Grösse nicht übersteigt. Letzteres ist aber bei Anwendung einer Influenzmaschine sehr einfach durch die verschiebbaren Hülsen des bekannten Einschaltungsapparates zu reguliren. Unter solchen Voraussetzungen wählt dann der Funkenstrom unter den beiden gebotenen Wegen allemal denjenigen, auf welchem die positive Electricität zuerst in die Basis der Trichter gelangt.



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1880. ANNALEN № 7.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND X.

I. *Versuche über stehende Schwingungen des Wassers; von G. Kirchhoff u. G. Hansemann.*

In den Monatsberichten der Berl. Akad. vom Mai 1879[1]) hat einer von uns die Theorie der stehenden Schwingungen entwickelt, die eine schwere Flüssigkeit in einem prismatischen Gefässe ausführen kann, dessen verticaler Querschnitt aus zwei geraden Linien besteht, die miteinander einen rechten Winkel bilden und gleich geneigt gegen die Verticale sind. Wir haben einige der dort abgeleiteten Resultate, namentlich einige der dort berechneten Schwingungsdauern durch Messungen zu prüfen gesucht. Die Schwingungen der Flüssigkeit wurden dadurch hervorgerufen und unterhalten, dass das prismatische Gefäss unter dem Einfluss electromagnetischer Kräfte Schwingungen um seine Kante als Axe ausführte. Die Dauer dieser Schwingungen konnte innerhalb gewisser Grenzen geändert und gemessen werden; ausserdem liess sich ihre Amplitude und die Amplitude der Wasserfläche in ihrer Mitte messen. Das Verhältniss dieser beiden Amplituden zeigte für gewisse Werthe der Schwingungsdauer stark ausgesprochene Maxima; diese Werthe mussten nahe übereinstimmen mit den Schwingungsdauern der Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl, welche an dem angeführten Orte gefunden sind. Will man mit grösserer Genauigkeit die Resultate der Theorie mit denen der Beobachtung vergleichen, so stösst man auf Schwierigkeiten, da in der Theorie weder die Bewegung des Gefässes noch die Reibung der Flüssigkeit bis jetzt berücksichtigt werden kann; es ist nur der Weg offen, der so häufig eingeschlagen werden muss: für den Fall, der vorliegt, Formeln als gültig anzunehmen,

1) Auch Wied. Ann. **10.** p. 34. 1880.

die für einen Fall, der ähnlich zu sein scheint, und dessen Theorie durchgeführt werden kann, sich ergeben. Um solche Formeln zu finden, haben wir die Wassermasse uns ersetzt gedacht durch ein Pendel, auf welches eine dämpfende Kraft wirkt, das trotzdem aber in periodischer Bewegung infolge davon bleibt, dass seine Axe von einem zweiten Pendel getragen wird, dessen Schwingungen durch geeignete Kräfte gleichmässig erhalten werden. Sehr einfache Betrachtungen führen dann zu einer Gleichung zwischen dem Verhältniss der Amplituden beider Pendel und der Schwingungsdauer; sind die in dieser Gleichung vorkommenden Constanten aus Beobachtungen bestimmt, so kann man aus ihnen die Schwingungsdauer finden, die das erste Pendel haben würde, wenn es keiner dämpfenden Kraft unterworfen, und seine Axe fest wäre.

Man denke sich ein Pendel, welches um eine horizontale Axe unter dem Einfluss geeigneter Kräfte Schwingungen ausführt. Dieses Pendel trage die seiner eigenen Axe parallele Axe eines andern Pendels, auf welches die Schwere und eine dämpfende Kraft wirkt. Es sei m die Masse des letzteren, ξ die vertical nach unten gekehrte, η die auf den Drehungsaxen senkrechte, horizontale Ordinate eines Punktes seiner Axe zur Zeit t; die Bewegung desselben relativ gegen ein Axensystem, dessen Anfangspunkt dieser Punkt ist, und dessen Axenrichtungen mit den Richtungen von ξ und η zusammenfallen, ist dann die gleiche, wie wenn dieses Axensystem ruhte, neben den vorhandenen Kräften aber auf den Schwerpunkt des Pendels noch eine Kraft wirkte, deren Componenten $-m\frac{d^2\xi}{dt^2}$ und $-m\frac{d^2\eta}{dt^2}$ sind. Ist der Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsmasse des Pendels l, sein Trägheitsmoment K, u der Winkel, um den es sich zur Zeit t aus seiner Gleichgewichtslage gedreht hat, und nimmt man die dämpfende Kraft als proportional mit $\frac{du}{dt}$ an[1]), so ist daher:

1) Treffender wäre es, die dämpfende Kraft als proportional mit der relativen Geschwindigkeit der beiden Pendel anzunehmen; beide Annahmen müssen zu nahe gleichen Resultaten führen, wenn die Amplitude

$$\frac{K}{lm}\frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - g\right)\sin u + \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos u - \varkappa\frac{du}{dt},$$

wo g die Intensität der Schwere und $\varkappa$ eine Constante bezeichnet. Bedeutet ferner λ den Abstand der Drehungsaxen beider Pendel voneinander und v den Winkel, den die durch diese gelegte Ebene zur Zeit t bildet mit der verticalen, durch die feste Axe gehenden Ebene, so ist, wenn der Anfangspunkt der ξ und η in der festen Axe angenommen wird:

$$\xi = \lambda\cos v, \qquad \eta = \lambda\sin v.$$

Setzt man sowohl u als v als unendlich klein voraus, so hat man daher:

$$\frac{K}{lm}\frac{d^2u}{dt^2} = -gu + \lambda\frac{d^2v}{dt^2} - \varkappa\frac{du}{dt}.$$

Diese Gleichung möge geschrieben werden:

$$\alpha^2\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta\frac{du}{dt} + u = N\frac{d^2v}{dt^2},$$

wo dann α, β, N gewisse Constanten bedeuten, von denen die erste die Schwingungsdauer bestimmt, die das Pendel mit der beweglichen Axe haben würde, wenn es keiner Dämpfung unterworfen und seine Axe fest wäre; diese Schwingungsdauer ist nämlich $= \alpha\pi$.

Nun werde angenommen, dass die Schwingungen des Pendels mit der festen Axe der Gleichung:

$$v = B\cos nt$$

gemäss geschehen, und dass auch u periodisch geworden ist. Es muss dann:

$$u = A'\cos nt + A''\sin nt$$

sein, und es müssen die Constanten B, A', A'' den Gleichungen genügen:

$$A'(\alpha^2n^2 - 1) - A''2\beta n = BNn^2,$$
$$A'2\beta n + A''(\alpha^2n^2 - 1) = 0.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen und setzt dann:

$$A'^2 + A''^2 = A^2,$$

bezeichnet also durch A die Amplitude des Pendels mit der beweglichen Axe, so erhält man:

---

des Pendels mit fester Axe klein ist gegen die Amplitude des andern, was hier vorausgesetzt werden kann; die im Texte genannte Annahme ist gewählt, weil für sie die nöthigen numerischen Rechnungen leichter sind.

$$A^2\left((\alpha^2 n^2 - 1)^2 + 4\beta^2 n^2\right) = B^2 N^2 n^4 .$$

Das ist die Beziehung zwischen dem Amplitudenverhältniss $A:B$ und der Schwingungsdauer $\frac{\pi}{n}$. Setzt man:

$$\frac{1}{n^2} = x \quad \text{und} \quad \frac{B}{A} = y ,$$

so ist sie:

$$N^2 y^2 = (\alpha^2 - x)^2 + 4\beta^2 x$$

und stellt, wenn man x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes ansieht, eine Hyperbel dar. Kennt man drei oder mehr zusammengehörige Werthepaare von x und y, so kann man die drei in ihr vorkommenden Constanten berechnen, also auch die Schwingungsdauer $\alpha\pi$ ermitteln.

Diese Formeln haben wir auch bei unsern Versuchen über die Schwingungen des Wassers benutzt, um die Schwingungsdauern zu berechnen, die ihm zukommen würden, wenn das Gefäss stillstände und Reibung nicht vorhanden wäre.

Das prismatische Gefäss A, Taf. IV Fig. 1 war aus vier Glasplatten von 6 mm Dicke zusammengekittet, von denen zwei Quadrate und zwei gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke bildeten; die Seiten jener waren etwa 200 mm lang. Mit seinem untern Theile war das Glasgefäss in ein aus Messingplatten zusammengesetztes Hohlprisma gekittet, das zwei Stahlschneiden trug, deren nach unten gekehrten Schärfen in die Verlängerungen der Linie fielen, die die untere Kante des das Glassgefäss erfüllenden Wassers ausmachte. Diese Schneiden ruhten auf stählernen Lagern, die auf einem sehr festen Tische — dem Gestelle einer kleinen eisernen Drehbank — befestigt waren, und bildeten die Drehungsaxe für ein Federpendel, von dem das mit Wasser gefüllte Gefäss ein Theil war. Es trug dieses einen nach unten gehenden Messingstab B mit einem Bleigewicht, dessen Grösse ausreichte, um das Umstürzen des mit Wasser gefüllten Gefässes zu verhindern. Durch eine Durchbohrung des Messingstabes war ein dünnerer Eisenstab CD geführt, der bei C aufwärts gebogen und mit einer Feder verbunden war, deren zweites Ende bei E an dem Tische so befestigt war, dass ihre Ebene durch die genannte Drehungsaxe ging. Eine

zweite Feder *F* verband den Messingstab *B* mit einem Holzstabe, der bei *G* ein Laufgewicht trug; durch Verschiebung dieses oder durch Hinzufügung kleiner Gewichtsstücke zu demselben konnte die Schwingungsdauer des ganzen Systemes geändert werden. Oberhalb des Laufgewichtes war auf jeder Seite des Holzstabes eine kleine Eisenplatte befestigt, die einem davor aufgestellten Electromagneten als Anker diente. Bei den Schwingungen wurde der Strom einer Kette abwechselnd durch den Draht des einen und den des andern Electromagneten geleitet, indem von den Enden eines mit dem Holzstabe verbundenen Drahtes *HH* bald das eine, bald das andere in ein darunter befindliches Quecksilbernäpfchen tauchte. Die Bildung von Funken in diesen war durch eine, als Nebenschliessung eingeschaltete Zersetzungszelle verhindert. Waren die Schwingungen stationär geworden, so wurde durch Herstellung eines Contactes eine zweite Kette in Thätigkeit gesetzt, deren Strom vermöge eines dritten, an dem Holzstabe befestigten Armes und eines entsprechenden Quecksilbernäpfchens abwechselnd unterbrochen und geschlossen wurde. Dieser Strom ging durch einen Siemens'schen Chronographen *J* und erzeugte auf dem Papierstreifen dieses Marken, aus denen die Schwingungsdauer später ermittelt werden konnte. Um die Amplitude des Gefässes messen zu können, hatten wir an dem schon erwähnten Eisenstabe bei *D* ein verticales Glasplättchen befestigt, das ein mit einem horizontalen, feinen Spalt versehenes Staniolblatt trug. Auf der einen Seite dieses war eine Lampe, auf der andern ein mit einem Ocularmikrometer versehenes Mikroskop aufgestellt, das auf der Zeichnung sichtbar, dessen Träger aber nicht dargestellt ist. Zur Beobachtung der Bewegung der Wasseroberfläche diente ein, mit einem horizontalen, durch eine Gasflamme erleuchteten Spalt versehener Collimator *K* und ein Fernrohr *L*, welches dem Beobachter das an der Wasserfläche erzeugte Spiegelbild des Spaltes zeigte. Die Axen von Fernrohr und Collimator schnitten sich in einem Punkte der Wasserfläche; um die Linie, die durch diesen Punkt in der Richtung der Drehungsaxe des Gefässes ging, waren beide drehbar, und der Winkel, um

den das Fernrohr gedreht wurde, liess sich an einer Kreistheilung ablesen. Ausserdem konnten Fernrohr und Collimator zusammen, horizontal und senkrecht auf der Drehungsaxe des Gefässes, längs einer Scala verschoben werden. Der Regel nach befand sich vor dem Objectiv des Fernrohrs oder des Collimators ein Schirm mit einem schmalen, horizontalen Schlitz in seiner Mitte, der von den Strahlen, die der Lichtspalt aussendete, nur diejenigen hindurchliess, die an einem schmalen Theile der Wasserfläche reflectirt wurden. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs war durch zwei in der Ebene des Fadenkreuzes befindliche Schirme oben und unten geradlinig begrenzt. Sollte die Amplitude des Theiles der Wasserfläche, der in der Axe des Fernrohrs lag, gemessen werden, so wurde dieses zunächst bei ruhendem Wasser so eingestellt, dass von dem Spiegelbilde des leuchtenden Spaltes an der einen Grenze des Gesichtsfeldes eben eine Spur noch wahrnehmbar war, und dann, nachdem die Schwingungen hervorgerufen waren, so gedreht, dass an derselben Grenze auch jetzt nur noch Spuren von Licht aufblitzten. Der Drehungswinkel des Fernrohrs war dann dem Winkel gleich, durch den der beobachtete Theil der Wasserfläche bei einer Schwingung sich drehte, also gleich dem Doppelten seiner Amplitude.

Um eine vollkommene Benetzung der Gefässwände zu sichern, war dem Wasser etwas Kalilauge zugesetzt.

Bei den langsamsten Schwingungen der prismatischen Wassermasse bleibt der Theorie zufolge die Oberfläche eine Ebene, und die Schwingungsdauer ist gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge der halben Länge der Oberfläche gleich ist. War die Schwingungsdauer diesem Werthe nahe gleich gemacht, so blieb auch die Wasseroberfläche nahe eben, ausser in der Nähe der Gefässwände, wo sie durch Capillarität gekrümmt war; es zeigte sich das an den Spiegelbildern, die sie erzeugte, welche scharf und unverzerrt waren. Die Beobachtungen mit dem Fernrohre konnten hier bei freien Objectiven ausgeführt werden.

Die folgende Zusammenstellung gibt die Zahl n der in einer Minute ausgeführten Schwingungen, die in Graden ausgedrückten Amplituden der Wasserfläche, A, und des Gefässes, B, und die Verhältnisse beider, y, wie sie in einem Beobachtungssatze bei verschiedener Grösse des an dem Holzstabe befindlichen Gewichtes gefunden wurden.

Tabelle I.

Nr.	n	A	B	y beobachtet	y berechnet	Differenzen
1	160,1	2,20°	0,129°	0,0587	0,0591	−0,0004
2	160,9	2,43	0,125	0,0517	0,0515	+0,0002
3	161,6	2,78	0,122	0,0438	0,0446	−0,0008
4	162,2	3,10	0,122	0,0392	0,0396	−0,0004
5	162,9	3,45	0,118	0,0341	0,0339	+0,0002
6	163,2	3,90	0,110	0,0282	0,0302	−0,0020
7	168,5	3,73	0,064	0,0171	0,0193	−0,0022
8	168,6	3,55	0,071	0,0201	0,0200	+0,0001
9	169,0	3,28	0,075	0,0230	0,0237	−0,0007
10	169,7	3,00	0,083	0,0276	0,0288	−0,0012
11	168,9	3,30	0,077	0,0234	0,0223	+0,0011
12	168,4	3,53	0,069	0,0197	0,0185	+0,0012
13	168,0	3,75	0,064	0,0170	0,0159	+0,0011
14	167,8	3,93	0,060	0,0152	0,0147	+0,0005
15	167,4	4,05	0,056	0,0138	0,0125	+0,0013
16	167,2	4,15	0,048	0,0116	0,0115	+0,0001
17	167,1	4,20	0,044	0,0106	0,0111	−0,0005
18	161,1	2,53	0,129	0,0512	0,0498	+0,0014
19	160,3	2,25	0,131	0,0583	0,0569	+0,0014

Aus den Werthen von n und y sind die Constanten der aufgestellten Hyperbelgleichung so berechnet, dass die Summe der Quadrate der Fehler der Werthe von y zu einem Minimum gemacht ist. So ergab sich:

$$\alpha = 0{,}006\,006, \qquad \beta = 0{,}000\,041\,23, \qquad N = 0{,}000\,050\,86.$$

Um zu zeigen, inwieweit die Beobachtungen durch die Hyperbelgleichung bei diesen Werthen der Constanten dargestellt werden, sind die aus ihr berechneten Werthe von y in der „y berechnet“ überschriebenen Columne angegeben und die übrig bleibenden Differenzen hinzugefügt. Aus dem Werthe von α ergibt sich $\frac{1}{\alpha}$, d. h. die Schwingungszahl für eine Minute bei der langsamsten Schwingungsart der Wasser-

masse in dem Falle, dass das Gefäss ruht und keine Reibung stattfindet:

$$= 166{,}5.$$

Eine zweite, ähnliche Versuchsreihe führte zu genau demselben Zahlenwerth; eine dritte ergab 166,4.

Die Länge der Wasserfläche, wenn ihre Höhe einer gewissen Marke entsprach, was bei allen Versuchen der Fall war, betrug 256,9 mm; ein Pendel, dessen Länge die Hälfte hiervon ist, führt in einer Minute

$$166{,}9$$

Schwingungen aus, eine Zahl, die mit den aus den Beobachtungen hergeleiteten in befriedigender Uebereinstimmung ist.

Die folgende Tabelle gibt in ähnlicher Weise die Resultate der Beobachtungen an, die wir angestellt haben in Bezug auf die dritte, am Eingangs erwähnten Orte behandelten Schwingungsart.

Tabelle II.

Nr.	n	A	B	y berechnet	y beobachtet	Differenzen
1	322,4	1,75°	0,152°	0,0869	0,0896	−0,0027
2	327,9	2,40	0,155	0,0647	0,0627	+0,0020
3	334,8	2,78	0,155	0,0559	0,0584	−0,0025
4	342,4	1,73	0,157	0,0908	0,0891	+0,0017
5	339,0	1,98	0,147	0,0743	0,0731	+0,0012
6	336,9	2,15	0,136	0,0631	0,0648	−0,0017
7	334,6	2,18	0,127	0,0584	0,0581	+0,0003
8	332,5	2,20	0,126	0,0571	0,0553	+0,0018
9	329,8	2,35	0,137	0,0584	0,0572	+0,0012
10	327,2	2,03	0,137	0,0676	0,0652	+0,0024
11	332,7	2,95	0,155	0,0527	0,0554	−0,0027

Dabei fand sich:

$$\alpha = 0{,}003\,014, \qquad \beta = 0{,}000\,070\,71, \qquad N = 0{,}000\,007\,747,$$

also:

$$\frac{1}{\alpha} = 331{,}8.$$

Die entwickelte Theorie hat die entsprechende Schwingungszahl:

$$166{,}9 \,.\, 1{,}9824 = 330{,}9$$

ergeben. Aber diese Theorie hat nicht Rücksicht nehmen können auf die Capillarität, die, wie zuerst W. Thomson und später Koláček gezeigt hat, einen merklichen Einfluss

auf die Wellenbewegung des Wassers auszuüben im Stande ist. Wenn das Wasser in horizontaler Richtung unbegrenzt ist, überall dieselbe Tiefe hat und stehende Schwingungen ausführt, deren von Knoten zu Knoten gemessene und in Millimetern ausgedrückte Wellenlänge durch λ bezeichnet wird, so bringt nach Koláček[1]) die Capillarität eine Verkleinerung der Schwingungsdauer hervor, die nahe:

$$1{,}5 \left(\frac{50}{\lambda}\right)^2 \text{ Procent}$$

beträgt. Mit einer solchen Bewegung wird näherungsweise die betrachtete Bewegung der prismatischen Wassermasse in genügender Entfernung von den Gefässwänden übereinstimmen; für sie ergibt sich aus den Knoten:

$$\lambda = 0{,}736 \,.\, 128{,}4 = 94{,}52$$

und aus den Bäuchen:

$$\lambda = 0{,}766 \,.\, 128{,}4 = 98{,}35.$$

Nimmt man für λ einen Mittelwerth an, so findet man hiernach die theoretische Schwingungszahl für eine Minute bei der dritten Schwingungsart mit Rücksicht auf die Capillarität.

$$= 332{,}2,$$

während unsere Beobachtungen sie 331,8 ergeben haben.

Auch in Bezug auf die Lage der Bäuche haben wir Messungen ausgeführt. In dem ideellen Falle, auf den die entwickelte Theorie sich bezieht, sind die Bäuche die Stellen, in denen die Richtung der Wasserfläche ungeändert bleibt. Solche Stellen gibt es in dem Falle, der bei den Versuchen verwirklicht ist, nicht; es gelten hier als Bäuche die Stellen, in denen die Aenderung der Richtung der Wasserfläche ein Minimum ist. Bei jedem der Versuche, die in der vorigen Tabelle aufgeführt sind, sind diese Stellen aufgesucht; auf jeder Seite der Mitte der Wasserfläche fand sich ein Bauch; der Abstand der beiden Bäuche voneinander zeigte sich als abhängig von der Schwingungszahl n und liess sich in befriedigender Weise als eine lineare Function von n dar-

1) Koláček, Wied. Ann. 5. p. 429. 1878.

stellen, nämlich, wenn 1 mm als Längeneinheit angenommen wird, durch den Ausdruck:

$$506{,}18 - 1{,}2202\,n.$$

Die folgende Tabelle gibt die Werthe von n und die beobachteten, sowie die hiernach berechneten Werthe des Abstandes an.

Tabelle III.

Nr.	n	Abstand der Bäuche beobachtet	Abstand der Bäuche berechnet	Differenzen
		mm	mm	
1	322,4	112,0	112,8	−0,8
2	327,9	105,6	106,0	−0,4
3	334,8	97,0	97,6	−0,6
4	342,4	89,6	88,4	+1,2
5	339,0	92,2	92,6	−0,4
6	336,9	95,0	95,0	0,0
7	334,6	98,4	97,8	+0,6
8	332,5	100,4	100,4	0,0
9	329,8	103,8	103,8	0,0
10	327,2	108,2	107,0	+1,2
11	332,7	99,4	100,2	−0,8

Setzt man in jenen Ausdruck für n den oben gefundenen Werth 331,8, so ergibt sich der Abstand der beiden Bäuche voneinander $= 101{,}3$.

Nach der entwickelten Theorie sollte derselbe:

$$= 0{,}7665 \,.\, 128{,}4 = 98{,}4 \text{ sein.}$$

Auf ähnliche Weise, wie die dritte, haben wir auch die fünfte Schwingungsart behandelt. Die Beobachtungsresultate, aus denen die Schwingungszahl abgeleitet ist, gibt

Tabelle IV.

Nr.	n	A	B	y beobachtet	y berechnet	Differenzen
1	458,0	1,77°	0,211°	0,119	0,116	+0,003
2	455,0	1,85	0,203	0,110	0,107	+0,003
3	451,5	1,80	0,185	0,103	0,102	+0,001
4	449,1	1,83	0,185	0,101	0,102	−0,001
5	446,5	1,58	0,170	0,108	0,105	+0,003
6	444,7	2,03	0,220	0,109	0,109	0,000
7	442,1	1,82	0,215	0,118	0,118	0,000
8	447,5	2,05	0,210	0,103	0,104	−0,001
9	453,7	1,93	0,195	0,101	0,105	−0,004
10	460,3	1,53	0,185	0,121	0,124	−0,003

Hieraus hat sich ergeben:

$$\alpha = 0{,}002\,224\,, \qquad \beta = 0{,}000\,070\,86\,, \qquad N = 0{,}000\,003\,089.$$

$$\frac{1}{\alpha} = 449{,}7\,.$$

Nach der entwickelten Theorie sollte die Schwingungszahl $\frac{1}{\alpha}$

$$= 166{,}9\,.\,2{,}6586 = 443{,}8$$

sein; dieses Resultat ist zu corrigiren wegen des Einflusses der Capillarität. Aus den inneren Knoten findet sich:

$$\lambda = 0{,}446\,.\,128{,}4 = 57{,}27$$

und aus den inneren Bäuchen:

$$\lambda = 0{,}445\,.\,128{,}4 = 57{,}15;$$

der eine wie der andere dieser Werthe gibt den corrigirten theoretischen Werth von $\frac{1}{\alpha}$

$$= 448{,}9.$$

Bäuche gibt es bei dieser Schwingungsart zwei innere und zwei äussere. Die Abstände der inneren voneinander und der äusseren voneinander, wie sie gefunden wurden bei den verschiedenen Schwingungszahlen, sind in Tab. V angegeben.

Tabelle V.

Nr.	n	Abstand der inneren Bäuche			Abstand der äusseren Bäuche		
		beobachtet	berechnet	Differenzen	beobachtet	berechnet	Differenzen
		mm	mm		mm	mm	
1	458,0	56,2	56,8	−0,6	161,2	160,8	+0,4
2	455,0	56,6	56,4	+0,2	164,0	164,4	−0,4
3	451,5	56,2	56,0	+0,2	168,4	168,8	−0,4
4	449,1	55,6	55,8	−0,2	171,6	171,6	0,0
5	446,5	55,6	55,4	+0,2	174,8	174,8	0,0
6	444,7	55,2	55,2	0,0	176,6	176,8	−0,2
7	442,1	54,6	54,8	−0,2	180,4	180,0	+0,4
8	447,5	55,6	55,6	0,0	173,6	173,6	0,0
9	453,7	56,8	56,4	+0,4	166,0	166,0	0,0
10	460,3	57,2	57,2	0,0	158,4	158,0	+0,4

Die berechneten Werthe dieser Abstände sind berechnet nach den Ausdrücken:

$$0{,}47828 + 0{,}12306\,n \qquad \text{und} \qquad 711{,}54 - 1{,}2023\,n.$$

Setzt man hier für n 449,7, so ergeben sie:

55,8 und 170,9,

während die Abstände nach der entwickelten Theorie sein sollten:

57,2 und 169,0.

II. *Ueber die Natur der galvanischen Polarisation; von W. Beetz.*

Seit der Einführung des Quadrantelectrometers als Messinstrument zur Bestimmung electrischer Potentiale ist es möglich geworden, eine Reihe von Fragen auf Grund einfacherer und reinerer Versuche zu behandeln, als es bei Anwendung galvanometrischer Messungsmethoden geschehen konnte. Unter den hieher gehörigen Arbeiten ist ganz besonders die ansehnliche Reihe von Untersuchungen, welche Hr. Fr. Exner während der letzten Jahre in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie veröffentlicht hat, mit hervorragendem Interesse aufgenommen worden. Diese Untersuchungen nehmen den alten Streit der electrochemischen Theorie des Galvanismus gegen die Contacttheorie wieder auf: jenen Streit, welcher ganz erloschen zu sein schien seit der Zeit, zu welcher das Princip von der Erhaltung der Energie sich allgemein Bahn gebrochen hatte. In der That gab es wohl seit jener Zeit keinen Contacttheoretiker mehr, welcher annahm, die blosse Thatsache des Contactes heterogener Körper miteinander sei die Quelle einer Electricitätserregung. So verschiedenartig auch immer die Molecularvorgänge, welche bei einem solchen Contacte eingeleitet werden, gedacht werden mochten, so war doch die Ansicht ganz allgemein aufgenommen, dass einer jeden Stromesarbeit ein bestimmt begrenzter chemischer Vorgang entsprechen müsse, und dass die bei diesem Vorgange auftretenden Verbindungswärmen als Maass der vorhandenen electromotorischen Kräfte dienen können, insofern diese Wärme gleich ist dem Producte aus Stromstärke und electromotorischer Kraft. Die Literatur über die in dieser Richtung massgebend gewordenen Arbeiten ist in Wiedemann's Lehrbuch des Galvanismus ebenso vollständig, als übersichtlich zusammengestellt. Wenn nun Hr. Exner durch seine neuen Messungen mittelst des Quadrantelectrometers nachweist, dass die Proportionalität zwischen Verbindungswärme und der an den Polen eines offenen Elementes auftretenden Potential-

differenz überall aufrecht erhalten bleibe, so hat er damit auch im Sinne der Contacttheoretiker eine äusserst verdienstliche Arbeit geliefert, denn die bisher vorhandenen Experimentaluntersuchungen, welche denselben Zweck verfolgten, leiden zum Theil an ganz bedeutenden Schwächen. Das ist in erster Linie von den Versuchsresultaten zu sagen, welche Bosscha einem Theile seiner sorgfältig durchgeführten Betrachtungen[1]) zu Grunde gelegt hat. Es sind dies die, durch die Untersuchungen von Lenz und Saweljew gewonnenen Resultate.[2]) Bosscha wählte die von den genannten Physikern erhaltenen Data, weil dieselben auf Grund der Ohm'schen Methode zur Bestimmung electromotorischer Kräfte gewonnen waren; von anderen Beobachtern mittelst der Compensationsmethode erhaltene dahin gehörige Zahlen konnte er deshalb nicht verwerthen, weil er für seine Betrachtungen das wirkliche Vorhandensein eines Stromes, nicht die Aufhebung desselben, voraussetzen musste. Aber abgesehen davon, dass wir längst wissen, dass nach der Ohm'schen Methode übereinstimmende Resultate gar nicht erhalten werden können, hatte ich gerade von den Untersuchungen von Lenz und Saweljew[3]) nachgewiesen, dass sie ganz unzuverlässige Ergebnisse liefern mussten. Die Erfahrung bestätigt das auf den ersten Blick; um nur ein Beispiel anzuführen, erwähne ich, dass jene Physiker die Polarisation des Platins in Chlor gleich Null fanden, während durch meine und Macaluso's[4]) Versuche der bedeutende Betrag dieser Polarisation nachgewiesen worden ist. Auffallender Weise hat Hr. Bosscha diese Unzuverlässigkeit selbst bemerkt; ohne sich dadurch von der Benutzung der unzuverlässigen Zahlen zurückschrecken zu lassen. Er sah nämlich ein, dass der von den russischen Physikern gegebene Werth der electromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes zu klein sein müsse, und nahm deshalb, um deren Data auf das

1) Bosscha, Pogg. Ann. **103.** p. 187 und **105.** p. 396. 1858.
2) Lenz u. Saweljew, Pogg. Ann. **67.** p. 497. 1846.
3) Lenz u. Saweljew, Pogg. Ann. **90.** p. 42. 1853.
4) Macaluso, Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. 26. Juli 1873.

Daniell'sche Element als Einheit reduciren zu können, für dessen Kraft eine Zahl an[1]), welche um 10 p. c. grösser ist, als die aus den Beobachtungen hervorgehende. Trotzdem hält er diese Beobachtungen für ohne Zweifel zuverlässiger[2]), als die von Svanberg[3]), was ich durchaus für ungerechtfertigt halte. Die auf einfachen Messungen beruhende Bestätigung des Princips der Erhaltung der Energie in der galvanischen Kette, welche Hr. Exner geliefert hat, kann deshalb nur höchst willkommen sein.

Andererseits kann ich durchaus nicht finden, dass die von Hrn. Exner gewonnenen Resultate den bisher üblichen Anschauungen so vollständig zuwider laufen, wie er glaubt, und dass da, wo sie wirklich von denselben abweichen, es unbedingt nöthig ist, das bisher Gewonnene als unrichtig fallen zu lassen. Im Folgenden will ich diejenige Reihe galvanischer Erscheinungen, welcher auch Hr. Exner sein besonderes Augenmerk zugewandt hat, die Erscheinungen der galvanischen Polarisation und der electromotorischen Kraft der Gase, in dieser Beziehung näher betrachten.

Zuvörderst muss ich vorausschicken, dass die Ansicht, welche ich über diese letztgenannte Kraft ausgesprochen habe, etwas Gemeinsames hat mit der Ansicht des Hrn. Exner.

„Das führt uns auch zu einer andern, bisher gar nicht beachteten und, wie mir scheint, sehr wichtigen Thatsache", sagt derselbe[4]), „dass nämlich die Gase, die im Electrolyten frei werden, überhaupt gar nichts mehr mit der Polarisation zu thun haben; nur durch ihr Verschwinden als Gase erzeugen Wasserstoff und Sauerstoff eine Polarisation." Und in einer zwei Monate früher erschienenen Arbeit[5]) sage ich: „Ich glaube, hiernach behaupten zu dürfen, dass wir es streng genommen mit einer electromotorischen Kraft der Gase nie zu thun haben, sondern entweder mit Spannungsdifferenzen,

1) Bosscha, Pogg. Ann. **103.** p. 506. 1858.
2) Bosscha, Pogg. Ann. **103.** p. 503. 1858.
3) Svanberg, Pogg. Ann. **78.** p. 290. 298. 1848.
4) Exner, Wien. Ber. p. 42. 11. Juli 1878.
5) Beetz, Münch. Ber. 4. Mai 1878. Wied. Ann. **5.** p. 18. 1878.

welche durch verschiedenartige Leitungsflüssigkeiten hervorgerufen werden, oder mit Veränderungen der Metalle durch solche Gase, welche ihren gasförmigen Zustand durch Occlusion in den Metallen oder durch Condensation an deren Oberfläche ganz aufgegeben haben." Die Gase als solche betrachten wir beide also als unbetheiligt an der Erregung electromotorischer Kräfte, unter dem „Verschwinden" der Gase als solche haben wir uns freilich Verschiedenes gedacht. Nach Hrn. Exner besteht dasselbe in der Verbindung der Gase untereinander, z. B. des Wasserstoffs mit dem Sauerstoff, eine Ansicht, die schon öfter ausgesprochen, aber immer wieder aufgegeben worden ist; denn die Vereinigung beider Gase wird ja bekanntlich nur beobachtet, wenn das Gaselement in sich geschlossen ist; es kann sich in der offenen Kette also nur um die Tendenz zu einer solchen Vereinigung handeln. Diese Tendenz als Maass und sogar als Quelle der electromotorischen Kraft anzunehmen, ist schon von Schönbein[1]) vorgeschlagen worden; eine solche Annahme ist mit dem Princip von der Erhaltung der Energie durchaus vereinbar und führt ebenfalls darauf, die Verbindungswärme als Maass der electromotorischen Kraft anzuerkennen. Auch die Bemerkung, dass bei näherer Betrachtung der Unterschied zwischen dem Strome einer Hydrokette und dem der Polarisation vollkommen verschwinde, findet gewiss allgemeine Zustimmung; von den Contactelectrikern sind beide immer von demselben Gesichtspunkte aus behandelt und die electromotorischen Kräfte der Polarisation nach Poggendorff's Vorgang[2]) algebraisch zu den primären addirt worden. Dagegen ist mir die Verbindung des Polarisationsstromes mit dem primären Strome, wie sie Hr. Exner gibt[3]), nicht recht verständlich: „man kann sagen, dass der Polarisationsstrom ein ebenso integrirender Bestandtheil bei der Electrolyse ist, wie der primäre Strom selbst. Es ist eine Electrolyse ohne dem einen ebenso wenig denkbar als ohne dem andern." Man kann doch wohl nicht

1) Schönbein, Pogg. Ann. **43.** p. 89. 1838.
2) Poggendorff, Pogg. Ann. **47.** p. 528. 1846.
3) Exner, Wien. Ber. p. 8. 9. Mai 1878.

von der gleichzeitigen Existenz zweier Ströme im Kreise einer Kette sprechen, in welchem eine Electrolyse stattfindet. Im ganzen Kreise ist ein bestimmtes Gefälle vorhanden, in welchem an zwei Stellen ein Sprung stattfindet, der Strom aber, der dadurch entsteht, ist ein einziger, und von einem Polarisationsstrome als solchen kann ich mir nur dann eine Vorstellung machen, wenn die Electroden unter sich verbunden werden.

Was den quantitativen Betrag der Polarisation betrifft, so hat Hr. Exner gewiss vollkommen Recht, wenn er die Abweichungen in den von verschiedenen Physikern darüber gemachten Angaben vorzugsweise der mangelhaften Beachtung der die Electrolyse begleitenden Nebenumstände (Plattengrösse, Beschaffenheit der Zersetzungsflüssigkeit, secundäre chemische Vorgänge u. s. w.) zuschreibt. Wenn es sich nur um die Bestimmung des Polarisationsmaximums handelte (und das war der am häufigsten behandelte Fall), so waren indess diese Abweichungen gar nicht so erheblich; ich habe z. B. für die Polarisation von Platinplatten in verdünnter Schwefelsäure gezeigt, dass die von den verschiedenen Beobachtern gefundenen Resultate fast vollkommen übereinstimmen, wenn man zufällig untergelaufene Irrthümer beseitigt.[1]) Ich habe ferner, wie jetzt Hr. Exner, darauf aufmerksam gemacht, dass wohl der über Erwarten hohe Betrag dieses Polarisationsmaximums der Bildung von Wasserstoffsuperoxyd zuzuschreiben sei.[2]) Auch Bosscha[3]) hat dieser Erscheinung eine längere Betrachtung gewidmet. Wenn es sich um Polarisationen handelte, welche diesen Maximalwerth nicht erreichten, so sind allerdings recht verschiedene Angaben gemacht worden, und vor allem ist es richtig, dass gewöhnlich der Stromstärke, durch welche, und der Zeit, in welcher die Polarisation hervorgerufen wurde, mehr Aufmerksamkeit geschenkt worden ist, als der electromotorischen

1) Beetz, Pogg. Ann. **78.** p. 35. 1849.

2) Beetz, Pogg. Ann. **90.** p. 64. 1853. Ich bemerke dazu, dass diese Arbeit zu der Zeit erschien, als man nach Baumert Ozon als ein Wasserstoffsuperoxyd betrachtete.

3) Bosscha, Pogg. Ann. **108.** p. 495. 1858.

Kraft der primären Kette. Dennoch ist durchaus die Bedeutung dieser Kraft für die möglicherweise zu erreichende Polarisationsgrösse nicht übersehen worden. Hr. Exner sagt von seinen Beobachtungen:[1]) „Diese Zahlenreihen ergeben das interessante Resultat, dass bei allmählich anwachsender electromotorischer Kraft des primären Stromes die electromotorische Kraft der Polarisation in dem Maasse steigt, dass sie bis zu einem gewissen Momente jederzeit gleich ist der des primären Stromes.“ Dem entsprechend sage ich:[2]) „Der Strom einer Daniell'schen Kette (von der Kraft 21,22) könnte nur so lange Wasserstoff und Chlor aus Salzsäure zwischen Platinelectroden entwickeln, bis deren Ladung ebenfalls = 21,22 ist, während das Maximum der Polarisation 27,99 sein müsste; denn wenn die beiden Kräfte einander gleich sind, hört jede weitere Wirkung auf.“ Und noch viel allgemeiner sagt Crova[3]): „Solange die electromotorische Kraft der Säule, welche den Strom liefert, eine gewisse Grenze nicht erreicht hat, ist die electromotorische Kraft der Polarisation der der Säule gleich und wächst mit ihr von Null bis zu dieser Grenze. Wächst die electromotorische Kraft der Säule über diese Grenze hinaus, so beginnt die Gasentwickelung auf der Oberfläche der Platten, die Kraft der Polarisation fährt fort, immer langsamer und langsamer zu wachsen und strebt schnell einem constanten Werthe zu.“ Hierin ist auch der Satz: „wird ein Theil eines geschlossenen Kreises durch einen Electrolyten gebildet, so wird derselbe zersetzt, sobald im Kreise überhaupt eine electromotorische Kraft thätig ist“[4]), schon als vollständig richtig anerkannt. So strenge Bestätigungen, wie durch Hrn. Exner, hatten die obigen Sätze freilich bisher noch nicht gefunden.

Ich habe den Satz von der Gleichheit der primären und der secundären electromotorischen Kraft benutzt zur Prüfung der Methode der Auffindung der Gesammtpolarisation eines

1) Exner, Wien. Ber. p. 12. 28. Febr. 1878.
2) Beetz, Pogg. Ann. **110.** p. 62. 1853.
3) Crova, Ann. d. chim. et d. phys. (3) **68.** p. 461. 1863.
4) Exner, Wien. Ber. p. 24. 9. Mai 1878.

Electrodenpaares durch Summirung der an den beiden einzelnen Electroden auftretenden Polarisationen; einer Methode, welche Hr. Exner unbedingt verwirft. Der Messapparat, dessen ich mich bediente, war ein Mascart'sches Quadrantelectrometer von Carpentier in Paris. Die Ladung der Nadel geschah durch eine Zamboni'sche Säule; die eine Hälfte der Quadranten war mit dem Erdboden und zugleich mit dem zweiten Pole der Zamboni'schen Säule verbunden, die andere Hälfte mit einem isolirt aufgehängten Drahte, durch den das zu messende Potential dem Electrometer zugeführt werden konnte. Die Ablesung geschah mittelst Spiegel, Fernrohr und Scala, welche in einer Entfernung von 2 m vom Electrometer aufgestellt waren. Durch Vertauschung der Zamboni'schen Säule mit einer schwächeren konnte das Instrument mehr oder weniger empfindlich gemacht werden. Die Aufstellung wurde so geregelt, dass die beiderseitigen durch gleiche Potentiale veranlassten Ablenkungen nahezu gleich waren; Vorversuche hatten ferner gezeigt, dass die Ablenkungen den Potentialen direct proportional genommen werden durften. Die Scala konnte in ihrem Lager so verschoben werden, dass ihr Nullpunkt vor jeder Ablesung genau mit dem Fadenkreuz zusammenfiel. Kehrte nach vollendeter Beobachtung und nach hergestelltem Schlusse zwischen den beiden Quadrantenpaaren die Nadel nicht auf den Nullpunkt zurück, so wurde die Beobachtung verworfen, denn die Annahme eines mittlern Nullpunktes ist wohl da erlaubt, wo die Verschiebung desselben durch Kräfte geschieht, welche während kurzer Zeiten als periodisch veränderlich angesehen werden dürfen, z. B. durch eine magnetische Directionskraft, nicht aber, wenn die Veränderungen rein zufällig sind, z. B. wenn sie durch kleine Verschiebungen in der Bifilaraufhängung veranlasst sind. In der Regel war der Rückgang ein sehr vollständiger. Störungen im Gange des Instruments traten von Zeit zu Zeit ein, konnten aber dann immer schnell beseitigt werden. Unter günstigen Umständen und mit Anwendung der stärksten Säule betrug der Ausschlag, welchen ein Daniell'sches Element hervorbrachte, 140 mm. Ich werde im Folgenden die Ausschläge nicht selbst

angeben, sondern sie mit Zugrundelegung des jedesmal beobachteten Ausschlags, den ein Daniell'sches Element erzeugte, auf dessen electromotorische Kraft = D reduciren.

Die Messmethode, deren ich mich bediente, ist die von Hrn. Fuchs angegebene.[1]) Die electrolysirende Säule a (Taf. IV Fig. 2) wird mit den beiden Electroden e und e_1 verbunden, welche sich in getrennten Gefässen befinden. Die Gefässe sind durch ein Heberrohr miteinander verbunden, dessen Enden durch Pergamentpapier geschlossen sind. Durch mit destillirtem Wasser gefüllte, ebenso geschlossene Heberrohre stehen sie mit den ebenfalls mit Wasser gefüllten Gefässen w und w_1 in Verbindung. In dem Gefässe z befindet sich eine amalgamirte Zinkplatte in concentrirter Zinkvitriollösung. Diese Platte und die Lösung werden nach Bedürfniss durch andere Platten und Lösungen ersetzt. Wird nun die Flüssigkeit in z durch ein wieder mit Wasser gefülltes Rohr mit w verbunden und gleichzeitig e leitend mit dem Erdboden B, die Zinkplatte dagegen mit dem Electrometer E in Verbindung gebracht, so wird die Polarisation der Electrode allein, und zwar während der Dauer des electrolysirenden Stromes gemessen; ebenso wird die Polarisation von e_1 allein gemessen, wenn das Wasserrohr von z nach w_1 gelegt und e_1 leitend mit dem Boden verbunden wird. Die Summe der beiden erhaltenen Polarisationen stellt (nach bisheriger Ansicht) die Gesammtpolarisation dar. Die Anordnung des Apparates sichert wohl vor dem Einwande, dass ein Zweig des zwischen e und e_1 circulirenden Stromes die electrometrische Messung stören könne. Bei den nächsten Versuchen befanden sich in e, e_1 und dem beide verbindenden Rohre immer dieselben Flüssigkeiten, und waren die beiden Electroden an Substanz, Grösse und Gestalt einander so gleich als möglich. Um die Gesammtpolarisation zu finden, ist es gar nicht nöthig, die vor dem Eintritt der Polarisation vorhanden gewesene Spannungsdifferenz zwischen dem in z befindlichen Metalle und dem Metalle der Electrode zu kennen. Bestehen die Electroden aus Platin, welches in

1) Fuchs, Pogg. Ann. **156.** p. 156. 1875.

verdünnte Schwefelsäure taucht, und nennen wir abgekürzt die ursprüngliche Spannungsdifferenz zwischen Zink in Zinkvitriollösung und Platin in verdünnter Schwefelsäure $Zn|Pt$, die Spannungsdifferenz zwischen Zn und durch Sauerstoff polarisirtes Platin $Zn|Pt_O$ und zwischen Zink und durch Wasserstoff polarisirtes Platin $Zn|Pt_H$, so ist die Gesammtpolarisation $Pt_O|Pt_H = Zn|Pt_O - Zn|Pt_H$, sodass der Werth $Zn|Pt$ ganz ausser Betrachtung bleibt. Das ist, wenigstens zunächst, sehr wünschenswerth, denn wie dieser wahre Werth zu bestimmen ist, ist auch streitig. Die für die Versuche angewandten Platinplatten und Drähte wurden zuerst in Salpetersäure, dann in Wasser ausgekocht, ausgeglüht und dann in der verdünnten Schwefelsäure, welche als Electrolyt diente, ausgekocht. Die benutzten Kohlen waren Stäbe von Gaudouin in Paris, von ausserordentlich gleichmässiger Structur. Sie wurden ebenfalls zuerst in Salpetersäure, dann in Wasser und zuletzt in der verdünnten Salzsäure, in der sie als Electroden dienen sollten, ausgekocht. Als primäre Kette diente bald ein Daniell'sches, bald ein Grove'sches Element. Die electromotorische Kraft derselben wurde vor und nach dem Versuche gemessen und der Mittelwerth als der richtige angenommen.

In der folgenden Tabelle enthält die Spalte:

„Electroden" die Angabe über die in e und e_1 eintauchenden Platten, Drähte oder Stäbe,

„Flüssigkeit" die in e und e_1 und dem Verbindungsrohre enthaltene Flüssigkeit, und zwar entweder H_2SO_4 = verdünnte Schwefelsäure (1:20) oder HCl = verdünnte Salzsäure (1:10),

„Stromquelle" enthält die Angabe des zersetzenden Elementes,

„a" die electromotorische Kraft desselben für 1 $D = 1$,

„z" das im Gefässe z befindliche Metall und die Flüssigkeit, in welche es taucht, die Lösungen jedesmal gesättigt genommen,

„p" gibt die Polarisationen an, welche stattgefunden haben,

„e" und „e_1" die Spannungsdifferenzen zwischen z einer-

seits und e oder e_1 andererseits, also die Werthe $Zn|Pt_O$, $Zn|Pt_H$ u. s. w., und endlich

„a_1“ die electromotorische Kraft dieser Polarisation, also die Differenz $e - e_1$.

Electroden	Flüssigkeit	Stromquelle	a	z	p	e	e_1	a_1
Kohlenstäbe	HCl	1 Daniell	1,00	C, HCl	$C_{Cl}\|C_H$	0,44	−0,56	1,00
„	„	„	1,00	$Zn\|ZSO_4$	$C_{Cl}\|C_H$	1,65	0,66	0,99
„	„	„	1,00	$Cu\|CuSO_4$	$C_{Cl}\|C_H$	0,65	−0,35	1,00
„	„	„	1,00	$Ag\|AgNO_3$	$C_{Cl}\|C_H$	0,35	−0,64	0,99
„	„	1 Grove	1,64	$Zn\|ZSO_4$	$C_{Cl}\|C_H$	1,90	0,31	1,59
„	H_2SO_4	1 Daniell	1,00	$Zn\|ZSO_4$	$C_O\|C_H$	1,77	0,80	0,97
Platinplatten	„	„	1,00	$Zn\|ZSO_4$	$Pt_O\|Pt_H$	1,99	1,00	0,99
„	„	1 Grove	1,67	$Zn\|ZSO_4$	$Pt_O\|Pt_H$	2,16	0,52	1,64
Wollaston'sche El.	„	1 Daniell	1,00	$Zn\|ZSO_4$	$Pt_O\|Pt_H$	2,01	1,04	0,97
„	„	1 Grove	1,69	$Zn\|ZSO_4$	$Pt_O\|Pt_H$	2,31	0,71	1,60
Platinplatten	„	„	1,69	$Cu\|CuSO_4$	$Pt_O\|Pt_H$	1,29	−0,34	1,63

Diese Zahlen können keinen Zweifel darüber lassen, dass die Methode der getrennten Bestimmung der Polarisation an den einzelnen Electroden ebenfalls zum Ziele führt. Von vorn herein verdient sie sogar den Vorzug vor der Methode der Wippe, weil bei letzterer vorausgesetzt wird, dass während der Zeit des Umlegens der Wippe die Polarisation nur unmerklich abnimmt. Die Uebereinstimmung zwischen den nach beiden Methoden angestellten Messungen scheint aber diese Annahme wirklich zu rechtfertigen. Ich habe die Methode der getrennten Messung vielfach angewandt; da es aber hier nicht meine Absicht ist, neue Angaben über Polarisationsgrössen beizubringen, so will ich nur Einiges beiläufig erwähnen. Man kann den Einfluss der Stromdichte auf die einzelnen Electroden sehr gut erkennen: als zur Zersetzung von verdünnter Schwefelsäure durch ein Grove'sches Element von der Kraft $a = 1{,}66\,D$ eine Platinplatte von 30 qcm einseitiger Oberfläche und ein dünner Platindraht angewandt wurden, war die Gesammtpolarisation a_1 immer $= 1{,}60\,D$, die Platte mochte als Anode oder als Kathode dienen. Die Einzelpolarisationen waren aber in beiden Fällen verschieden. Wurde der Sauerstoff

an der Platte entwickelt, so war $e = 2{,}12$ und $e_1 = 0{,}52$, wurde derselbe am Draht entwickelt, so war $e = 2{,}32$ und $e_1 = 0{,}70$. Im letzteren Falle war die Bildung von Wasserstoffsuperoxyd stärker gewesen.

Wurde die Electrolyse durch Ströme von grösserer Intensität und grösserer electromotorischer Kraft bewirkt, so ergaben sich die Maximalwerthe der Gesammtpolarisation ungefähr in derselben Höhe, wie sie Hr. Exner mittelst der Wippe fand. Ueber 2,13 *D* fand ich diese Polarisation zwischen Platinplatten mit 3 qcm. einseitiger Oberfläche in verdünnter Schwefelsäure nie, solange die Platten in getrennte Gefässe tauchten. Standen beide Platten in demselben Gefässe, so erhielt ich auch jetzt den Maximalwerth 2,3, wie er durch ältere Messungen gewöhnlich gefunden wurde. Auch Tait[1]) hat mittelst des Quadrantelectrometers und der Wippe denselben Werth bei Anwendung einer zersetzenden Batterie von acht Grove'schen Elementen gefunden, während er, übereinstimmend mit mir, die durch ein Grove'sches Element erzeugte Polarisation = 1,64 *D* angibt.

Ich komme nun zu der Frage: Was hat man sich unter einer einseitigen Polarisation zu denken? Die Antwort darauf habe ich schon oben angeführt; soweit die Ionen gasförmige Körper sind, habe ich die durch sie hervorgebrachte electromotorische Erregung beschränkt auf ihren condensirten, absorbirten oder occludirten Zustand. Dass es hierbei nicht gleichgiltig ist, aus welchen Electrolyten die Gase entwickelt werden, wie Hr. Exner bemerkt, ist gewiss richtig. Wir wissen ja auch, z. B. durch die ebenfalls mit dem Quadrantelectrometer ausgeführten Versuche von Peirce[2]), dass die electromotorischen Kräfte der Gase sich mit der angewandten Leitungsflüssigkeit ändern. Zu dieser, durch die sogenannte electromotorische Kraft der Gase hervorgebrachten Polarisation kommen indess noch eine ganze Reihe von Veränderungen sowohl der Electroden selbst, als

1) Tait, Phil. Mag. (4) **38.** p. 246. 1869. Durch ein Versehen steht bei Citirung dieser Arbeit in meiner Abhandlung Wied. Ann. **5.** p. 8 1878 und Münch. Sitzungsber. 1878 p. 147 Graham statt Tait.

2) Peirce, Wied. Ann. **8.** p. 98. 1879.

der Umgebung derselben, die ich bei einer früheren Gelegenheit schon angedeutet habe.[1]) Manche dieser Veränderungen pflegte man sonst kaum mit dem Namen „Polarisation" zu belegen: z. B. lässt sich bei der Zersetzung von Kupfervitriollösung zwischen Platinelectroden dieser Begriff im älteren Sinne nur auf die Anode anwenden, während die Kathode, die sich mit Kupfer bedeckt, einfach zu einem anderen Metalle wird. Es soll also hier auch nur von der Wirkung der ursprünglich gasförmigen Ionen die Rede sein. Hr. Exner sagt darüber[2]): „Es ist eine bekannte Thatsache, dass eine reine Platinplatte und eine mit Wasserstoff beladene einander im Wasser gegenübergestellt einen Polarisationsstrom liefern; .... es ist ein solcher aber niemals beobachtet worden; der Strom, von dem ich oben als von einer Thatsache sprach, ist immer nur im gewöhnlichen Wasser beobachtet worden, und ich ziehe es keinen Moment in Zweifel, dass derselbe seinen Ursprung der Oxydation des Wasserstoffs durch im Wasser gelösten Sauerstoff verdankt." Dieser Satz ist ebenso schwer zu beweisen, wie zu widerlegen. Die Beobachter, welche sich mit der electromotorischen Kraft der Gase beschäftigt haben, sind doch wohl nicht ganz so nachlässig gewesen, wie Hr. Exner meint. In der Beschreibung unserer Versuche ist überall darauf hingewiesen, dass die Leitungsflüssigkeit durch Auskochen von Luft befreit wurde, also kein „gewöhnliches" Wasser war. Aber freilich ganz luftfrei ist das Wasser dadurch nicht geworden. Ich habe jetzt folgenden Versuch angestellt: In die beiden Schenkel eines U-förmig gebogenen Rohres wurden zwei Platindrähte eingeschmelzt. In der convexen Fläche der Biegung des Rohres befand sich eine Oeffnung. Die Drähte wurden, durch Abkochen in Salpetersäure, Wasser und verdünnter Schwefelsäure gereinigt, auf die gewöhnliche Weise platinirt, zur Entfernung etwa aufgenommenen Wasserstoffs als Anode benutzt und abermals in verdünnter Schwefelsäure abgekocht. Nun wurde das Rohr ganz in verdünnte Schwefelsäure gelegt, die es

1) Beetz, Pogg. Ann. **94.** p. 204. 1855.

2) Exner, Wiener Sitzungsber. v. 11. Juli 1878. p. 43.

vollkommen füllte; die Säure wurde zum Sieden gebracht, wobei das Rohr so gelegt war, dass austretende Gase aus der Oeffnung entweichen mussten. Dann wurde das ganze Gefäss mit Flüssigkeit und Rohr in den Recipienten einer Quecksilberluftpumpe gebracht, die Flüssigkeit durch Evacuiren längere Zeit im Sieden gehalten und endlich das Ganze zwei Tage lang im Vacuum gelassen. Sobald das Gefäss aus dem Vacuum genommen war, wurde der eine Schenkel mit electrolytisch entwickeltem Wasserstoff gefüllt und die Oeffnung sofort unter Wasser mit Baumwachs luftdicht verklebt. Nun wurde der eine Draht mit dem Erdboden, der andere mit dem Electrometer verbunden. Es zeigte sich eine Potentialdifferenz von 0,50 *D*. Nach einer Minute war dieselbe auf 0,60, nach fünf Minuten auf 0,70, nach 10 Minuten auf 0,82 *D* gestiegen, bei welcher Höhe sie nahezu constant war. Nach einer halben Stunde zeigte sich eine Abnahme der Differenz. Dieser Vorgang entspricht ganz dem zu erwartenden: das Platin brauchte eine Zeit, um Wasserstoff in sich aufzunehmen; dann aber war der Betrag der Spannungsdifferenz auch derselbe, den früher ich (0,814 *D*) und neuerdings Peirce (0,807 *D*) gefunden haben. Allmählich vertheilt sich durch Diffusion Wasserstoff auch bis zum anderen Drahte, und damit muss die Potentialdifferenz abnehmen. Man kann gegen diesen Versuch wieder einwenden, die Luft sei eben doch noch nicht aus der Flüssigkeit und der Sauerstoff noch nicht aus dem Platinschwamm entfernt gewesen. Mittel, das noch besser zu bewirken, sind mir nicht bekannt.

Der Einfluss der Luft, bezüglich des freien Sauerstoffs, in der Leitungsflüssigkeit auf die Electricitätserregung in der Kette ist schon oft in Betracht gezogen worden, und zwar ist derselbe bald als unmittelbar die Erregung fördernd, bald als die Polarisation vermindernd angesehen worden. Ich habe die Ergebnisse der älteren lange Zeit vor de Fonvielle und Deherain (welche Hr. Exner citirt) angestellten Beobachtungen von Biot und Cuvier, sowie der späteren von Adie und die von de la Rive darauf gebauten Schlüsse zusammengestellt und dann weiter

aus meinen eigenen Versuchen den Schluss gezogen, dass der Sauerstoff nicht primär zur Stromerzeugung beitrage, sondern secundär durch Beseitigung des Wasserstoffes an der negativen Platte des Elementes.[1]) Hr. Exner, der das Vorhandensein einer Spannungsdifferenz zwischen reinem und mit Wasserstoff bekleidetem Platin überhaupt nicht zugibt, bestreitet natürlich auch den Vorgang der Depolarisation und damit auch die Erklärung, welche ich von der depolarisirenden Wirkung der Superoxyde[2]) gegeben habe. „In Wahrheit", sagt er, „wächst die electromotorische Kraft deshalb, weil der Wasserstoff wieder zu Wasser oxydirt wird".[3]) Dasselbe nehme ich doch selbstverständlich auch an; die ganze Depolarisation liegt in der Verhinderung des Auftretens von freiem Wasserstoff, und dies Auftreten ist eben dann verhindert, wenn sich derselbe mit dem vorhandenen Sauerstoff zu Wasser verbindet. Der Unterschied zwischen unseren Anschauungen besteht nur wieder darin, dass ich die durch die Depolarisation eingetretene Veränderung in der Potentialdifferenz in Betracht gezogen habe, Hr. Exner aber die derselben äquivalente Veränderung im Wärmeprocesse. Dasselbe kann man ferner sagen von den Vorgängen in den bisher sogenannten inconstanten Ketten. Hr. Exner berechnet die electromotorische Kraft eines in verdünnte Schwefelsäure tauchenden Zn|Pt-Paares aus der bei der Auflösung von Zink in verdünnter Schwefelsäure erzeugten und der bei der Zersetzung von Wasser verbrauchten Wärme[4]); sie muss nach dieser Rechnung $= 0{,}732\,D$ sein, und in der That zeigt sich, dass ein derartiges Element, nachdem es einige Zeit geschlossen war, die Kraft $0{,}73\,D$ annimmt. Hieraus schliesst nun Hr. Exner, dass es gar keine inconstanten Elemente gebe, dass vielmehr die viel grösseren Anfangskräfte, welche an solchen Elementen beobachtet worden sind, dem Umstande zuzuschreiben waren, dass die Leitungsflüssigkeit Sauerstoff enthielt, der zur

1) Beetz, Pogg. Ann. **74.** p. 381. 1848.
2) Beetz, Pogg. Ann. **150.** p. 535. 1873.
3) Exner, Wien. Ber. p. 18. 11. Dec. 1879; Wied. Ann. **10.** p. 265. 1880.
4) ibid. p. 3.

Verbrennung des Zinks verbraucht wird. Ist das geschehen, so tritt erst die wahre, dem chemischen Processe aequivalente electromotorische Kraft des Elementes auf, und diese ist eben 0,73 *D*. Ich kann mich mit der sich hieran anschliessenden Erörterung nicht einverstanden erklären. Hr. Exner meint nämlich, wenn, wie aus meinen Angaben hervorgehe, die durch Polarisation des Platins in einem Zn|Pt-Elemente erzeugte Gegenkraft = 0,81 *D* wäre, so müsste die effective Kraft desselben negativ sein, was eine Unmöglichkeit wäre. Gewiss wäre das eine Unmöglichkeit, aber der Vorgang ist ja auch ganz anders gedacht. Entweder ist die wahre electromotorische Kraft des Elementes = 0,73 *D* und die höher beobachtete nur der Wirkung des vorhandenen Sauerstoffes zu verdanken, oder die wahre Kraft ist eben jene hohe, welche erst durch die Wasserstoffpolarisation auf 0,73 *D* hinabgedrückt wird. Im ersteren Falle hat der Sauerstoff, solange er noch vorhanden ist, dazu gedient, von der im Elemente erzeugten Wärmemenge nicht soviel wieder verbrauchen zu lassen, wie nachher verbraucht wird, wenn der Sauerstoff erschöpft ist; im zweiten Falle hat sich die Spannungsdifferenz $Pt_H|Pt$ von der Zn|Pt subtrahirt, nicht von 0,73 *D*, sondern von der beobachteten Anfangskraft; das numerische Resultat muss aber beidemal dasselbe bleiben. Um dies zu prüfen, lege ich die von mir vor einunddreissig Jahren gefundenen Zahlen zu Grunde, wie sie von Wiedemann auf die Danielleinheit überrechnet angegeben sind.[1]) Hiernach ist die electromotorische Kraft Zn|Pt = 1,539 *D*, die Kraft $Pt_H|Pt$ = 0,814 *D*, also die Differenz = 0,725 *D*. Wird das Niederschlagen von Zink auf der Platinplatte vermieden, so kommt auch nach meinen Versuchen die electromotorische Kraft der Zinkplatinkette nicht weiter herunter, und da 0,73 *D* die der Auflösungswärme des Zinkes entsprechende electromotorische Kraft ist, so scheint es in der That, als sei diese Wärme das einzige Maass, bezüglich die einzige Quelle der Kraft nicht nur der sogenannten inconstanten Zinkplatinketten, sondern aller solcher Ele-

1) Wiedemann, Galvanismus I. p. 384 u. 407.

mente, in denen das positive Metall Zink, das negative irgend ein anderes ist, das dann lediglich die Rolle eines Leiters zu spielen hat, an der Erregung der Electricität aber gar keinen Antheil nimmt. Die Versuche, welche Hr. Exner mit einer Zinkkupferkette angestellt hat, welche ebenfalls genau die electromotorische Kraft 0,73 *D* zeigte, haben diese Anschauung bestätigt. Hier weichen nun aber meine Erfahrungen von denen des Hrn. Exner ab. Ich führte eine Reihe von Messungen aus, bei denen eine amalgamirte Zinkplatte in ein Gefäss mit verdünnter Schwefelsäure tauchte. Durch ein weites, unten geschlossenes Heberrohr war dieses Gefäss mit einem zweiten verbunden, das dieselbe Flüssigkeit enthielt, und in welches abwechselnd eine frisch gereinigte Platinplatte und eine ebenfalls frisch gereinigte Kupferplatte getaucht wurde. Im letzten Versuch war das Kupfer galvanoplastisch niedergeschlagen worden. Die Platten waren 1 cm breit und tauchten 4 cm tief in die Flüssigkeit. Die beobachteten electromotorischen Kräfte waren:

Zinkplatin			Zinkkupfer.		
offen	geschlossen	*p*	offen	geschlossen	*p*
1,51	0,72	0,79	0,99	0,45	0,54
1,49	0,71	0,78	0,99	0,46	0,53
1,50	0,71	0,79	0,99	0,44	0,55
1,56	0,73	0,83	0,95	0,47	0,48
Mittel 1,52	0,72	0,80	Mittel 0,98	0,46	0,54

Die in der Spalte „geschlossen“ stehenden Zahlen wurden beobachtet, wenn das Element drei Minuten lang geschlossen gewesen war. Bei diesem kurzen Schlusse war an ein Ueberwandern des Zinks noch nicht zu denken. Der dritte und vierte Versuch wurde ausserdem mit ganz neuen Säuren ausgeführt. Ich vermuthete, dass der Grund, weshalb ich die Kraft Zn | Cu kleiner gefunden hatte als die Zn | Pt, in einer Oxydation des Kupfers durch directen Angriff zu suchen sei, und ersetzte deshalb die Kupferplatte durch eine Silberplatte, bei welcher eine solche Befürchtung ausgeschlossen ist. Die Messungen ergaben:

Zinksilber.

offen	geschlossen	p
1,26	0,51	0,75
1,27	0,54	0,73
1,20	0,52	0,68
1,21	0,49	0,72
Mittel 1,23	0,51	0,72

Also auch das Zinksilberelement geht in seiner Kraft weiter hinab als das Zinkplatinelement.

Um in der Wahl des negativen Metalles noch grösseren Spielraum zu gewinnen, wählte ich als positives statt des Zinks das Natrium. In ein poröses Thongefäss wurde ein dicker Brei von Natriumamalgam gebracht, in welches ein Platindraht tauchte. Die übrige Zusammenstellung war dieselbe wie zuvor, und es konnten nun als negative Metalle Platten von Platin, Silber, Kupfer oder amalgamirtem Zink angewandt werden. Gefunden wurde:

Natriumplatin.

offen	geschlossen	p
2,41	1,37	1,04
2,31	1,34	0,97
2,25	1,30	0,95
2,28	1,32	0,96
Mittel 2,31	1,33	0,98

Natriumsilber.

offen	geschlossen	p
2,04	1,20	0,84
2,16	1,30	0,86
2,00	1,18	0,82
2,02	1,21	0,84
Mittel 2,05	1,22	0,83

Natriumkupfer.

1,74	1,12	0,62
1,86	1,21	0,65
1,77	1,09	0,66
1,79	1,14	0,65
Mittel 1,79	1,14	0,65

Natriumzink.

0,77	0,66	0,11
0,77	0,67	0,10
0,78	0,70	0,08
0,82	0,70	0,12
Mittel 0,78	0,68	0,10

Vergleicht man die Kräfte, welche an den mit Zink construirten Elementen gefunden wurden, mit denen der zugehörigen Natriumelemente, so findet man das auf Combinationen von Metallen mit Flüssigkeiten ausgedehnte Gesetz der Spannungsreihe bestätigt. Die oben gefundenen Mittelwerthe sind nämlich für die Combinationen:

		Pt	Ag	Cu	
offen	Na	2,31	2,05	1,79	
	Zn	1,52	1,23	0,98	
		0,79	0,82	0,81	Na | Zn gefunden 0,78
geschlossen	Na	1,33	1,22	1,14	
	Zn	0,72	0,51	0,46	
		0,61	0,71	0,68	Na | Zn gefunden 0,68.

Der Unterschied zwischen den electromotorischen Kräften eines geschlossenen Natriumplatin- und eines geschlossenen Natriumzinkelementes ist so gross, dass an einen zufälligen Grund der Abweichung gar nicht gedacht werden kann. Dagegen ist das in Rede stehende Beispiel ganz dazu geeignet, die Frage zu erörtern, ob nicht durch Oxydation auch der negativen Platte die geringere electromotorische Kraft sich erklären lasse. Wenn sich nämlich nicht nur das Natrium, sondern auch das Zink in der verdünnten Schwefelsäure auflöst, so kommt zur Berechnung der electromotorischen Kraft des Elementes nicht nur die Auflösungswärme des Natriums, sondern auch die des Zinks in Betracht. Ich amalgamirte zwei gleich grosse Zinkplatten ganz gleichförmig und verband die eine in der angegebenen Weise mit Natriumamalgam zu einem Elemente, das ich 17 Stunden hindurch mit kleinem Widerstande geschlossen liess, während die andere Platte dieselbe Zeit hindurch in ein Gefäss mit verdünnter Schwefelsäure tauchte, ohne sich in irgend einem galvanischen Verbande zu befinden. Nach der angegebenen Zeit werden die Flüssigkeiten aus der Umgebung beider Zinkplatten geprüft. Die in der Kette gestandene Flüssigkeit zeigte, mit Ammoniak übersättigt und mit Schwefelammonium versetzt, kaum eine Spur einer Trübung, die andere gab einen dicken Niederschlag von Schwefelzink. Eine Wiederholung des Versuchs ergab das gleiche Resultat. Nur wenn Zinkplatte und Natriumamalgam sich nahe beieinander in demselben Gefässe befanden, wurde auch das Zink in der Kette angegriffen; die Säure hatte sich dabei lebhaft erhitzt. Es ist also nachgewiesen, dass auch das Zink, wenn es die Rolle des negativen Metalles in der Kette spielt, von verdünnter Schwefelsäure nicht angegriffen wird, oder, um den sonst üblichen Ausdruck zu gebrauchen, dass es durch seine Verbindung mit einem positiven Metalle vor Angriff geschützt wird. Demnach ist in dem Verhalten des Zinks und des Platins dem Natrium gegenüber ebenso wenig ein Unterschied zu vermuthen wie in dem des Silbers und des Kupfers. Alle sollten nur die Rolle von Leitern spielen, und die electromotorische Kraft des Natriumzinkelementes berechnete

sich ganz ebenso wie die des Natriumplatinelementes. Ich bin hiernach ganz ausser Stande, die grossen Unterschiede, welche ich gefunden habe, anders zu erklären, als man es bisher gethan hat, mit Rücksicht auf die verschiedenen Rollen, welche dem negativen Metalle selbst zugewiesen sind.

Ich habe meinen vorstehenden Tabellen noch eine Spalte „*p*" beigefügt. Dieselbe gibt jedesmal die Differenz der zwei kurz hintereinander beobachteten Werthe für die electromotorische Kraft der offenen und der geschlossenen Elemente, d. h. nach der hergebrachten Ansicht die Werthe der Polarisation der negativen Platte durch Wasserstoff. Beim stärkern Natriumplatinelement ist sie stärker als beim schwächern Zinkplatinelement, am Platin ist sie stärker als am Silber, am Kupfer oder gar am Zink. Wurden die Elemente nach dem Schlusse geöffnet, so stellte sich die ursprüngliche electromotorische Kraft bei den Silber-, Kupfer- und Zinkelementen sehr bald, bei den Platinelementen nur ganz langsam wieder her. Während z. B. ein Natriumzinkelement offen die Kraft 0,77 D., geschlossen 0,66 D. hatte, zeigt es nach einer Oeffnung von $^1/_2$ Minute schon wieder 0,76 D. Ein Natriumplatinelement, das offen die Kraft 2,25 D., geschlossen 1,30 D. hatte, war in $^1/_2$ Minute nur bis 1,53 D., in 3 Minuten nur bis 1,55 D. in die Höhe gekommen, nach älterer Anschauung deswegen, weil das Platin Wasserstoff occludirt enthielt, die anderen Metalle nicht. Man kann indess die Occlusion des Wasserstoffs auch zugeben, ohne dessen polarisirende Kraft anzuerkennen. Die verschiedene Geschwindigkeit, in der sich die Elemente erholen, wäre dann so zu deuten, dass an den anderen Metallen, die keinen Wasserstoff occludiren, der aus der Luft in die Flüssigkeit eintretende Sauerstoff sich eher merklich mache als am Platin.

Nach den gewonnenen Resultaten fragt es sich nun weiter, ob nicht der Begriff einer Polarisation als einer selbstständig, und zwar an den einzelnen Platten auftretenden electromotorischen Kraft doch aufrecht erhalten werden dürfe. Nach Hrn. Exner hat sie „gar keinen Sinn." Er verwirft die Messung der an den einzelnen Electroden auftretenden Polarisationen

auf das Bestimmteste. „Das Vorstehende", sagt er[1]), „genügt auch zur Charakterisirung der so oft angewendeten Methode für Bestimmung der Polarisation in nur einem Gase, z. B. des Platins in Wasserstoff, dadurch, dass der Sauerstoff zur Oxydation der zweiten Electrode verwendet wird; es ist für den Werth der Polarisation eben keineswegs gleichgültig, welches Metall oxydirt, resp. bei Bildung der Polarisation wieder reducirt wird. Ich kann nicht finden, dass Hr. Exner sich von der Richtigkeit dieses Satzes auf experimentellem Wege überzeugt hat; es scheint nicht so. Da der Satz für die ganze Annahme einer selbständigen Polarisation ein fundamentaler ist, so schien mir doch die Anstellung einer Probe dringend nothwendig. Die folgenden Versuchsreihen, welche diese Probe zu liefern bestimmt sind, unterscheiden sich von den früher beschriebenen dadurch, dass in den Stromkreis zwei Zersetzungsapparate hintereinander eingeschaltet werden, und dass die zu einem Zersetzungsapparate gehörigen Electroden nicht immer einander gleich waren. Der eine Apparat ist aus den Zellen e und e_1 (Taf. IV Fig. 3) der andere aus ε und ε_1 zusammengesetzt. Die Heberröhren, welche die beiden zueinander gehörigen Gefässe miteinander verbinden, waren immer mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt. Die Electroden waren bald amalgamirtes Zink in concentrirter Zinkvitriollösung, bald Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung, bald Silber in Silbernitratlösung, bald Platin in verdünnter Schwefelsäure. Die Gefässe e und e_1, ε und ε_1 waren durch Wasserröhren mit den vier Wassergefässen w_1, w_2, w_3 und w_4 verbunden. Sollte nun die Polarisation einer der vier gleichzeitig angewandten Electroden gemessen werden, z. B. die von e, so wurde das zugehörige Wassergefäss w_1 durch ein Wasserrohr mit dem Gefässe z verbunden, das wiederum amalgamirtes Zink und Zinkvitriollösung enthielt, ferner wurde die Verbindung zwischen der betreffenden Electrode e und dem Erdboden B, und die Verbindung von z mit dem Electrometer E hergestellt. Es war

1) Exner, Wien. Ber. p. 44, 11. Juli 1878.

nun leicht, die Polarisation aller vier Electroden nacheinander zu messen. In den folgenden Tabellen sind zuerst die Potentialdifferenzen zwischen der Normalzinkzelle z und den vier der Reihe nach eingeschalteten Electroden angegeben, gemessen, bevor der Stromkreis geschlossen war und kurz bezeichnet durch $z|Zn$, $z|Cu$, $z|Ag$, $z|Pt$, je nachdem die Zellen e, e_1, ε, ε_1 eine der oben angegebenen Combinationen enthielten. Die für diese Versuche benutzten Platinplatten waren nach der Reinigung mit Säuren ausgeglüht, aber nicht als Anoden angewandt worden. In der zweiten Zeile stehen dann die zugehörigen Potentialdifferenzen, gemessen, während der Strom geschlossen war, und bezeichnet durch $z|Zn_O$, $z|Cu_O$, $z|Ag_O$, $z|Pt_O$, wenn die betreffende Electrode mit dem Sauerstoffpole durch $z|Zu_H$ u. s. w., wenn sie mit dem Wasserstoffpole verbunden war. Die dritte Zeile endlich enthält die Potentialdifferenzen zwischen der reinen Electrode und der polarisirten, also $Zn|Zn_O$, $Cu|Cu_O$ u. s. w., d. h. diejenigen Grössen, welche gefunden werden sollten. Die beiden zuerst genannten Electroden bilden immer den ersten Zersetzungsapparat $e\,e_1$, die beiden letzten den zweiten $\varepsilon\,\varepsilon_1$. Alle Zahlen sind auf $D=1$ bezogen.

I. 4 Grove. Electroden $Zn|Pt$ und $Cu|Pt$.

$z\|Zn$	−0,07	$z\|Pt$	1,51	$z\|Cu$	0,98	$z\|Pt$	**1,49**
$z\|Zn_H$	−0,08	$z\|Pt_O$	2,59	$z\|Cu_H$	0,95	$z\|Pt_O$	2,57
$Zn\|Zn_H$	−0,01	$Pt\|Pt_O$	**1,08**	$Cu\|Cu_H$	− 0,03	$Pt\|Pt_O$	**1,08**

II. 4 Grove. Electroden $Zn|Pt$ und $Pt|Pt$.

$z\|Zn$	−0,06	$z\|Pt$	1,41	$z\|Pt$	1,41	$z\|Pt$	**1,41**
$z\|Zn_H$	−0,07	$z\|Pt_O$	2,39	$z\|Pt_H$	0,44	$z\|Pt_O$	**2,39**
$Zn\|Zn_H$	−0,01	$Pt\|Pt_O$	**0,98**	$Pt\|Pt_H$	−0,97	$Pt\|Pt_O$	**0,98**

III. 3 Grove. Electroden $Zn|Pt$ und $Cu|Pt$.

$z\|Zn$	0,02	$z\|Pt$	1,44	$z\|Cu$	1,02	$z\|Pt_H$	**1,43**
$z\|Zn_O$	0,03	$z\|Pt_H$	0,58	$z\|Cu_O$	1,02	$z\|Pt_H$	0,57
$Zn\|Zn_O$	0,01	$Pt\|Pt_H$	**−0,86**	$Cu\|Cu_O$	0,02	$Pt\|Pt_H$	**−0,86**

IV. 3 Grove. Electroden $Zn|Pt$ und $Ag|Pt$.

$z\|Zn$	0,02	$z\|Pt$	1,42	$z\|Ag$	1,35	$z\|Pt$	**1,40**
$z\|Zn_O$	0,04	$z\|Pt_H$	0,57	$z\|Ag_O$	1,36	$z\|Pt_H$	0,58
$Zn\|Zn_O$	0,02	$Pt\|Pt_H$	**−0,85**	$Ag\|Ag_O$	0,01	$Pt\|Pt_H$	**−0,82**

V. 4 Grove. Electroden Zn | Pt und Pt | Pt.

z | Pt	1,35	z | Pt	1,35
z | Pt_H	0,49	z | Pt_H	0,49
Pt | Pt_H	**−0,86**	Pt | Pt_H	**−0,86**

VI. Dieselbe Combination.

z | Pt	1,35	z | Pt	1,35
z | Pt_O	2,36	z | Pt_O	2,37
Pt | Pt_O	**1,01**	Pt | Pt_O	**1,02**

Aus dieser Tabelle ist Folgendes ersichtlich. In einem jeden Strome, also bei gleichbleibender Intensität und gleichbleibender electromotorischer Kraft ist die Polarisation zweier Platinplatten vollständig die gleiche, denselben mag als andere Electrode wieder eine Platinplatte in verdünnter Schwefelsäure, eine Zinkplatte in Zinkvitriollösung, eine Kupferplatte in Kupfervitriollösung oder eine Silberplatte in Silbernitratlösung gegenüberstehen, und zwar gilt das sowohl für die Polarisation durch Sauerstoff als für die durch Wasserstoff. Die erhaltenen Zahlen sind noch immer nicht Maximalwerthe, besonders nicht in den Fällen, wo die primäre electromotorische Kraft durch die entgegenstehende Anordnung der Electroden geschwächt wurde, sie fallen aber fast genau mit den von Gaugain[1]) gefundenen Zahlen zusammen. Was die gleichzeitige Polarisation der gegenüberstehenden Platte von Zink, Kupfer oder Silber betrifft, so erweist sich dieselbe als äusserst gering. Ganz unpolarisirbar ist bei so starken Strömen natürlich auch das Zink nicht mehr, aber immerhin sind diese Polarisationen stets so schwach, dass nur ein äusserst unbedeutender Fehler gemacht worden ist, wenn in älteren Arbeiten nur die Polarisation der einen Electrode gemessen wurde, während man die der anderen ganz beseitigt glaubte. Ich bemerke auch noch, dass alle diese Messungen in eine Zeit fallen, in welcher die Angaben du Bois-Reymond's[2]), welche die geringe Zahl wirklich unpolarisirbarer Combina-

1) Gaugain, Compt. rend. **41.** p. 1166. 1855.
2) Du Boys-Reymond, Berl. Monatsber. p. 443. 1859.

tionen kennen lehrten, noch nicht vorhanden waren. Mag man jetzt die auftretenden Polarisationen definiren wie man will; die Methode ist gerechtfertigt, und die oben angeführten Resultate widersprechen bestimmt dem verwerfenden Urtheile des Hrn. Exner. Ich glaube daher auch die verschiedenen Epitheta ornantia, mit welchen derselbe unsere Methode beehrt hat, als da sind „absurd", „vollkommen unrichtig", „ganz ohne Sinn", als nicht ganz wohl angebracht bezeichnen zu dürfen. Und wenn die Abschwächung der electromotorischen Kraft einer inconstanten Zinkplatinkette vorher zweideutig schien, so kann man wohl etwas Aehnliches von den eben mitgetheilten Versuchsergebnissen nicht sagen. Wollte man auch die Polarisation einer Platinplatte durch Wasserstoff wieder einer Beseitigung des Sauerstoffs zuschreiben, so sehe ich doch nicht, wie man etwas Analoges gegen die Polarisation einer Platinplatte durch Sauerstoff beibringen könnte, welche ebenfalls ganz gleich gefunden wird, die gegenüberstehende Platte mag eine polarisirbare oder eine unpolarisirbare, sie mag Platin, Zink oder Kupfer sein. Ich muss darnach den Begriff der Polarisation überhaupt, wie er bis jetzt allgemein gefasst wurde, auch jetzt noch aufrecht erhalten; auch ist es eine nicht zu unterschätzende Stütze für die hergebrachte Anschauung, dass die auf dieselben basirten ferneren Untersuchungen zu Resultaten geführt haben, die mit der Erfahrung vollständig übereinstimmen. Ich erinnere nur an F. Kohlrausch's Untersuchungen über die electromotorische Kraft sehr dünner Gasschichten.[1])

Es kommt mir nicht in den Sinn, auf Grund der gewonnenen Resultate den Kampf der Contacttheorie gegen die electrochemische wieder aufnehmen zu wollen. Ich würde das für ein sehr verkehrtes Beginnen halten. Ich weise lediglich die unter bestimmten Umständen vorhandenen Potentialdifferenzen nach und zweifle keinen Augenblick daran, dass dem Ausgleiche derselben, dem Strome, ein äquivalenter chemischer Vorgang und ein äquivalenter Wärmeprocess entsprechen wird. Und wenn wir durch die späteren

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. **148.** p. 143. 1872.

Versuche des Hrn. Exner[1]) erfahren, dass auch der Volta'sche Fundamentalversuch, der wohl von keinem Contactelectriker als ein in befriedigender Weise erklärter angesehen wird, sich auf einfache chemische Vorgänge reduciren lässt, so können auch dadurch die Grundanschauungen, welche seit Ohm unseren Vorstellungen vom Zustandekommen des Stromes zu Grunde liegen, nicht zerstört, sondern nur geklärt werden. Nur kann ich nicht zugeben, dass das vorliegende Material schon genüge, um die bekannten Erscheinungen des Galvanismus so einfach als rein chemische Vorgänge darstellen zu können.

München, April 1880.

III. *Schlüssel für electrische Leitungen; von W. Beetz.*

Die Apparate, deren man sich zur schnellen Herstellung und Unterbrechung von Leitungen bei Arbeiten mit galvanischen Strömen zu bedienen pflegt, lassen sich ihrer unzureichenden Isolationsfähigkeit wegen nicht anwenden, wenn es sich um Messung electrischer Potentiale mittelst des Electrometers handelt. Ich bediene mich für diesen Fall eines Schlüssels von folgender Einrichtung.

Auf ein Fussbrett ist eine dicke Hartgummileiste *gg* (Taf IV Fig. 4) festgeschraubt, welche drei Klemmschrauben *a*, *b* und *c* trägt. Mit *a* und *c* sind zwei starke Messingbogen *m* und *n* verbunden, deren freie Enden einander gerade gegenüber stehen. Mit *b* ist eine starke Messingfeder *f* verbunden, welche in ein dickeres Messingblech *p* ausläuft. Die Feder drückt in der Ruhelage *p* gegen *m*. Das Fussbrett trägt weiter eine Säule *s*, in welcher eine Welle *w* mittelst einer Handhabe drehbar ist, sodass sie von unten her durch eine Mutter festgezogen, sich nur mit starker Reibung drehen kann. Auf die Welle ist eine seidene Schnur

1) Exner, Wien. Ber., 17. Juli 1879.

aufgewickelt, deren freies Ende an p befestigt ist. Windet man die Schnur mittelst der Handhabe auf, so legt sich p gegen n fest an; man kann also, ohne irgend welche störende Reibung im Apparate hervorzubringen, eine nach b hinführende Leitung nach Belieben nach a oder nach c hin weiter führen. Für die meisten Zwecke ist es wünschenswerth, zwei solche Schlüssel nebeneinander auf demselben Fussbrett befestigt zu haben.

Ein paar Beispiele mögen die Anwendung dieses Schlüssels vergegenwärtigen: 1) als Commutator, z. B. zur Prüfung der Aufstellung des Electrometers. (Taf. IV Fig. 5) m und m_1 sind untereinander und mit dem Electrometer E verbunden, n und n_1 untereinander und mit dem Erdboden B. Vom Pol α des Normalelementes geht eine Leitung zur Klemmschraube b_1, vom Pol β eine solche nach b. Zieht man p_1 gegen n_1 und lässt p gegen m drücken, so gibt das Electrometer den Ausschlag nach einer Seite. Zieht man p gegen n und lässt p_1 gegen m_1 drücken, so muss es den gleichen Ausschlag nach der andern Seite geben.

2) Es soll die electromotorische Kraft des Normalelementes D verglichen werden mit der eines anderen Elementes x und zwar a) solange dieses geöffnet bleibt, und b) nachdem es geschlossen gewesen ist. (Taf. IV Fig. 6) m und m_1 sind untereinander und mit dem Electrometer, n_1 mit dem Erdboden B verbunden. Vom Pole α des Normalelementes führt eine Leitung nach b, vom Pole β eine zum Erdboden. Ebenso geht vom Pol α_1 eine Leitung nach b_1, von β_1 eine zum Erdboden. Die Platten p und p_1 stehen zunächst in den zwischen den Bogen m und n einerseits und m_1 und n_1 andererseits freibleibenden Räumen, ohne einen der Bogen zu berühren. Mit dem Erddraht (oder dem Pole β_1) ist endlich noch ein Draht h verbunden, den man an m_1 anhaken kann, um das Electrometer zu entladen. Soll nun die electromotorische Kraft von D gemessen werden, so hakt man den Draht h los und lässt durch Nachlassen der Schnur p gegen m drücken und dort festliegen, bis die Ablesung gemacht ist. Dann entladet man das Electrometer nach Zurückziehen von p durch Festhaken von h. Soll die electromotorische

Kraft des offenen Elementes x gemessen werden, so hakt man h los, lässt p_1 fest gegen m_1 anliegen und liest wieder ab. Soll endlich die electromotorische Kraft von x nach erfolgtem Stromschluss gemessen werden, so zieht man p_1 fest gegen n_1 und lässt, während h festgehakt bleibt, den Stromschluss die gewünschte Zeit hindurch dauern, hebt dann h ab und lässt p_1 nur kurz gegen m_1 anschlagen, worauf man es sofort wieder gegen n_1 heranzieht, um den Strom weiter geschlossen zu halten. Durch wiederholtes kurzes Loslassen der Schnur und kurzes Anschlagen von p_1 gegen m_1 erhält man schnell die verlangte Einstellung.

3) Es soll die Potentialdifferenz einer einzelnen polarisirten Electrode gegen eine andere gegebene Platte mit der electromotorischen Kraft der polarisirenden Batterie verglichen werden. (Taf. IV Fig. 7) m und m_1 sind wieder untereinander und mit dem Electrometer verbunden. Weiter sind verbunden: b und n_1 untereinander und mit einem Batteriepol α; der Pol β und die Electrode β_1 mit dem Erdboden, die Electrode α_1 mit der Klemmschraube b_1. Die neutrale Platte z, welche mit dem Zersetzungsapparat durch ein Wasserrohr verbunden ist, kann durch einen in einen Haken endigenden Draht d mit der Electrometerleitung in Verbindung gesetzt werden. Um die primäre electromotorische Kraft zu finden, verfährt man wie vorher, d. h. nach Loshaken von h wird p gegen m angelegt. Darauf wird h wieder befestigt, p zurückgezogen und p_1 fest an n_1 herangezogen. Die Zersetzung geht nun im Voltameter vor sich. Soll dann die einseitige Messung der Polarisation während der Dauer des polarisirenden Stromes vorgenommen werden, so wird h losgehakt, und an dessen Stelle der Haken d befestigt. Um die Potentialdifferenz zwischen der polarisirten und der unpolarisirten Electrode zu finden, muss selbstverständlich vorher dieselbe Operation durchgemacht worden sein, bevor p_1 gegen n_1 angedrückt worden war.

München, April 1880.

IV. *Ueber electrische Ausdehnung; von G. Quincke.*

(Fortsetzung von p. 202.)

II. Verlängerung von Glasröhren durch Electrisiren.

§ 15. Anordnung der Apparate. Nach den im vorigen Abschnitt beschriebenen Versuchen vergrössert sich das Volumen einer hohlen Glaskugel, wenn die beiden leitend gemachten Oberflächen auf verschiedene electrische Spannung gebracht werden.

Daraus würde folgen, dass ein hohler Glascylinder (Glasröhre oder hohler Glasfaden) sich verlängern muss, sobald man die Innen- und Aussenseite desselben leitend macht und auf verschiedene electrische Spannung bringt.

In der That lässt sich diese Verlängerung an hohlen Glasfäden nachweisen, die innen und aussen versilbert sind.

Aus denselben Flintglasröhren, welche zur Herstellung der Thermometerkugeln des Abschnitts I gedient hatten, wurden vor der Glasbläserlampe dünne hohle Glasfäden von 0,2 mm bis 2 mm Durchmesser und 1000 bis 1500 mm Länge gezogen, das eine Ende heberartig umgebogen und in ein Gefäss mit frischer Martin'scher Versilberungsflüssigkeit[1]) gehängt. Nachdem durch Capillarwirkung die Flüssigkeit in dem Heber aufgestiegen und der hohle herabhängende Glasfaden vollständig gefüllt war, wurde das untere Ende des Glasfadens zugeschmolzen. Nach einer halben Stunde war die innere Oberfläche des Fadens mit einem glänzenden Silberüberzug versehen. Der Heber wurde jetzt in ein Gefäss mit warmem destillirten Wasser gehängt, das untere zugeschmolzene Fadenende mit dem Glasmesser abgeschnitten, und der Rest der Silberlösung durch Wasser verdrängt. Die abgetropften Glasröhren wurden in verticaler Stellung an ihrem untern Ende mit einem reinen Bogen Fliesspapier in Berührung gebracht, welches den Rest der Flüssigkeit aufsaugte. Schliesslich wurden die Glasfäden in dem warmen Luftstrom über einer Bunsen'schen Lampe getrocknet.

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **129.** p. 55. 1866.

Mit Sprengkohle wurde eine Glasröhre von 20 mm lichtem Durchmesser der Länge nach in zwei Hälften getheilt, jede Hälfte an den Enden vor der Glasbläserlampe geschlossen und so zwei 1500 mm lange Glasrinnen hergestellt, die auf der Mitte eines kurzen Spiegelglasstreifens mit ein paar Kitttropfen befestigt wurden.

Eine solche Rinne (Taf. II Fig. 9) wurde mit dem Spiegelglasstreifen auf eine mit der Wasserwage horizontal gestellte Unterlage gebracht, sodass ihre Enden über zwei leeren Bechergläsern schwebten. Innen versilberte und an beiden Enden zugeschmolzene Glasfäden wurden nebeneinander in die Rinne gelegt und in der Mitte der Glasrinne Martin'sche Versilberungsflüssigkeit aufgegossen, die sich gleichmässig nach beiden Seiten der Rinne vertheilte und die dünnen Glasfäden bedeckte. Durch die schwere Flüssigkeit wurden beide Enden der Glasrinne herabgezogen und floss die Versilberungsflüssigkeit, wenn man zuviel aufgegossen hatte, zuerst von den Enden der Rinne in die darunter stehenden Bechergläser. Nach $^1/_2$ Stunde waren die Glasfäden auch aussen versilbert. Der Rest der Versilberungsflüssigkeit wurde durch Kippen der Glasrinne in das eine am Ende stehende Becherglas gebracht, die Glasfäden noch in der Rinne mit warmem destillirten Wasser abgespült, auf reines Fliesspapier gelegt und in dem warmen Luftstrom über einer Bunsen'schen Glasflamme getrocknet.

Das eine Ende eines solchen Glasfadens wurde in ein Uhrglas mit starker Salpetersäure getaucht, der äussere Silberüberzug auf einer Strecke von 20 mm aufgelöst, in einem grösseren Gefäss mit reinem Wasser abgespült, mit reinem Fliesspapier abgetrocknet und über einer kleinen Alkoholflamme erwärmt. Die zugeschmolzene Kuppe des Glasfadens wurde jetzt abgeschnitten, ein Platindraht P von 40 mm Länge 20 mm tief in das Innere des Glasfadens eingeschoben und am Ende des Glasfadens über der Alkoholflamme eingeschmolzen (Taf. II Fig. 10_a).

An dem hervorragenden Ende des Platindrahtes wurde mit Schellack ein 30 mm langer massiver Glasfaden von 1,5 mm Durchmesser angekittet, dessen Ende zu einem Ha-

ken Q umgebogen war. Glashaken und Glasfaden, soweit er nicht mit Silber belegt war, wurden mit geschmolzenem Schellack bekleidet.

Platindraht und die innere Silberschicht bildeten die eine, die äussere Silberschicht die andere Belegung, das Glas des hohlen Fadens die isolirende Substanz einer cylinderförmigen Leydener Flasche oder eines Condensators.

Um die Zuführung der Electricität zu verlangsamen und ein Durchschlagen der dünnen Glaswand möglichst zu verhüten, wurden beide Belegungen des Glasfadencondensators durch leichte Glasröhrchen mit destillirtem Wasser und eingeschmolzenen Platindrähten mit Commutator, Fallapparat und Leydener Batterie in der § 2 beschriebenen Weise leitend verbunden. Zwischen äusserer Belegung und dem nächsten Platindraht der Wasserröhre wurde häufig noch ein Goldblatt, der leichtern Beweglichkeit wegen, eingeschaltet.

Die Verlängerung der Glasfäden wurde mit einem Oertling'schen Fühlhebel gemessen, der Längen bis zu 18 mm mit einer Genauigkeit von 0,0004 mm zu bestimmen erlaubte. Derselbe ruhte mit drei Füssen F_1 F_2 F_3 (Taf. II Fig. 10) auf drei in ein horizontales Holzbrett eingelassenen Messingplatten mit Loch, Schlitz und Fläche. Fuss F_3 ist in der Zeichnung durch den Fuss F_2 verdeckt. Durch die Fussschraube F_1, welche auf der Lochplatte steht, wird die lange Libelle L_1 und damit gleichzeitig der Schlitten AB und die Mikrometerschraube M horizontal gestellt. Nach links geht die Mikrometerschraube in einen Stahlstab MA über, der in der Schlittennase A festgeschraubt ist. Ueber den Stahlstab ist eine Spiralfeder aus Stahldraht geschoben, welche frei durch eine Oeffnung O des Trägers B hindurchgeht und die Nase A des Schlittens nach links drückt, während das Drehen des Schraubenmutterkopfes K die Mikrometerschraube und damit den Schlitten nach rechts zieht. Zwischen zwei horizontalen Schraubenspitzen des Trägers B dreht sich ein Messingring mit der Libelle L_2, einem 200 mm langen Zeiger Z und einem Anschlagstift S, der über der Drehungsaxe D liegt.

Die Lage des Schlittens wird in ganzen Schraubengängen (1 rev = 0,24793 mm) an einer horizontalen Scala abgelesen.

Der Kopf der Schraubenmutter ist direct in 100 Theile getheilt, sodass mit dem Nonius noch bequem 0,001 rev = 0,00025 mm bestimmt werden kann. Die Lage des Anschlagstiftes S wird grob mit dem vor einer verticalen Millimetertheilung laufenden Zeiger Z, feiner mit der Libelle L_2 controlirt, bei welcher 1 Sc. einer Verschiebung des Anschlagstiftes um 0,00399 entspricht.

Ein Streifen Spiegelglas G von 10 mm Dicke, 100 mm Breite und 1400 mm Länge lag auf einer 40 mm dicken, direct an der Zimmerwand befestigten Tischplatte H. Auf dem linken Ende des Glasstreifens G ruhte der 150 mm hohe, 70 mm breite aus hartem verzinkten Holz sehr fest gearbeitete Rahmen R, dessen obere Fläche den Fühlhebel trug. Der Rahmen wurde mit einer grossen Schraubzwinge C fest an die hölzerne Tischplatte geschraubt und damit gleichzeitig auch das linke Ende des Glasstreifens G an der Tischplatte festgeklemmt. Auf dem rechten Ende des Glasstreifens G war mit drei Tropfen Colophoniumkitt ein Mahagonibrett I mit kurzer Messingschiene U befestigt, auf der sich ein messingener Träger mit horizontalem Tischchen Q verschieben liess. Auf einen kurzen Stift am Rande des Tischchens wurde der Glashaken des doppelt versilberten Glasfadens gehängt.

Das andere zugeschmolzene Ende des Glasfadens wurde in ein leichtes mit geschmolzenem Schellack bekleidetes Flintglasröhrchen gekittet, welches durch einen eingekitteten Drahthaken und einen Steigbügel mit Achatrinne (wie er häufig an den Gehängen der Wagschalen angebracht ist) direct auf den Anschlagstift S des Fühlhebels wirkte. Taf. II Fig. 10_a ist diese Vorrichtung in natürlicher Grösse dargestellt.

Eine nur lose auf die rechte Seite des Glasstreifens G aufgeschraubte Schraubzwinge C_2 diente als Führung und erlaubte demselben bei Temperaturänderungen sich auf der horizontalen Tischplatte zu verschieben.

Durch Verschiebung des Tischchens Q auf der Messingschiene wurde die Libelle L_2 in nahezu horizontale Lage gebracht und dann durch Drehen des Schraubenkopfes am

Fühlhebel fein eingestellt. Der Glasfaden wurde dabei durch das Uebergewicht des Fühlhebels mit einer Kraft von 21 g gespannt.

Verlängerte sich der Glasfaden, so ging der Zeiger Z herab, und die Luftblase der Libelle L_2 nach rechts. Durch Drehen des Schraubenkopfes am Fühlhebel liess sich die Libelle wieder einstellen. Die Verlängerung ist = der Verschiebung der Schraube, und wird also direct in Bruchtheilen eines Schraubenganges gemessen.

Je nach der Länge der doppelt versilberten Glasfäden konnte der Holzrahmen mit dem Fühlhebel an passenden Stellen des Glasstreifens G festgeklemmt werden.

Die Luftblase der Libelle ändert ihre Lage nicht, solange Spiegelglasstreifen G und der Glasfaden dieselbe Temperatur und denselben thermischen Ausdehnungscoëfficienten haben.

Für Glasfäden aus Thüringer Glas traf das letztere zu; für solche aus Flintglas war der Ausdehnungscoëfficient nur wenig geringer. (Vgl. § 7 u. § 37). Die meisten Störungen rühren jedoch davon her, dass der dicke Spiegelglasstreifen den Temperaturschwankungen, wie sie ein Luftzug oder die strahlende Wärme des Körpers hervorbringen, langsamer folgt als der dünne Glasfaden, dessen Ausdehnung schon merklich wird, sobald ihn der von der warmen Hand des Beobachters aufsteigende Luftstrom trifft.

Da die von mir unter der Einwirkung electrischer Kräfte beobachteten Verlängerungen aber nur in seltenen Fällen 0,012 mm übersteigen, so habe ich die Verlängerung direct aus der Verschiebung der Libelle abgeleitet, die mit einem Fernrohr aus einer Entfernung von zwei Metern abgelesen wurde. Zehntel eines Scalentheiles von 2,5 mm Länge wurden durch Schätzung bestimmt und aus fünf oder mehr Messungen das Mittel genommen.

Es hätte keine Schwierigkeit gehabt, die Empfindlichkeit des Apparates noch bedeutend zu erhöhen und durch Beobachtung der Libellenblase mit einem Mikroskop und Ocularmikrometer noch Hundertel oder Tausendtel eines Scalentheiles abzulesen. Die Genauigkeit wäre aber dadurch

nicht grösser geworden, da die Temperatur stets ein wenig wechselt, und die electrische Verlängerung selbst bei scheinbar gleicher Anordnung des Versuches Schwankungen zeigt.

Nachdem die electrische Verlängerung der Glasfäden gemessen war, wurden 10 mm lange Stücke von den beiden Enden und in der Mitte abgeschnitten und mit einem seitlich angeklebten Wachsstück auf einem Spiegelglasstreifen (Objectträger) so befestigt, dass das Spiegelbild die Verlängerung des Röhrchens bildete. Die Wanddicke wurde mit einem Mikroskop und Ocularmikrometer an vier um 90° voneinander entfernten Stellen jeder Schnittfläche bestimmt. 1 Sc. des Mikrometers, von dem noch 0,1 Sc. geschätzt werden konnten, entsprach 0,006 65 mm. Die im Folgenden angegebenen Zahlen sind das Mittel aus diesen Messungen. War die Wanddicke in der Mitte des Glasfadens erheblich dünner als an den Enden, so ist die betreffende Zahl in den folgenden Tabellen eingeklammert.

Die Verlängerung ist dieselbe für freie positive Electricität auf der Innen- oder Aussenseite des Glasfadens und tritt im allgemeinen um so schneller ein, je grösser die electrische Spannungsdifferenz auf beiden Condensatorbelegungen ist.

Nach dem Entladen der Leydener Batterie blieb bei Flintglas und Thüringer Glas eine Verlängerung zurück, die im allgemeinen um so grösser war, je grösser die ursprüngliche Verlängerung. Dieser Rückstand betrug bei Flintglas 0,1 Sc. bis 0,2 Sc. oder 1 bis 2 Milliontel der ursprünglichen Länge; bei Thüringer Glas 2 bis 3 Milliontel, bei den grössten electrischen Spannungen bis 7 Milliontel der ursprünglichen Länge. (Vergl. unten § 20 u. flg.).

Des Beispiels wegen lasse ich im Folgenden die Messungen an zwei der empfindlicheren Glasfäden aus Flintglas und Thüringer Glas folgen. Bei Flintglas ist die Zeit, in welcher die Verlängerung eintrat, angegeben. Bei Thüringer Glas steht hinter dem Zeichen ♯ (welches die Entladung der Leydener Batterie und des Condensators bedeutet) die nach der Entladung gebliebene Verlängerung, der Rückstand der Verlängerung.

Tabelle 14.

Gerade Glasfadencondensatoren.
Innen und aussen versilbert.

Electricitätsmenge in 6 Flaschen	Verlängerung bei 17° C. in Scalentheilen: Flintglas Nr. 3	Thür. Glas Nr. 35	in Milliontel der Länge: Flintglas Nr. 3.	Thür. Glas Nr. 35
	Sc.	Sc. Sc.		
10	0,19 in 5,2″	0,91 ♯ 0,23	1,10	3,30 ♯ 0,83
20	0,54 „ 4,1	3,28 0,35	3,11	11,91 1,27
30	0,87 „ 3,7	7,53 1,97	5,02	27,29 7,14
40	1,87 „ 3,0	—	10,78	—

	Länge	Wandstärke der Glasfäden	Aeusserer Durchmesser
	mm	mm	mm
Flintglas	691	0,173	1,101
Thüringer Glas	1100	0,097	0,410

Die augenblicklich auftretende, und die nach der Entladung zurückbleibende Verlängerung wachsen nahezu, aber nicht genau, proportional dem Quadrat der Electricitätsmenge auf der Leydener Batterie.

§ 16. Einfluss der Dicke und Beschaffenheit des Glases. — Wurden die Glasfadencondensatoren ähnlich wie die Thermometercondensatoren mit Wasserbelegungen in der oben (§ 2 u. Taf. II Fig. 6) beschriebenen Weise in den Schliessungsbogen der Leydener Batterie eingeschaltet, so erhielt ich die folgenden Resultate:

Tabelle 15.

Gerade Glasfadencondensatoren.
Innen und aussen versilbert.

Nr.	Wanddicke der Glasfäden	Aeusserer Durchmesser	Länge	Verlängerung in Milliontel der ursprünglichen Länge bei 17° C. 6 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge: 10	20	30	40	60	3 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge: 5	10	15	20
				Englisches Flintglas.								
	mm	mm	mm									
1	0,056	0,290	645	2,93	10,86	—	—	—	—	—	—	—
3b	0,091	—	700	1,06	4,31	—	—	—		—	—	—
3	0,173	1,101	691	1,10	3,11	5,02	10,78	—	—	2,19	4,56	8,65
7	0,092	—	900	0,93	3,54	7,97	—	—	0,89	1,68	5,98	8,86

Nr.	Wanddicke der Glasfäden	Aeusserer Durchmesser	Länge	Verlängerung in Milliontel der ursprünglichen Länge bei 17° C. 6 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge 10	20	30	40	60	3 Leydener Flaschen mit Electricitätsmenge 5	10	15	20
				Englisches Flintglas.								
	mm	mm	mm									
30	0,105	0,589	600	—	1,66	5,64	10,29	—	—	—	—	—
5	0,126	—	1102	0,99	2,80	5,71	—	—	0,72	2,17	4,41	—
2	(0,134)	0,609	1025	—	2,84	5,44	9,91	—	—	—	—	—
31	0,105	0,706	780	—	1,79	—	—	—	—	—	—	—
8	0,164	0,964	1050	—	1,75	3,80	5,84	—	—	1,33	—	4,18
28	0,159	0,760	1130	0,35	1,30	—	—	—	—	0,95	1,66	—
29	0,194	1,160	770	—	1,71	2,17	5,18	9,75	—	1,03	1,81	—
				Thüringer Glas.								
	mm	mm	mm									
36	(0,084)	0,454	1100	3,22	7,26	—	—	—	—	6,16	—	—
35	(0,097)	0,410	1100	3,30	11,91	27,29	—	—	2,29	7,06	16,95	—
38	0,186	0,992	1110	—	3,59	7,50	10,74	—	—	—	—	—

Der Apparat Nr. 7 hatte keine Silberbelegungen, sonwar mit Kochsalzlösung gefüllt und aussen mit Wasser umgeben in der später § 17 beschriebenen Weise.

Die Zahlen der Tabelle 15 zeigen wieder, analog den ähnlichen Versuchen mit Thermometercondensatoren (§ 6), dass die Verlängerung nahezu proportional dem Quadrate der Electricitätsmenge in der Leydener Batterie und umgekehrt proportional dem Quadrate der Glasdicke ist.

Für gleiche Dichtigkeit der freien Electricität auf der inneren Belegung der Leydener Batterie ist die Wirkung bei grösserer Oberfläche der Batterie grösser. Es spricht dies für einen Einfluss der Capacität des Glasfadencondensators und dafür, dass deren Grösse vergleichbar mit der Capacität der benutzten Leydener Batterie ist.

In der That wurde in der § 10 beschriebenen Weise mit der 44gliedrigen Chromsäurekette die Capacität des Flintglasfadens Nr. 30 = 0,155 der Capacität des Thermometercondensators Nr. 17 gefunden, welcher nahezu dieselbe Capacität wie eine Leydener Flasche der benutzten Batterie hatte.

Es wurde ferner die Längenänderung bei verschiedener Schlagweite der freien Electricität bestimmt, in ähnlicher

Weise, wie in § 11 (Taf. II Fig. 7) die Volumenänderung eines Thermometercondensators bestimmt wurde. In Uebereinstimmung mit jenen Versuchen zeigen die in Tabelle 16 zusammengestellten Resultate eine Verlängerung nahezu proportional dem Quadrate der Schlagweite oder dem Quadrate der Potentialdifferenz auf beiden Belegungen des Condensators und umgekehrt proportional dem Quadrate der Glasdicke.

Tabelle 16.

Gerade Glasfadencondensatoren.

Innen und aussen versilbert.

Nr.	Wandstärke der Glasfäden	Aeusserer Durchmesser der Glasfäden	Länge	Verlängerung in Milliontel der ursprünglichen Länge Schlagweite in mm 1	2	3	4	5
			Englisches Flintglas.					
	mm	mm	mm					
15	0,092	0,636	1002	0,50	2,26	5,63	>13,68	—
19	0,150	0,845	900	0,44	0,97	2,79	4,92	>10,19
28	0,160	0,760	530	—	1,54	2,03	4,96	7,07
27	0,184	0,813	1050	—	—	2,09	—	—
29	0,194	0,160	770	—	—	1,40	2,59	—
26	0,230	2,100	850	—	0,72	—	—	—
			Thüringer Glas.					
	mm	mm	mm					
35	0,097	0,410	1100	2,58	17,31	—	—	—
38	0,186	0,992	1110	0,90	3,81	8,87	—	—

Wenn die Glasfäden Nr. 3 aus Flintglas und Nr. 35 aus Thüringer Glas in den Tabellen 15 u. 16 etwas grössere Längenausdehnung zeigen, als die übrigen, so mag dies in zufälligen Verschiedenheiten liegen, die durch langsamere oder schnellere Abkühlung beim Ziehen der Fäden vor der Glasbläserlampe sich ausbilden und bei so dünnem Material kaum zu vermeiden sein werden. Man kann daher nur, wie es auch hier geschehen ist, aus einer grösseren Anzahl Versuche bindende Schlüsse ziehen.

Für Thüringer Glas ist die Längenänderung bei gleicher Glasdicke und gleicher electrischer Potentialdifferenz grösser, als für Englisches Flintglas, analog den electrischen Volumenänderungen der Thermometercondensatoren. Auch lässt

sich Thüringer Glas stärker electrisiren, ohne dass die Glaswand von der Electricität durchbrochen wird.

Eine Vergleichung der Tabellen 5 und 10 mit Tabelle 15 und 16 lehrt, dass bei derselben Schlagweite und Glasdicke für dieselbe Glassorte die Volumenänderung stets bedeutend grösser als die Längenänderung ist und oft das Dreifache von der letzteren beträgt.

Es spricht dies für eine nach drei Dimensionen gleichmässige Ausdehnung des Glases beim Uebergang in den electrischen Zustand und gegen eine Compression der Glaswand durch einen Druck in der Richtung der Resultante der im Innern des Glases wirkenden electrischen Kräfte. (Vergl. unten § 28).

§ 17. Einfluss der Umgebung auf die Verlängerung von Flintglasfäden. — In § 9 wurden Versuche beschrieben, bei denen die Volumenänderung eines Thermometercondensators dieselbe war für gleiche electrische Kräfte, mochte die Thermometerkugel von Luft oder Wasser umgeben sein.

In beiden Fällen war dann der Druck auf die Glaswand der Thermometerkugel, und also auch deren Volumen ein wenig verschieden.

Ich habe daher ähnliche Versuche für die Verlängerung angestellt, bei denen die Belastung der Glasfäden constant, die elastische Spannung in denselben also ungeändert blieb, mochten sie in Luft oder Wasser liegen.

Zu dem Ende wurde eine 800 mm lange, innen versilberte Glasrinne (Taf. II Fig. 11) von 20 mm Durchmesser an den Enden durch zwei halbkreisförmige dünne Korkscheiben geschlossen, die in der Mitte einen 2 mm breiten Einschnitt trugen. Diese Rinne wurde genau horizontal unter dem innen und aussen versilberten Glasfadencondensator so aufgestellt, dass dieser frei durch die Einschnitte des Korkes hindurchging, ohne den Kork zu berühren. Wurde die Rinne bis zum Rande mit Wasser gefüllt, so war der Glasfaden von Wasser bedeckt, konnte sich frei bewegen, und die

capillare Oberfläche zwischen Glasfaden und Korkscheibe verhinderte das Ausfliessen des Wassers.

Will man die electrische Verlängerung des Glasfadens in Luft bestimmen, während die Glasrinne unter dem Faden liegt, so muss man die Korke und die Innenseite der Glasrinne, ebenso wie die äussere Silberbelegung des Glasfadens zur Erde ableiten, um dâmit eine Anziehung zwischen Glasfaden und Rinne, oder eine von dieser Anziehung herrührende Längenänderung des Glasfadens zu vermeiden.

Tabelle 17.

Gerader Flintglasfaden Nr. 5.

Innen und aussen versilbert

von 1102 mm Länge und 0,126 mm Glasdicke.

Flaschenzahl	Electricitätsmenge	Verlängerung in Milliontel der ursprünglichen Länge in Luft	in Wasser
6	10	0,99	0,81
„	20	2,80	2,39
„	30	5,71	4,41
3	5	0,72	—
„	10	2,17	1,99
„	15	4,41	3,69
„	20	—	5,86

Die vorstehend mitgetheilten Versuche zeigen analog mit den früher (§ 9) erhaltenen Resultaten sehr nahe dieselbe Verlängerung, mochte der Glasfaden von Luft oder Wasser umgeben sein.

In beiden Fällen trat auch, wie die Messungen mit dem Chronoskop zeigten, die Verlängerung in derselben Zeit (2,5 Sekunden) ein.

Hierzu kommt, dass die Verlängerung des Flintglasfadens Nr. 7 mit Wasserbelegungen (Tab. 15 § 16) sich den Verlängerungen von silberbelegten Flintglasfäden in Luft vollkommen anreihen.

Es spricht dies alles gegen eine Erwärmung durch electrische Ströme im Innern der Glaswand, da diese eine kleinere und langsamer auftretende Verlängerung bei einer Umgebung des Glasfadens mit Wasser hätte erwarten lassen.

III. Ein Glasfadenelectrometer und die Abhängigkeit der electrischen Ausdehnung von der Temperatur.

§ 18. Glasfadenelectrometer. — Viel leichter als mit dem § 15—17 beschriebenen Verfahren lässt sich die von electrischen Kräften bewirkte Verlängerung des Glases nachweisen, sobald es sich nicht um absolute, sondern nur um relative Messung dieser Verlängerung handelt.

Zieht man vor der Glasbläserlampe einen dünnen Glasfaden mit excentrischem Hohlraum, so ist derselbe nach dem Erkalten gekrümmt und hat die dünnere Wand auf der convexen Seite, da die dickere Wandung sich länger abkühlt oder stärker verkürzt als die dünnere Wandung.

Eine Flintglasröhre von 3 mm Durchmesser und 50 mm Länge, deren Aussenseite mit geschmolzenem Schellack bekleidet war, setzte sich nach unten in einen krummen Glasfaden von 400 mm Länge fort. Der Glasfaden wurde voll Wasser gesogen und unten zugeschmolzen in einen mit Wasser gefüllten Glascylinder gesenkt. (Taf. II Fig. 12). Der untere Theil der 3 mm dicken Flintglasröhre wurde mit einem durchbohrten Kork in der Oeffnung des Glascylinders befestigt.

Setzt man die beiden Belegungen dieses Flintglascondensators, nämlich das Wasser innerhalb und ausserhalb des Glasfadens durch dünne Metalldrähte mit der innern und äussern Belegung einer Leydener Batterie in Verbindung, so krümmt sich der Glasfaden noch mehr. Die Verschiebung des untern beweglichen Endes kann mehrere Millimeter betragen und ist um so grösser, je grösser die electrische Potentialdifferenz auf beiden Belegungen des Condensators ist.

Es liess sich dies nach den Untersuchungen des Abschnittes I und II erwarten, da der dünnere Theil der Glaswand eine stärkere electrische Verlängerung zeigen muss als der dickere.

Je nach der gewünschten Empfindlichkeit benutzte ich Glasfäden von 0,5 bis 2 mm äusserem Durchmesser und 0,01

bis 0,1 mm Wandstärke. Der dünnere Theil der Wand war etwa halb so dick als der dickere.

Die dünnen Glasfäden wurden statt mit Wasser auch wohl mit Kochsalzlösung gefüllt.

Bei messenden Versuchen wurde das untere Ende des krummen Flintglasfadens mit einem Mikroskop und Ocularmikrometer, wie die Flüssigkeitskuppe in den Capillarröhren der Thermometercondensatoren, beobachtet. Nur stand die Mikrometertheilung jetzt nicht mehr vertical, sondern horizontal. 1 Sc. entsprach 0,06 mm.

Nach der Entladung des Condensators geht der Glasfaden nahezu in seine ursprüngliche Lage zurück.

Die Bewegung besteht wegen der dämpfenden Wirkung des umgebenden Wassers, ohne den Glasfaden in Schwankungen zu versetzen, in einem einfachen Hingange bei der Ladung und einem einfachen Rückgange bei der Entladung. Jeder dauert nur wenige Secunden.

Um die Verschiebung des untern Glasfadenendes unabhängig von der Krümmung der Wand des grossen Glascylinders beobachten zu können, habe ich später die krummen Glasfäden in viereckige Glasflaschen mit verticalen ebenen Wänden gebracht, in deren Oeffnung eine 20 mm breite Glasröhre von passender Länge mit ein wenig Siegellack eingekittet war. Man kann in die verticale Wand auch noch ein rundes Loch von 40 mm Durchmesser bohren und durch eine aufgekittete Spiegelglasplatte schliessen, wie dies in Taf. II Fig. 14 dargestellt ist.

Gewöhnlich waren die Wassersäulen im Innern der krummen Glasfäden mit einem am obern Ende eingeschmolzenen Platindrahte, zuweilen mit einem am obern Ende eingekitteten dünnen Kupferdrahte in leitender Verbindung. Ein ähnlicher Kupferdraht war zwischen Kork und Glaswand festgeklemmt. Beide Drähte vermittelten die Verbindung der innern und äussern Wasserbelegung mit den Belegungen der Leydener Batterie.

Wurde ein solches Glasfadenelectrometer statt eines Thermometercondensators in der § 2 (Taf. II Fig. 6) beschriebenen Weise mit einer Leydener Batterie verbunden,

so beobachtete ich bei zwei Apparaten verschiedener Empfindlichkeit folgende Verschiebungen des untern Endes des krummen Flintglasfadens.

Tabelle 18.

	6 Flaschen Electricitätsmenge			3 Flaschen Electricitätsmenge	
	5	10	20	5	10
	Glasfadenelectrometer Nr. 101				
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
beobachtet	1,63	6,27	23,97	5,60	23,23
berechnet	1,52	6,07	24,28	6,07	24,28
	Glasfadenelectrometer Nr. 102				
	Sc.	Sc.			
beobachtet	2,05	8,54	—	—	—
berechnet	2,12	8,48	—	—	—

Versuche, bei denen ähnlich wie in § 11 die äussere Belegung des Glasfadenelectrometers oder Condensators zur Erde abgleitet war, die innere Belegung aber mit der Holtz'schen Maschine allmählich bis zu einer gewissen Schlagweite geladen wurden (Taf. II Fig. 7), ergaben folgende Resultate.

Tabelle 19.

	Schlagweite in Millimetern				
	1	2	3	4	5
	Glasfadenelectrometer Nr. 113 bei 16,5° C.				
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
beobachtet	0,25	1,22	3,04	5,30	8,45
berechnet	0,33	1,33	2,99	5,31	8,30
	Glasfadenelectrometer Nr. 111.				
	Sc.	Sc.	Sc.		
beobachtet	0,76	2,83	6.71	—	—
berechnet	0,74	2,94	6,62	—	—

Unter den beobachteten Ausschlägen stehen die berechneten, indem man die Ausschläge proportional dem Quadrat der Dichtigkeit der freien Electricität auf der innern Belegung der Leydener Batterie von sechs Flaschen oder proportional dem Quadrate der Schlagweite (Potentialdifferenz der Condensatorbelegungen) setzte. Berechnete und beobachtete Werthe stimmen nahezu überein.

Die Abweichungen für den Apparat Nr. 101 und die Batterie von drei Flaschen erklären sich dadurch, dass die Capacität des Glasfadenelectrometers nicht verschwindend klein gegen die Capacität einer Leydener Flasche war.

Es können sich die Glasfadenelectrometer also recht bequem für Messungen starker electrischer Spannungsdifferenzen benutzen lassen.

§ 19. Einfluss der Umgebung. — Werden krumme Glasfäden mit excentrischem Hohlraume innen und aussen in der § 15 angegebenen Weise versilbert, so kann man auch ohne Flüssigkeit die Krümmung des Glasfadens beim Electrisiren zeigen. Bei plötzlichem Laden und Entladen des Glasfadenelectrometers kommt aber der Faden in solche Schwankungen, dass die Messungen viel zu lange Zeit in Anspruch nehmen. Dazu kommt noch der Uebelstand, dass der Glasfaden, um ihn vor Luftströmungen zu schützen, nicht in einem trockenen Glascylinder aufgestellt werden kann, da er dann durch die freie Electricität an irgend einer Stelle an die Wand des Glascylinders gezogen wird.

Um zu sehen, ob ein Glasfaden bei Berührung mit Luft und Wasser in ähnlicher Weise dieselben Aenderungen der Krümmung zeigt wie ein Thermometercondensator dieselben Volumenänderungen oder ein grosser Glasfaden dieselbe Verlängerung (vgl. § 9 und 17), wurden zwei Glasfadenelectrometer gleichzeitig nebeneinander in den Schliessungsbogen einer Leydener Batterie von sechs Flaschen eingeschaltet, sodass die electrische Spannung auf den drei inneren Belegungen dieselbe war, während die äusseren Belegungen zur Erde abgeleitet waren.

Das eine Glasfadenelectrometer Nr. 103 hatte in gewöhnlicher Weise Wasserbelegungen, das andere Silberbelegungen. Das zweite war in einem kurz zuvor mit Wasser gefüllt gewesenen Glascylinder aufgestellt, dessen innere Wände mit einer dünnen Wasserschicht vollständig bedeckt und zur Erde abgeleitet waren.

Durch eine Holtz'sche Maschine wurde allmählich die Dichtigkeit der freien Electricität auf beiden inneren Be-

legungen vermehrt und mit zwei Mikroskopen die Verschiebung der unteren Fadenenden beobachtet; bei dem einen Apparate in Wasser, bei dem andern Apparate in Luft.

Dann wurde der Glascylinder des zweiten Apparates mit Wasser gefüllt und die Beobachtungen wiederholt.

Tabelle 20.

Electrometer:	Nr. 103	Nr. 104		Nr. 105	
Glasfaden in:	Wasser	Luft	Wasser	Luft	Wasser
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
	3	0,97	0,78	3,00	3,05
	10	2.61	2,52	8,15	10,35
					$2r = 0{,}45$

Berücksichtigt man, dass die Schwerkraft auf die krummen Glasfäden in verschiedener Weise wirkt, je nachdem sie in Luft oder Wasser schweben; dass also die Empfindlichkeit der Glasfadenelectrometer in Luft und Wasser nicht genau dieselbe sein kann, so sind diese Versuche in Uebereinstimmung mit den früheren (§ 9 und 17) und zeigen, dass die Umgebung so gut wie keinen Einfluss auf den Ausschlag der krummen Glasfäden hat.

§ 20. Electrische Längenausdehnung bei verschiedener Temperatur und verschiedener Schlagweite. — Die Glasfadenelectrometer sind sehr geeignet, um den Einfluss der Temperatur auf die electrische Ausdehnung zu untersuchen, da der Ausschlag durch die Längendifferenz benachbarter dünn- und dickwandiger Theile des Glasfadens bestimmt ist, und diese sehr nahe dieselbe Temperatur haben.

Ein 500 mm hoher, mit Wasser gefüllter Zinkkasten (Taf. II Fig. 13) mit abgerundeten Ecken und quadratischer Basis von 80 mm Seite konnte durch eine Gasflamme erhitzt werden. In seinem untern Theile waren an zwei gegenüberliegenden Wänden zwei runde Fenster aus Spiegelglas von 40 mm Durchmesser angebracht. Jede Glasscheibe war durch untergelegte Lederringe und einen Messingring von gleichem Durchmesser, der in ein kurzes, an der Zinkwand angelöthetes Ansatzrohr eingeschraubt wurde, wasserdicht mit der Ge-

fässwand verbunden. Eine Eisenplatte passte in zwei diametrale Ausschnitte des Messingringes und diente als Schlüssel zum Anziehen der Schraube.

In zwei auf dem Deckel des Zinkkastens aufgelötheten kurzen Röhren waren mit zwei durchbohrten Korken der krumme Glasfaden und ein Thermometer eingesetzt. Auf eine dritte Röhre des Deckels war mit einem Kautschukrohr eine 400 mm lange verticale Glasröhre ausserhalb des Kastens befestigt, welche als aufrecht stehender Kühler wirkte, indem sich in ihr die gebildeten Wasserdämpfe verdichteten und in den Zinkkasten zurückflossen. Die obere Oeffnung der verticalen Glasröhre war durch ein lose aufgedrücktes Stanniolblättchen verschlossen, welches den Wasserdämpfen den Austritt gestattete und den Zutritt der kalten Luft verhinderte.

Ein starker Messingdraht ging durch eine Oeffnung des Deckels hindurch und trug am untern Ende einen ringförmigen Rührer, um das Wasser des Zinkkastens umrühren und so überall auf dieselbe Temperatur bringen zu können. Messingdraht und Rührer fehlen in der Zeichnung.

Der Deckel wurde mit einem 60 mm langen Ansatzstück in den Zinkkasten eingeschoben und schloss dann dampfdicht.

Wurde die eine Belegung eines Glasfadenelectrometers allmählich bis zu einer bestimmten Schlagweite geladen, während die andere Belegung zur Erde abgeleitet war, analog dem in § 11 (Taf. II Fig. 7) beschriebenen Verfahren bei Thermometercondensatoren, so erhielt ich folgende Ausschläge.

Tabelle 21a.

Glasfadenelectrometer.

Temp.	Ausschlag bei Schlagweite in Millimetern							
	1	2	3	4	1	2	3	4
	Flintglas Nr. 112							
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
18,3°	0,61	1,93	4,00	7,70	1	1	1	1
47,4	0,72	2,22	5,13	9,21	1,180	1,150	1,282	1,196
64	0,64	1,99	4,61	11,04	1,049	1,031	1,153	1,433

Temp.	Ausschlag bei Schlagweite in Millimetern							
	1	2	3	4	1	2	3	4
				Flintglas Nr. 114				
	Sc.	Sc.	Sc.		Sc.	Sc.	Sc.	
16,4°	2,25	7,76	18,01	—	1	1	1	—
47,8	2,85	9,43	23,65	—	1,267	1,215	1,313	—
79,1	4,22	14,85	39,36	—	1,875	1,914	2,186	—
91,0	4,20	16,48	>60,00	—	1,866	2,123	> 3,332	—
				Flintglas Nr. 115				
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
3,1°	3,02	10,10	20,12	41,32	1	1	1	1.
28,1	3,10	11,52	26,94	57,08	1,027	1,141	1,340	1,381
54,7	3,68	16,22	36,92	>100	1,218	1,606	1,835	>2,419
86,0	5,48	25,70	> 100	—	1,814	2,545	>4,971	—
94,1	5,02	31,71	—	—	1,662	3,140	—	—
				Thüringer Glas Nr. 116				
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
0°	(0,45)	1,96	4,10	10,48	1	1	1.	1
15,5	0,94	3,88	11,89	>27	2,089	1,979	2,899	>2,577
26,6	1,08	4,75	>29	—	2,400	2,423	>7,073	—
32,0	0,94	7,95	—	—	2,089	4,056	—	—
42,2	3,46	>12	—	—	7,689	>6,121	—	—
				Thüringer Glas Nr. 117				
	Sc.	Sc.			Sc.	Sc.		
1,2°	2,26	10,46	—	—	1	1	—	—
16,0	4,30	21,60	—	—	1,903	2,065	—	—
30,0	5,34	>35	—	—	2,362	>3,35	—	—
38,2	>30	—	—	—	>13,3	—	—	—

Da bei höherer Temperatur Flintglas leitend wird, und Thüringer Glas schon bei gewöhnlicher Temperatur unvollkommen isolirt, so entladet sich ein Theil der von der Holtz'schen Maschine zugeführten Electricität sofort durch die Wandung des hohlen Glasfadens, und es lässt sich dann die gewünschte Schlagweite nicht erreichen. Dies geschieht auch, wenn die zur Verstärkung des Entladungsfunkens angebrachten Leydener Flaschen fehlen. In solchen Fällen war der beobachete Ausschlag kleiner als er bei einer kräftigeren Maschine der am Kopfe der Spalte angegebenen Schlagweite entsprochen haben würde, und ist dies durch das Zeichen > angedeutet.

Wurden beide Belegungen des Glasfadenelectrometers in leitende Verbindung gesetzt, so ging im allgemeinen das untere Fadenende nicht sofort in seine ursprüngliche Lage

zurück, und es blieb ein Ausschlag im Sinne des ursprünglichen Ausschlags zurück, der erst allmählich wieder verschwand. Dieser Ausschlagsrückstand ist beim Thüringer Glas grösser als bei Flintglas unter sonst gleichen Bedingungen.

Tabelle 21b.

Temp.	Ausschlagrückstände nach der Entladung bei der Schlagweite in Millimetern			
	1	2	3	4
	Flintglas Nr. 115			
	Sc.	Sc.	Sc.	
54,7°	0,2	1,0	3,24	—
86,0	0,9	3,80	—	—
94,1	—	5,62	—	—
	Thüringer Glas Nr. 116			
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
0°	0	0	0,60	2,16
15,5	0	0	2,50	—
26,6	0	0,84	19,00	—
32,0	—	1,55	—	—
42,2	0,56	—	—	—
	Thüringer Glas Nr, 117			
	Sc.	Sc.		
1,2°	0,22	1,86	—	—
16,0	0,42	5,2	—	—
30,0	0,76	—	—	—

Aus den angeführten Versuchen folgt, dass mit Erhöhung der Temperatur der Ausschlag des untern Fadenendes, ebenso wie der Ausschlagsrückstand bedeutend zunehmen, dass beide nahezu proportional dem Quadrate der Schlagweite oder dem Quadrate der Spannungsdifferenz der beiden Belegungen des hohlen Glasfadens zunehmen und erst bei grösseren Ausschlägen, die mit der electrochemischen Zersetzung der Glasmasse zusammenzuhängen scheinen, Abweichungen eintreten.

Nennt man H und H_1 den Ausschlag des untern Fadenendes bei den Temperaturen t^0 und $t_1{}^0$ und setzt:

$$H_1 = H\big(1 + h\,(t_1 - t)\big),$$

so lässt sich die mittlere Zunahme h des Ausschlags 1 für 1° Temperaturerhöhung finden. Dieselbe ist für Flintglas kleiner als für Thüringer Glas, wie die folgende aus Tab. 21a abgeleitete Zusammenstellung zeigt.

Tabelle 21c.

Temp.	Mittlere Ausschlagsänderung h für 1°. bei Schlagweite in Millimetern 1	2	3	4	Mittel
		Flintglas Nr. 112.			
47,4°	0,00619	0,00515	0,00969	0,00674	0,00694
64	0,00107	0,00068	0,00335	0,00947	0,00364
		Flintglas Nr. 114.			
47,8°	0,00850	0,00685	0,00997	—	0,00833
49,1	0,01395	0,01457	0,01892	—	0,01581
91,0	0,01160	0,01505	(0,03127)	—	0,01332
		Flintglas Nr. 115.			
28,6°	0,00106	0,00553	0,01334	0,01494	0,00872
54,7	0,00423	0,01174	0,01618	(0,02751)	0,01471
86,0	0,00946	0,01797	(0,04617)	—	0,01371
94,1	0,00728	0,02352	—	—	0,01540
		Thüringer Glas Nr. 116.			
15,5°	0,07026	0,06317	0,1226	0,1017	0,08943
26,6	0,05262	0,05350	(0,2283)	—	0,05306
32,0	0,03403	0,09552	—	—	0,06477
42,2	0,1585	(0,1213)	—	—	—
		Thüringer Glas Nr. 117.			
16,0°	0,06101	0,07196	—	—	0,06648
30,0	0,04729	(0,08149)	—	—	0,04729
38,2	(0,3316)	—	—	—	—

Diese Zunahme h ist etwa von derselben Ordnung, wie die Zunahme des electrischen Leitungsvermögens bei wässerigen Salzlösungen, welche nach den Untersuchungen von F. Kohlrausch[1]) zwischen 0,0087 und 0,072 liegt.

§ 21. Electrische Längenausdehnung bei verschiedener Temperatur und verschiedener Electricitätsmenge in der Leydener Batterie. — Man kann die Belegungen des Glasfadenelectrometers auch in der § 2 (Taf. II Fig. 6) für einen Thermometercondensator beschriebenen Weise in den Schliessungsbogen einer Leidener Batterie einschalten und den Ausschlag des unteren Fadenendes beobachten.

Nach dem Niederlassen des Fallapparates, welcher die leitende Verbindung mit der Leydener Batterie herstellt,

1) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 192. 1879.

ging das untere Fadenende bis zu einem Maximalausschlag, und darauf langsam wieder zurück. Bei dem Niederlassen des Fallapparates wurde das Chronoskop (vergl. § 2) durch einen Druck der linken Hand in Gang gesetzt und, nachdem der Maximalausschlag erreicht war, angehalten. Die Zeit, in welcher die Maximalverschiebung eintritt, lässt sich aber bei langsamer Bewegung des Glasfadens nur angenähert bis auf einige Secunden genau bestimmen.

Im Folgenden sind die Beobachtungen an einem krummen Glasfaden aus Flintglas und zwei anderen aus Thüringer Glas zusammengestellt.

Tabelle 22a.

Krummer Flintglasfaden Nr. 110.

Temp.	Ausschlagsmaximum bei Electricitätsmenge in 6 Flaschen									Ausschlagszeit		
	10		20		30		10	20	30	10	20	30
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.						
12,5°	2,02 ≠	0	7,60 ≠	0,9	16,25 ≠	2,4	1	1	1			
50,5	3,66	0,7	12,97	4,5	30,46	10,9	1,267	1,707	1,875	30,0″	22,5″	9,3″
71,2	3,00	0,7	16,28	5,9	34,00	10,7	1,875	2,142	2,092	10,3	17,0	4
91,0	4,31	0,9	17,72	6,8	(37,7)	12,9	1,866	2,332	(2,320)	9,3	7	4
	Electricitätsmenge in 3 Flaschen											
	5		10		15		5	10	15	5	10	15
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.						
12,5°	1,55 ≠	0	5,75 ≠	0,5	13,05 ≠	1,4	1	1	1			
50,5	1,77	0	9,17	2,2	19,47	4,7	1,142	1,595	1,492	18,3″	11,7″	10″
71,2	2,27	−0,1	11,00	2,4	24,33	8,9	1,464	1,913	1,865	9	15	4
91,0	3,12	0,7	12,43	3,3	(23,91)	8,3	2,013	2,161	1,832	7	7	7

Faden aus Thüringer Glas Nr. 116.

Temp.	Ausschlagsmaximum bei Electricitätsmenge in 6 Flaschen									Ausschlagszeit		
	10		20		30		10	20	30	10	20	30
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.						
3,8°	1,15 ≠	0,2	4,68 ≠	2,3	10,38 ≠	5,0	1	1	1	5,6″	10,7″	6,3″
28,9	0,82	0,1	3,75	1,6	10,87	3,4	0,713	0,801	1,047	2,8	1,7	1,4
55,6	0,97	−0,2	4,33	0,3	11,86	1,0	0,967	0,985	1,143	1,0	1,1	1,0
	Electricitätsmenge in 3 Flaschen											
	5		10		15		5	10	15	5	10	15
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.						
6,0°	0,68 ≠	0,1	3,03 ≠	0,8	6,80 ≠	2,7	1	1	1	6,6″	5,3″	4,6″
30,0	0,55	0,1	2,68	0,9	6,85	1,6	0,809	0,884	1,007	2,6	1,8	1,4

Faden aus Thüringer Glas Nr. 117.

Temp.	Ausschlagsmaximum bei Electricitätsmenge in 6 Flaschen									Ausschlagszeit		
	10		20		30		10	20	30	10	20	30
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.						
1,9°	3,00 ♯	0,5	11,35 ♯	5,5	29,25 ♯	13,8	1	1	1	8,2″	7,0″	2,5″
15,6	4,30	1,7	17,54	9,9	46,60	22,0	1,433	1,545	1,593	7,6	5,4	5,9
30,3	3,58	1,2	18,00	6,2	51,25	12,6	1,193	1,587	1,756	3,6	1,5	1,0
	Electricitätsmenge in 3 Flaschen											
	5		10		15		5	10	15	5	10	15
	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.						
2,8°	2,30 ♯	0,6	8,17 ♯	3,5	22,75 ♯	8,4	1	1	1	5,8″	7,2″	1,7″
15,6	3,26	1,2	11,90	4,2	32,20	10,1	1,417	1,456	1,416	4,3	1,7	1,2
29,6	2,82	1,3	14,25	3,8	(40,50)	12,2	1,226	1,744	1,780	3,2	1,2	1,0

Hinter dem Zeichen ♯ steht der nach der Entladung der Batterie und des Glasfadens noch zurückbleibende Ausschlag in Scalentheilen des Beobachtungsmikroskops. Die drei mittleren Spalten geben die Electrometerausschläge, wenn man den für die niedrigste Temperatur erhaltenen = 1 setzt.

Der Maximalausschlag erfolgte im allgemeinen um so schneller, je höher die Temperatur und je grösser die Electricitätsmenge in der Leydener Batterie war.

Bei Temperaturen über 80° für Flintglas und über 50° für Thüringer Glas nahmen die Ausschläge sehr schnell ab, und die Leydener Batterie entlud sich in kurzer Zeit durch die Wandung des hohlen Glasfadens.

Man erkennt aus den angegebenen Versuchen, dass mit Erhöhung der Temperatur der Ausschlag des unteren Fadenendes, ebenso wie der Ausschlagsrückstand bedeutend zunehmen, dass beide für dieselbe Temperatur, sobald sie nicht zu hoch ist, nahezu proportional dem Quadrate der Electricitätsmenge auf der Leydener Batterie oder dem Quadrate der Dichtigkeit der freien Electricität auf der inneren Belegung der Leydener Batterie sind.

Der kleinere Ausschlag für die halbe Electricitätsmenge auf der Leydener Batterie von halber Oberfläche erklärt sich zum Theil aus der Verkleinerung, welche die electrische Spannungsdifferenz der Batteriebelegungen durch Verbindung

mit dem Glasfadencondensator von merklicher Capacität erleidet. Ausserdem nimmt die electrische Spannung auch ab, weil ein Theil der Electricität der Condensatorbelegungen durch die leitende Wandung des Glasfadens hindurchfliesst, und dieser Theil um so grösser ist, je besser das Glas die Electricität leitet.

Der Maximalausschlag entspricht also bei kleinerer Electricitätsmenge und gleicher electrischer Dichtigkeit in der Leydener Batterie doch bei kleinerer Oberfläche einer geringeren electrischen Spannungsdifferenz der Condensatorbelegungen, ist also kleiner, als bei grösserer Oberfläche der Batterie. Der Electricitätsverlust aus den eben erwähnten Gründen kann mit steigender Temperatur bei geringen Electricitätsmengen in der Leydener Batterie sogar so zunehmen, dass die electrische Spannung der inneren Belegung zur Zeit des Maximalausschlages, also auch der Maximalausschlag selbst erheblich kleiner wird als bei niedrigerer Temperatur, wie dies in der That die Versuche mit dem gut leitenden Thüringer Glas zeigen.

Da der Condensator bei diesen Versuchen länger geladen bleibt und durch die Wandung des hohlen Glasfadens mehr Electricität fliesst, als bei den Versuchen des vorigen Paragraphen, so ist auch der Ausschlagsrückstand bedeutend grösser, als dort für niedrige Temperaturen. Für höhere Temperaturen wird die freie Electricität im Innern der Glasmasse, welche den Ausschlagsrückstand bedingt, in der besser leitenden Glasmasse schneller verschwinden, folglich ein kleinerer Ausschlagsrückstand beobachtet werden, als unter sonst gleichen Bedingungen bei niederer Temperatur.

Diese Electricitätsverluste durch Leitung sind bei Thüringer Glas so bedeutend, dass ich darauf verzichtet habe, den Werth der Constanten h aus den durch Verbindung mit der Leydener Batterie herbeigeführten Maximalausschlägen H für verschiedene Temperaturen zu berechnen.

Führt man die Rechnung bei Flintglas durch, so erhält man folgende Werthe für h:

Tabelle 22b.

Mittlere Aenderung h des Ausschlags 1 für 1° Temperaturzunahme.

Krummer Flintglasfaden Nr. 110.

Temp. t_1	Electricitätsmenge in 6 Flaschen			Electricitätsmenge in 3 Flaschen		
	10	20	30	5	10	15
50,5°	0,00703	0,01861	0,02302	0,00374	0,01566	0,01295
71,2	1490	1945	1861	0790	1556	1473
91,0	1104	1696	1682	1290	1479	1059

Für denselben krummen Flintglasfaden Nr. 110 geben Versuche bei verschiedener Schlagweite nach der Methode des § 20

$$h = 0{,}0116$$

oder nahezu dasselbe, wie die Versuche mit der Leydener Batterie.

§ 22. Electrische Volumenausdehnung bei verschiedener Temperatur. — Aehnliche Versuche wurden mit Thermometercondensatoren angestellt, bei denen die Belegungen in der § 2 (Taf. II Fig. 6) beschriebenen Weise mit der Leydener Batterie verbunden waren. Die Senkung der Flüssigkeitskuppe in der Capillarröhre wurde gemessen, während die Thermometerkugel sich in Eiswasser, in Wasser von der Temperatur des Zimmers oder von 100° befand.

Für die Beobachtungen bei höherer Temperatur wurde in den ringförmigen oberen Deckel eines Metallbechers (Taf. II Fig. 5), wie er bei den Thermometercondensatoren benutzt wurde, eine kleine Metallhülse H und ein oben offener Metallbecher J eingelöthet. Der letztere wurde mit concentrirter Kochsalzlösung gefüllt und war zur Aufnahme der Thermometerkugel bestimmt. Der grössere Metallbecher enthielt Wasser, welches durch eine Gasflamme erhitzt werden konnte. Auf die Hülse H war mit einem kurzen Kautschukschlauch ein 400 mm langes verticales Glasrohr aufgesteckt, welches als aufrechtstehender Kühler wirkte und mit einer Stanniolplatte lose verschlossen war, ähnlich wie bei dem Apparate Taf. II Fig. 13 § 20.

Die Temperatur der Kochsalzlösung wurde durch ein empfindliches Quecksilberthermometer bestimmt, dessen Gefäss neben der Kugel des Thermometercondensators angebracht war. Bei einigen Versuchen wurde das Thermometer durch ein zweites senkrechtes Glasrohr mit Stanniolplatte ersetzt.

In Tabelle 23 sind die Beobachtungen an vier Thermometercondensatoren aus Flintglas und Thüringer Glas zusammengestellt, wenn die äussere Belegung bis zu der angegebenen Schlagweite geladen wurde, sowohl in Milliontel des Volumens der Thermometerkugel als auch, wenn die bei 0° beobachtete Volumenänderung = 1 gesetzt wird.

Nennt man u und u_0 die bei den Temperaturen t^0 und 0° beobachteten Volumenänderungen und setzt

$$u = u_0 (1 + k t)$$

so lässt sich mit Hülfe dieser Beziehung die mittlere Aenderung k berechnen, welche die Volumenzunahme 1 bei der Temperaturerhöhung um 1° erfährt. Dieser Werth ist in der letzten Spalte aufgeführt.

Die Volumenänderung des Thermometercondensators Nr. 30 bei 100° ist für 2 mm Schlagweite so gross, dass sie ganz anormal erscheint und auch einen Werth $k = 0{,}01859$ gibt, der dem bei Thüringer Glas erhaltenen sehr nahe kommt. Dieser Werth ist daher bei den angegebenen Mittelwerthen von k nicht berücksichtigt.

In ähnlicher Weise sind die Volumenänderungen für Thermometer Nr. 35 bei 99,4° und 2 oder 3 mm Schlagweite als unverhältnissmässig gross nicht bei der Berechnung von k berücksichtigt.

Tabelle 23.

Temp.	Volumenänderung $\frac{\Delta v}{v}\,10^6$ von Thermometercondensatoren bei der Schlagweite in Millimetern								k
	1	2	3	4	1	2	3	4	
	Flintglasthermometer Nr. 30 ($D = 0{,}142$ mm)								
	Vol.	Vol.							
0°	2,739	9,419	—	—	1	1			
24,9	3,154	10,710	—	—	1,152	1,137	—	—	0,005 791
99,1	3,585	26,770*	—	—	1,309	2,842*	—	—	0,003 118

Volumenänderung $\frac{\Delta v}{v}\,10^6$ von Thermometercondensatoren bei der Schlagweite in Millimetern

Temp.	1	2	3	4	1	2	3	4	k
				Neues Flintglas Nr. 35 ($D = 0{,}206$ mm)					
	Vol.	Vol.	Vol.	Vol.					
0°	0,954	2,517	4,940	8,471	1	1	1	1	—
10,8	0,998	2,665	5,058	8,700	1,046	1,059	1,024	1,027	0,003 612
99,4	1,239	3,538*	10,480*	—	1,298	1,406*	2,122*	—	0,002 998
				Flintglasthermometer Nr. 21 ($D = 0{,}319$)					
	Vol.	Vol.	Vol.	Vol.					
0°	0,589	1,902	3,730	6,304	1	1	1	1	—
16,5	0,604	1,971	4,088	6,651	1,025	1,036	1,096	1,055	0,003 212
25,7	0,708	2,011	4,330	7,161	1,200	1,057	1,161	1,136	0,005 291
100	—	2,628	6,869*	10,510*	—	1,381	1,842*	1,667*	0,003 81
				Thüringer Glas. Thermometer Nr. 8 ($D = 0{,}283$ mm)					
	Vol.	Vol.	Vol.	Vol.					
0°	0,628	1,744	3,789	6,640	1	1	1	1	—
16,2	0,641	2,268	5,503	8,658	1,021	1,300	1,452	1,304	0,016 62
33,4	1,217	3,270	6,081	13,970	1,939	1,875	1,605	2,105	0,026 38

Bei den Beobachtungen an dem Thermometer Nr. 35, welche von Hrn. Alexander Pogorelko im Heidelberger Laboratorium ausgeführt wurden, wurde ein anderes Funkenmikrometer benutzt, dessen Kugeln 30 mm Durchmesser hatten, und dessen Schlagweite in halben Pariser Linien gemessen wurde. Das Flintglas war ebenfalls von dem der anderen Apparate verschieden.

Hr. A. Pogorelko bestimmte gleichzeitig für verschiedene Temperaturen in der § 10 beschriebenen Weise mit einer 44gliedrigen Chromsäurekette und den Ausschlägen einer Multiplicatornadel die electrische Capacität derselben Thermometercondensatoren. Die Capacität wurde dabei mit der constanten Capacität des Thermometercondensators Nr. 17 aus Flintglas, welcher in Eiswasser stand, verglichen. Dem letzteren entsprach ein Multiplicatorausschlag von 46 Scalentheilen.

Werden c und c_0 die Capacitäten bei t^0 und 0^0 genannt, so lässt sich wieder mit Hülfe der Relation

$$c = c_0\,(1 + \varkappa t)$$

die mittlere Zunahme $\varkappa$ der Capacität des Glases der Condensatorkugel für 1^0 Temperaturerhöhung berechnen.

Tabelle 24.

Temp.	Capacität		$\varkappa$
Flintglasthermometer Nr. 30 ($D = 0{,}142$ mm).			
0°	79 Sc.	1	—
23,00	99	1,256	0,01113
99,74	118,2	1,497	0,00498
Neues Flintglas Nr. 35 ($D = 0{,}206$ mm).			
0°	99,0 Sc.	1	—
15	102,4	1,035	0,002333
95,0	119,2	1,204	0,002147
Flintglasthermometer Nr. 21 ($D = 0{,}319$ mm).			
0°	59,1 Sc.	1	—
26	60,25	1,129	0,004961
99,4	68,70	1,315	0,003168
Thüringer Glas. Thermometer Nr. 8 ($D = 0{,}282$ mm).			
0°	35,2 Sc.	1	—
25	45,00	1,307	0,01228
100	unbestimmbar	—	—

Es mögen hier auch noch Beobachtungen an dem Thermometercondensator Nr. 30 für verschiedene Temperaturen mitgetheilt werden, wenn mit demselben in der oben § 2 (Taf II Fig. 6) beschriebenen Weise die Leydener Batterie von 6 Flaschen, mit der Electricitätsmenge 20 geladen, leitend verbunden wurde.

Tabelle 23a.

Electricitätsmenge 20 in 6 Flaschen.
Flintglasthermometer Nr. 30 ($D = 0{,}142$ mm).

Temp.	Volumenänderung		k
0°	73,41 Sc.	9,86 Vol. 1	—
26,7	87,84	11,80 1,196	0,007 342
100	115,00	15,45 1,566	0,005 660

Man ersieht aus diesen Versuchen, dass k und $\varkappa$ ähnliche Werthe haben, dass die von electrischen Kräften herbeigeführte Volumenzunahme und die Capacität des Condensators in derselben Weise mit Erhöhung der Temperatur wachsen.

Die Aenderungen h und k, welche die von electrischen Kräften herbeigeführte Verlängerung 1 oder Volumenzunahme 1 bei der Temperaturerhöhung um 1° zeigen, sind ebenfalls

ähnlich, wie eine Vergleichung der Tabellen 21_c und 22_b mit der Tabelle 23 lehrt.

Beide wachsen mit zunehmender Spannungsdifferenz der Condensatorbelegungen und mit zunehmender Temperatur. Die Uebereinstimmung mit $\varkappa$, welches für verhältnissmässig kleine Spannungsdifferenzen gemessen wurde, ist auch für die kleinsten Spannungsdifferenzen der Condensatorbelegungen am vollkommensten.

Eine genauere Uebereinstimmung ist um so weniger zu erwarten, als die Ausschläge der Glasfadenelectrometer, ebenso wie die Volumenänderungen der Thermometerkugeln nicht zu allen Zeiten dieselben sind. Je nachdem der Condensator schon mehrfach geladen worden ist, oder längere Zeit unbenutzt gestanden hat, ist der Ausschlag kleiner oder grösser.

Aehnliche, wiewohl kleinere Verschiedenheiten zeigten die Capacitätsbestimmungen.

Hr. Alexander Pogorelko hat auch bei Glimmer eine Zunahme der Capacität mit steigender Temperatur beobachtet, und dabei gefunden, dass auch in dieser Beziehung die Glimmerplatten Nr. 2 und 3 eine Verschiedenheit zeigen (vergl. § 12). Die Resultate seiner Beobachtung sind in Tabelle 24_a zusammengestellt.

Tabelle 24a.

Temp.	Capacität		$\varkappa$	Temp.	Capacität		$\varkappa$
Glimmer Nr. 2. ($D = 0{,}030$ mm)				Glimmer Nr. 3. ($D = 0{,}086$ mm)			
0°	2,473	1	—	0°	0,980	1	—
11,5	2,505	1,013	0,001131	12,5	1,028	1,049	0,003920
32,0	2,660	1,076	2375	38,0	0,984	1,004	—
40	2,683	1,085	2124				
55	2,656	1,074	1345				

IV. Ueber die Aenderung der Elasticität durch electrische Kräfte.

§ 23. Abnahme der Torsionskraft bei Glas und Kautschuk. Ein horizontaler Magnetstab wird an einem hohlen innen und aussen versilberten Glasfaden so aufgehängt, dass seine magnetische Axe sehr nahe senkrecht zum magnetischen Meridian steht. Das Torsionsmoment des Glasfadens ist dann gleich und entgegengesetzt dem Drehungs-

moment der magnetischen Kräfte und der unterste Querschnitt des Glasfadens gegen den obersten um den Winkel φ gedreht.

Gibt man den beiden Belegungen des Glasfadens verschiedene electrische Spannung, so beobachtet man eine Drehung des Magnetstabes gegen den magnetischen Meridian hin. Die Torsionskraft des Glasfadens ist durch die electrischen Kräfte verkleinert worden.

Der Versuch gibt für positive und negative Torsionswinkel φ beim Electrisiren stets eine Vergrösserung $\Delta\varphi$, die proportional dem ursprünglichen Torsionswinkel φ ist.

Nach Entladung der Belegungen des Glasfadens nimmt der Magnet wieder seine ursprüngliche Lage an bei Flintglas, während bei Thüringer Glas eine Drehung im Sinne der Torsionsänderung zurückbleibt.

Der hohle Glasfaden AB (Taf. II Fig. 16) von etwa 1 m Länge und 0,5 mm Durchmesser war in der § 15 beschriebenen Weise innen und aussen versilbert, an dem obern Ende A mit einem eingeschmolzenen, von der Aussenfläche isolirten Platindrahte P, am untern Ende B mit einem Flintglasröhrchen und einem eingekitteten geraden Kupferdraht versehen. Es fehlten also nur der Glas- und Metallhaken der Taf. II Fig. 10a.

Der Platindraht wurde in einem passenden isolirten Träger O festgeschraubt, sodass der Flintglasfaden möglichst frei vertical herabhing. An dem geraden Kupferdraht des untern Fadenendes war in gewöhnlicher Weise durch Schrauben ein messingenes Gehänge mit verticalem Planspiegel s und einem Magnetstab NS befestigt, deren Lage mit Fernrohr und Scala aus einer Entfernung von 2360 mm beobachtet wurde. Der Magnetstab war durch einen rings geschlossenen Holzkasten H, der darüber schwebende Planspiegel s durch ein geschwärztes Metallgehäuse I mit Planglas G vor Luftströmungen geschützt. Holzkasten und Metallgehäuse standen mit der Erde in leitender Verbindung.

Als Magnetstab wurde gewöhnlich ein runder Stahlstab von 90 mm Länge und 14 mm Durchmesser benutzt, der 105 g wog.

Innere und äussere Belegung des Glasfadencondensators standen durch Metalldrähte und eingeschaltete kurze Wasser-

säulen mit dem Commutator, Fallapparat und der Leydener Batterie in der § 2 (Taf. II Fig. 6) beschriebenen Weise in leitender Verbindung. Zwischen den Zuleitungsdraht und den obern Theil der äussern Silberbelegung war der leichteren Beweglichkeit wegen ein Goldblatt eingeschaltet.

Nennt man $\Delta\varphi$ die durch das Electrisiren herbeigeführte in Minuten gemessene Drehung des Magnetstabes, a den Abstand der Scala vom Planspiegel und s die dem Drehungswinkel $\Delta\varphi$ entsprechenden am Fernrohr abgelesenen Scalentheile, so ist angenähert:

$$\Delta\varphi = \frac{s}{2a} \cdot 3438 .$$

Der Drehungswinkel φ wurde bei kleinen Werthen direct mit Scala und Fernrohr aus der Lage des Planspiegels mit und ohne Magnetstab bestimmt. Grössere Werthe von φ wurden an der horizontalen Kreistheilung K, die unter dem Planspiegel befestigt war, mit zwei diametral stehenden festen Zeigern Z gemessen.

Des Beispiels wegen mögen hier die Beobachtungen an zwei Glasfäden aus Flintglas und Thüringer Glas folgen mit Angabe von Länge l, Wanddicke D und äusserem Durchmesser $2r$. „Maschine“ in der ersten Spalte bedeutet, dass die electrische Spannung der nicht zur Erde abgeleiteten Condensatorbelegungen soweit als möglich durch Drehen der Holtz'schen Maschine vermehrt wurde.

Bei Thüringer Glas ist hinter dem Zeichen ♯ die nach der Entladung zurückbleibende Torsionsänderung gegeben.

Die Drehung $\Delta\varphi$ war dieselbe, mochte sich freie Electricität auf der innern oder äussern Belegung des Glasfadens befinden.

Tabelle 25.

Gerader Flintglasfaden Nr. 31. Innen und aussen versilbert.
$l = 780$ mm, $D = 0{,}105$ mm, $2r = 0{,}706$ mm.

Electricitätsmenge in 6 Flaschen	$\varphi = 651$ Sc.		$\varphi = 304$ Sc.	
	$\Delta\varphi$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$	$\Delta\varphi$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$
20	0,35 Sc.	0,000 537	0,2	0,000 657
30	0,70	0,001 075	0,4	0,001 315
40	1,05	0,001 613	—	—
Maschine	2,4	0,003 686	—	—

Thüringer Glasfaden Nr. 36.
Innen und aussen versilbert.
$l = 1100$ mm, $D = 0{,}084$ mm, $2r = 0{,}454$ mm.

Electricitätsmenge in 6 Flaschen	$\varphi = 38°$ $\Delta\varphi$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$
10	2,75 Sc. ♯ 1,80 Sc.	0,000 879 ♯ 0,000 575
20	7,10 5,40	2 269 1 726
30	Zerschlagen	— —

Die für Glasfäden verschiedener Dicke erhaltenen Aenderungen der Torsionskraft $\frac{\Delta\varphi}{\varphi}$ sind in Milliontel des Werthes der ursprünglichen Torsion in Tabelle 26 zusammengestellt.

Gleichzeitig enthält die Tabelle auch die Beobachtungen an dem aussen vergoldeten, innen mit Wasser gefüllten Kautschukschlauch Nr. 3 (vgl. § 13), an welchem der Magnet wie an den Glasfäden aufgehängt wurde.

Die Condensatoren aus Thüringer Glas und Kautschuk zeigten einen grossen Torsionsrückstand nach der Entladung und ausserdem einen wegen der starken elastischen Nachwirkung veränderlichen Torsionswinkel φ:

Tabelle 26.

Nr.	Wandstärke	Durchmesser	Länge	Abnahme der Torsionskraft in Milliontel des ursprünglichen Werthes. Electricitätsmenge in 6 Flaschen: 10	20	30	40	Drehen der Maschine
				Englisches Flintglas.				
	mm	mm	mm					
32	0,041	0,266	—	195	—	—	—	3820
31	0,105	0,706	780	—	537	1075	1613	3686
„	„	„	„	—	657	1315	—	—
30	0,105	0,589	600	—	416	658	—	2630
				Thüringer Glas.				
	mm	mm	mm					
36	0,084	0,454	1100	879	2269	—	—	—
35	0,097	0,410	1100	479	1765	3655	—	—
„	„	„	„	486	1626	2639	—	—
37	0,107	0,481	930	520	2399	—	—	—
38	0,186	0,992	1110	—	1214	1342	—	—
				Kautschuk.				
	mm	mm	mm					
3	1	6	1250	—	—	2540	5590	—

Die Abnahme der Torsionskraft wächst etwa mit dem Quadrate der Electricitätsmenge (Dichtigkeit) der Leydener Batterie und nimmt ab mit der Dicke der Glaswand, ähnlich wie die electrische Volumenzunahme oder Verlängerung. Die Aenderung selbst ist aber unter sonst gleichen Umständen bedeutend (etwa 100 mal) grösser, als jene.

§ 24. Zunahme der Torsionskraft bei Glimmer und Guttapercha. Sechs Glimmerplatten von 150 mm Länge und 30 mm Breite wurden an den Enden auf einer Strecke von 3 mm mit Kitt aus Schellack und Canadabalsam zusammengeklebt, sodass ein langes Band von 870 mm Länge, 30,13 mm Breite und 0,039 mm Dicke entstand. Rechnet man die Kittstellen ab, so war die Länge nur 842 mm.

Die eine Seite dieses Glimmerbandes wurde behaucht und mit Goldblatt belegt (vgl. § 12), am obern und untern Ende dickere Glimmerstreifen und am untern Ende ausserdem ein Flintglasröhrchen mit geradem Kupferdraht aufgekittet.

An dem Glimmerbande wurde, wie an den Glasfäden, der Magnetstab mit Planspiegel aufgehängt, wobei das obere Ende des Glimmerbandes zwischen zwei zur Erde abgeleitete Stanniolplatten und eine Korkklemme gepresst war.

Die magnetische Axe des Magnetstabes wurde nahezu senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt und dadurch der untere Querschnitt des Glimmerbandes gegen den obern um 13° tordirt.

Während die goldbelegte Seite des Glimmerbandes zur Erde abgeleitet war, wurde vor der unbelegten Seite ein isolirter Spitzenkamm vorbeigeführt, der mit dem positiven Conductor einer kräftigen Holtz'schen Maschine in Verbindung war. Die unbelegte Seite des Glimmerbandes wurde dadurch in ihrer ganzen Breite stark positiv electrisch, während die electrische Spannung auf der mit Gold belegten, und zur Erde abgeleiteten Seite 0 blieb.

Dadurch, dass die beiden Seiten des Glimmerbandes verschiedene electrische Spannung annahmen, verminderte sich der Torsionswinkel φ des untern Endes um etwa 100 Sc.

oder 1°. Die Torsionskraft des Glimmers hatte also um $\frac{1}{13}$ oder 0,0777 des ursprünglichen Werthes zugenommen.

Im Verlauf von $^1/_2$ bis 1 Stunde verlor der Glimmer allmählich den electrischen Zustand, und gingen allmählich der Magnet und Spiegel in die frühere Lage zurück. Negative Electricität wirkte wie positive Electricität.

Bei einer Drehung des Magnetstabes um 180° wurden der ursprüngliche Torsionswinkel φ negativ und die von den electrischen Kräften herbeigeführte Aenderung $\Delta\varphi$ positiv.

Eine Vergleichung der Zahlen mit den bei Glas gefundenen ist nicht wohl möglich, da die electrische Spannungsdifferenz der beiden Glimmerflächen unbekannt war, sicher aber einen grösseren Werth, wie bei den versilberten hohlen Glasfäden hatte.

Ein Streifen Guttapercha von 1120 mm Länge, 30 mm Breite und 0,034 mm Dicke, einseitig mit Goldblatt belegt, zeigte, wie das Glimmerband behandelt, ebenfalls eine Zunahme der Torsionskraft um 0,003 160 des ursprünglichen Werthes nach dem Electrisiren.

Die ursprüngliche Torsion φ des unelectrischen Guttaperchabandes nahm aber noch stärker ab, die elastische Nachwirkung war also noch grösser, als bei Kautschuk.

Der Versuch, breitere Guttaperchastreifen auf beiden Seiten mit Goldblatt zu belegen und zu electrisiren, führte nicht zum Ziel, weil dann die dünne Guttapercha von der Electricität durchgeschlagen wurde.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass die Torsionskraft von Glimmer und Guttapercha zunimmt, von Flintglas, Thüringer Glas und Kautschuk dagegen abnimmt, wenn man den beiden Oberflächen einer Platte aus den erwähnten Stoffen verschiedene electrische Spannung gibt.

§ 25. Torsionskraft von Glasfäden bei verschiedener Schlagweite mit der Torsionskraft von Stahldraht verglichen. Die in § 23 beschriebene Methode hat den Uebelstand, dass der unterste und oberste Querschnitt des tordirten hohlen Glasfadens um einen verhältnissmässig kleinen Winkel gegeneinander gedreht sind, und dass dem

entsprechend auch nur kleine Aenderungen dieses Winkels von den electrischen Kräften hervorgerufen werden können.

Es wurde daher noch eine zweite Methode benutzt, indem der Magnet NS des Apparates Taf. II Fig. 16 entfernt, und statt dessen in der Hülse C des messingenen Gehänges ein Stahldraht von 910 mm Länge und 0,196 mm Durchmesser befestigt wurde. Am untern Ende U des Stahldrahtes hing eine Poggendorff'sche Klemme. Nachdem diese letztere an dem torsionsfreien Stahldraht ihre Gleichgewichtslage angenommen hatte, wurde sie in einer passenden verticalen Bohrung des festen Armes E festgeschraubt. Der Stahldraht ging dabei frei durch Oeffnungen des Holzkastens H und der darunter liegenden Tischplatte hindurch. Der ganze Apparat stand auf einem festen Pfeiler in einem Zimmer des Erdgeschosses.

Wurde der unterste Querschnitt des Stahldrahtes um einen Winkel φ_u gedreht und in dieser Stellung wieder festgeschraubt, so drehte sich der oberste Querschnitt des Stahldrahtes und der unterste Querschnitt des innen und aussen versilberten hohlen Glasfadens AB um den Winkel φ_0, der direct an der Kreistheilung K gemessen wurde (vgl. auch die schematische Zeichnung Taf. II Fig. 16a).

Innere und äussere Belegung des hohlen Glasfadens standen wie die Belegungen eines Thermometercondensators in der oben § 11 (Taf. II Fig. 7) beschriebenen Weise mit den Belegungen einer Leydener Flasche in Verbindung, welche durch eine Holtz'sche Maschine bis zu einer bestimmten Schlagweite geladen werden konnte. Die Messingkugeln des Funkenmikrometers hatten 24 mm Durchmesser.

Bei dem Electrisiren der inneren und äusseren Belegung des hohlen Glasfadens änderte sich der Winkel φ_0 um eine Grösse $\Delta\varphi_0$, welche mit Fernrohr und Scala in gewöhnlicher Weise gemessen wurde. Die Drehung $\Delta\varphi_0$ ist in Graden durch den Ausdruck gegeben:

$$\Delta\varphi_0 = \frac{s}{2a} 57{,}30,$$

wenn s die abgelesenen Scalentheile und a den Abstand des Spiegels von der Scala bezeichnen. Dieser Abstand betrug bei den folgenden Versuchen 2138 mm.

Nennt man τ_0 das Torsionsmoment des Glasfadens, τ_u das des Stahldrahtes für den Drehungswinkel 1^0, und bezeichnet die durch electrische Kräfte herbeigeführte Aenderung des Torsionsmomentes τ_0 durch $\Delta\tau_0$, so ist:

$$\tau_0\varphi_0 = \tau_u(\varphi_u - \varphi_0), \tag{1}$$

$$(\tau_0 + \Delta\tau_0)(\varphi_0 + \Delta\varphi_0) = \tau_u(\varphi_u - \varphi_0 - \Delta\varphi_0), \tag{2}$$

woraus durch Division folgt:

$$\left(1 + \frac{\Delta\tau_0}{\tau_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}\right) = 1 - \frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_u - \varphi_0}, \tag{3}$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{\Delta\tau_0}{\tau_0} = -\frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}\left(1 + \frac{\varphi_0}{\varphi_u - \varphi_0}\right). \tag{4}$$

Für Glas findet man auch mit dieser zweiten Methode stets φ_0 und $\Delta\varphi_0$ von demselben Vorzeichen, d. h. die electrischen Kräfte vermindern die Torsionskraft des Glases.

Die Kugeln des Funkenmikrometers wurden auf eine bestimmte Schlagweite gestellt, die Holtz'sche Maschine langsam gedreht und gleichzeitig die Verschiebung der Scala im Fernrohr beobachtet. Die grösste Verschiebung, welche im Augenblick des Entladungsfunkens vorhanden war, wurde notirt. Nach einiger Zeit, wenn der Apparat wieder zur Ruhe gekommen war, wurde der Versuch wiederholt.

Die folgenden Beobachtungen wurden von Hrn. G. Olds im Heidelberger Laboratorium angestellt.

Tabelle 27.

Flintglasfaden Nr. 45.
Wanddicke 0,084 mm. Länge 1053 mm.
Aeusserer Durchmesser 0,534 mm.

φ_u	φ_0	Schlagweite in halben Pariser Linien				
		1	2	3	4	5
		Drehung				
		Sc.	Sc.	Sc.	Sc.	Sc.
360°	52°	0,45	1,8	5,85	—	—
−360	−52	−0,45	−1,8	−5,55	−9,25	—
720	100	0,9	4	8,9	18,45	—
1440	204	2,0	7,5	19,4	39,90	62,0

φ_n	φ_0	Schlagweite in halben Pariser Linien 1	2	3	4	5
		Abnahme der Torsionskraft in Milliontel des ursprünglichen Werthes $-\frac{\Delta\tau}{\tau}10^6$				
360°	52°	135	542	1717	2786	—
720	100	140	622	1385	2871	—
1440	204	153	574	1485	3054	4745
	Mittel	143	579	1526	2903	4745

Bei einem anderen Flintglasfaden Nr. 41 von 0,124 mm Wanddicke, 790 mm Länge und 0,743 mm äusserem Durchmesser wurde gefunden:

bei der Schlagweite	1	2	3	4	halbe Par. Linien
$-\frac{\Delta\tau_0}{\tau_0}10^6 =$	54	180	360	613.	

Die erste Methode des § 23 mit einem Magnetstab gab für denselben Flintglasfaden Nr. 41 und die Schlagweite 4 als Abnahme der Torsionskraft 536 statt 613.

Die Aenderung der Torsionskraft ist hiernach proportional dem Quadrate des electrischen Spannungsunterschiedes auf beiden Belegungen des Glasfadens.

Die Schwierigkeit liegt auch bei diesen Versuchen darin, dass man unter scheinbar denselben Bedingungen bald grössere, bald kleinere Werthe von $\Delta\varphi_0$ erhält.

Bei Flintglas sind diese Werthe im allgemeinen um so grösser, je längere Zeit der Glasfaden unelectrisch war, und um so kleiner, je öfter er electrisirt und entladen wurde.

Bei dem Flintglasfaden Nr. 45 schwankte z. B.:

$\Delta\varphi_0$ zwischen	9,3 Sc.	bis	6,9 Sc. für $\varphi_u =$	360°
	20,7		14,8	720
	52,5		30	1440

bei einer Schlagweite von 4 halben Pariser Linien.

Noch weit grösser sind die Schwankungen bei Thüringer Glas, wo es auch vorkommt, dass bei scheinbar denselben Bedingungen in einer Reihe aufeinander folgender Versuche $\Delta\varphi_0$ zuerst zunimmt und dann wieder abnimmt. So gab

z. B. der Thüringer Glasfaden Nr. 47 von 0,155 mm Wanddicke bei der Schlagweite 4 folgende Drehungen $\Delta\varphi_0$:

17 12 8 Scalentheile,

und bei einer späteren Versuchsreihe:

14 16 10,5 13 10,8 9,5 6 9,5 5 9 10 Scalentheile.

Des Beispiels wegen mögen hier einige Messungen an Glasfäden aus Thüringer Glas folgen.

Tabelle 28.

Nr.	Thüringer Glas					Abnahme der Torsionskraft in Milliontel des ursprünglichen Werthes bei Schlagweite in halben Pariser Linien			
	Wanddicke	Durchmesser	Länge	φ_u	φ_0	1	2	3	4
	mm	mm	mm						
46	0,129	0,529	1085	1440°	105°	140	360	620	—
„	„	„	„	2880	201	170	710	795	—
42	0,133	0,686	1135	720	25	167	278	834	—
44	0,155	0,587	1199	2160	120	220	1000	2010	2010

Auffallend ist, dass bei grossen Schlagweiten die Torsionskraft einen Minimalwerth zu erreichen scheint, unabhängig von der electrischen Spannungsdifferenz der Belegungen.

Bei Flintglas liess sich ein solcher Minimalwerth nicht erreichen, weil bei grösseren Schlagweiten die Glaswand stets durchgeschlagen wurde.

§ 26. Aenderung der Längendilatation. — Da der Torsionsmodulus proportional dem Elasticitätsmodulus einer Substanz ist, so würde mit den Versuchen der § 23—25 auch bewiesen sein, dass der Elasticitätsmodulus von Glimmer und Guttapercha durch electrische Kräfte vergrössert, von Flintglas, Thüringer Glas und Kautschuk dagegen verkleinert wird.

Ich versuchte daher auch eine Aenderung der Längendilatation durch Electrisiren des Glimmerbandes nachzuweisen.

An dem unteren Ende des Glimmerbandes wurde eine leichte Waagschale (von 11,97 g) befestigt (vergl. Taf. II

Fig. 15). Ein Metallhaken am unteren Ende der Waagschale war mit dem Oertling'schen Fühlhebel (vergl. § 15 und Taf. II Fig. 10) durch einen feinen Stahldraht verbunden. Der Stahldraht lief über eine leichte zwischen Spitzen gehende Rolle von 100 mm Durchmesser. Sein eines Ende war vertical in der Verlängerung des Glimmerbandes; das andere Ende horizontal.

Mit diesem Apparat wurde zunächst der Elasticitätscoëfficient der verschiedenen Substanzen bestimmt.

Vor der Glasbläserlampe wurden massive Fäden aus Thüringer Glas und Flintglas gezogen und in den beschriebenen Apparat eingesetzt. Dann wurde die Verlängerung für eine Belastung der Waagschale mit 50 g oder 100 g (bei Guttapercha mit 20 g) mit dem Oertling'schen Fühlhebel gemessen.

Die Länge wurde mit einer auf Glas geätzten Millimetertheilung, der Durchmesser an 10 über den ganzen Faden gleichmässig vertheilten Stellen mit einem Fühlhebel gemessen, und aus diesen Messungen das Mittel genommen.

Aehnliche Messungen wurden an einem Guttaperchastreifen und dem Glimmerbande angestellt, dessen Dicke sehr genau mit einem Sphärometer bestimmt wurde.

Nennt man:

l die Länge,

Δl die Verlängerung,

G das belastende Gewicht in Kilogrammen,

q den Querschnitt des Fadens oder Bandes in Quadratmillimetern, so ist der Elasticitätscoëfficient:

$$E = \frac{G}{q} \cdot \frac{l}{\Delta l} \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}.$$

Die Messungen sind in Tabelle 29 zusammengestellt und zeigen, dass die elastische Kraft des Glimmerbandes sechsmal kleiner, als die des Glases war.

Tabelle 29.

	Thür. Glas	Flintglas	Glimmer	Guttapercha
	mm	mm	mm	mm
Länge	1120	1040	842	1167
Breite	0,3200	0,3380	30,13	48,64
Dicke	„	„	0,0390	0,0618
	Verlängerung (1 rev. = 0,247 934 mm)			
	rev.	rev.	rev.	rev.
bei 50 g	0,7257	0,7126	0,2864	1,8899
„ 100 g	1,6065	1,5355	0,6078	(bei 20 g)
Belastung				
	Elasticitätscoëfficient $\frac{kg}{qmm}$			
für 50 g	3869	3280	504,4	157
„ 100 g	3495	3044	475,3	
Belastung				
	Temp. = 17° C.			

Hieraus lässt sich die von electrischen Kräften bewirkte Längendilatation berechnen, die bei Glimmer besonders stark auftreten muss.

Da das Glimmerband durch Waagschale und Fühlhebel eine Belastung von 33 g hatte, so würde diese eine Verlängerung von 0,049 mm hervorgebracht haben. Eine Vermehrung der elastischen Kraft des Glimmers durch Electrisiren um 7 Procent würde also eine Verkürzung des Glimmerbandes um 0,003 mm oder eine Verschiebung der Libellenblase des Fühlhebels um noch nicht 1 Sc. herbeiführen.

Zu dieser Verkürzung käme dann noch die von den electrischen Kräften herrührende Verlängerung des Glimmerbandes, die nach den Versuchen des § 12 erwiesen ist und für eine 3 mm Schlagweite entsprechende Spannungsdifferenz etwa 1,5 Sc., bei 6 mm Schlagweite (einer Spannungsdifferenz, die wohl nicht erreicht wurde) etwa 6 Sc. Verschiebung der Libellenblase betragen würde. Es wäre also am Fühlhebel eine Verschiebung der Libellenblase von 0,5 Sc. bis 3,5 Sc., entsprechend einer Verlängerung von 10 bis 15 Milliontel der ursprünglichen Länge zu erwarten gewesen.

In der That beobachtete ich eine Verlängerung von 2,3 Sc. bis 2,9 Sc. durch starkes Electrisiren des Glimmers mit einem Spitzenkamm in der § 24 beschriebenen Weise.

Leider erlaubte die Schellackkittung nicht, das Glimmerband durch Bestreichen mit einer Flamme unelectrisch zu machen und die entsprechende Verkürzung zu beobachten.

Mein Bestreben, eine Aenderung der electrischen Verlängerung bei verschiedener Belastung der Waagschale oder des Glimmerbandes zu beobachten, scheiterte zum Theil an der Schwierigkeit, für längere Zeit die Temperatur genügend constant zu erhalten und die electrische Spannungsdifferenz der beiden Glimmerflächen zu messen, hauptsächlich aber an der kleinen, fortwährenden Verlängerung, die das Glimmerband bei der Belastung zeigte, und die der elastischen Nachwirkung zuzuschreiben ist.

Bei den mit Glimmerplatten construirten Thermometercondensatoren hätte die Vermehrung der elastischen Kraft höchstens die beobachtete Senkung der Flüssigkeitskuppe im Capillarrohre, welche § 12 nachgewiesen wurde, verkleinern können.

Bei den Thermometercondensatoren aus Glas, dessen electrische Kraft durch Electrisiren abnimmt, hätte freilich diese Abnahme eine Senkung der Flüssigkeitskuppe herbeiführen können, da der hydrostatische Druck auf die Innenseite der Thermometerkugel grösser als auf die Aussenseite war.

Gegen eine solche Annahme spricht einmal der Umstand, dass man das Capillarrohr des Thermometercondensators auch seitlich oder nach unten legen kann (§ 14), es erfolgt doch beim Electrisiren ein Zurückgehen der Flüssigkeitskuppe im Capillarrohr.

Ferner war die Belastung der geraden Flintglasfäden durch den Fühlhebel nur 21 g, und es würde bei der geringen Aenderung des Elasticitätscoëfficienten des Glases durch Electrisiren nur eine sehr geringe Verschiebung der Luftblase des Fühlhebels dadurch hervorgebracht worden sein.

Beispielsweise würden diese 21 g bei den geraden Fäden aus Flintglas Nr. 3 und Thüringer Glas Nr. 35 (vgl. Tab. 14

§ 15) eine elastische Verlängerung von 0,007 mm, resp. 0,083 mm hervorgebracht haben.

Hätte sich nun die Elasticität durch Electrisiren um 0,004 des ursprünglichen Werthes vermindert (welche Aenderung jedoch bei meinen Beobachtungen nie erreicht wurde), so würde dies einer Verlängerung der Glasfäden um 0,000 028 mm resp. 0,000 332 mm entsprechen, oder einer Verschiebung der Libellenblase um 0,01 Sc. oder 0,1 Sc. Die beobachteten Verlängerungen waren aber 50 bis 100 mal grösser, können also nicht durch eine Aenderung der Elasticität des Glases erklärt werden.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

V. *Versuche zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der electrischen Strömung; von H. R. Hertz.*

Nach den Gesetzen der Induction ist die Intensität i in einem linearen Stromkreise, in welchem die variable electromotorische Kraft A wirkt, gegeben durch einen Anfangswerth und die Differentialgleichung:

$$iw = A - 2P\frac{di}{dt},$$

in welcher w den Widerstand, P das Potential des Leiters auf sich selbst bezeichnet. Durch Multiplication mit idt folgt die Gleichung:

$$Aidt = i^2 w\,dt + d(Pi^2),$$

welche zeigt, dass das durch obige Gleichung gegebene Gesetz im Einklange steht mit dem Principe von der Erhaltung der Energie, unter der Voraussetzung nämlich, dass die von der Kette geleistete Arbeit einerseits und die im Stromkreise gewonnene Wärme und die vermehrte potentielle Energie andererseits die einzigen in Betracht kommenden Arbeitsgrössen sind. Diese Voraussetzung ist nicht erfüllt, und es können also die obigen Gleichungen exacte Gültigkeit nicht

beanspruchen in dem Falle, dass sich die Electricität mit einer trägen Masse bewegt, deren Einfluss nicht völlig verschwindet. In diesem Falle ist der rechten Seite der zweiten Gleichung ein Glied hinzuzufügen, welches der vermehrten kinetischen Energie der Strömung entspricht. Letztere ist dem Quadrate der Stromstärke proportional, kann also $= mi^2$ gesetzt werden, wo m eine von den Verhältnissen der Strombahn abhängige Constante ist; und es treten daher an Stelle der obigen Gleichungen die corrigirten:

$$A\,i\,dt = i^2 w\,dt + d(Pi^2) + d(mi^2)$$

$$iw = A - 2P\frac{di}{dt} - 2m\frac{di}{dt},$$

$$= A - 2(P+m)\frac{di}{dt},$$

Ganz analoge Schlüsse lassen sich auch in dem Falle anwenden, dass wir ein System von Stromkreisen vor uns haben, in welchen die electromotorischen Kräfte A_1, A_2... wirken. Nach Einführung der Correctur für die Masse nehmen die bekannten Differentialgleichungen, welche die Intensitäten bestimmen, die Form an:

$$i_1 w_1 = A_1 - 2(P_{11}+m_1)\frac{di_1}{dt} - P_{12}\frac{di_2}{dt} - \ldots - P_{1n}\frac{di_n}{dt},$$

$$i_2 w_2 = A_2 - 2P_{12}\frac{di_1}{dt} - 2(P_{22}+m_2)\frac{di_2}{dt} - \ldots - P_{2n}\frac{di_n}{dt},$$

$$\vdots$$

$$i_n w_n = A_n - P_{1n}\frac{di_1}{dt} - \ldots\ldots - 2(P_{nn}+m_n)\frac{di_n}{dt}.$$

Die einzige Aenderung, welche eine träge Masse der Electricität in diesen Gleichungen hervorgebracht hat, besteht sonach in einer scheinbaren Vergrösserung der Eigenpotentiale, und es erhellt ohne weiteres:

1) dass die electromotorische Kraft der Extraströme unabhängig ist von den gleichzeitig in anderen Leitern hervorgerufenen Inductionsströmen und den in diesen bewegten Massen,

2) dass die Integralwerthe der Inductionsströme nicht beeinflusst werden von den bewegten Massen, weder der inducirenden noch der inducirten Leiter,

3) dass dagegen die Integralintensität der Extraströme grösser erscheint als die aus der einfachen Inductionswirkung berechnete.[1])

Der Werth dieser Vergrösserung hängt ab von den Grössen m, deren Bedeutung jetzt näher erläutert werden möge und zwar unter Zugrundelegung der Weber'schen Anschauung von der electrischen Strömung. Das Vorhandensein der mit den Grössen m verbundenen Glieder ist übrigens unabhängig von der Richtigkeit dieser Anschauung und von der Existenz electrischer Flüssigkeiten überhaupt, jede Erklärung des Stromes als eines Bewegungszustandes träger Materie wird diese Glieder gleichfalls einführen müssen, und nur die Auslegung der Grössen m wird eine verschiedene sein.

Es enthalte die Volumeneinheit des Leiters λ Einheiten positiver Electricität, und es sei die Masse jeder Einheit $= \varrho$ Milligramm. Die Länge des Leiters sei l und sein überall als gleich vorausgesetzter Querschnitt $= q$. Dann enthält die Längeneinheit des Leiters $q\lambda$ electrostatische Einheiten, und die gesammte im Leiter bewegte positive Electricität hat die Masse $\varrho . q . \lambda . l$ mg. Die Anzahl der electrostatischen Einheiten, welche bei der Intensität i (in electromagnetischem Maasse) in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehen, ist einerseits $= 155\,370 . 10^6 i$, andererseits gleich der Geschwindigkeit v, multiplicirt mit $q\lambda$. Sonach ist:

$$v = \frac{155\,370 . 10^6}{q\lambda} i,$$

und die kinetische Energie der im Leiter enthaltenen positiven Electricität:

---

1) Unter Hinweis auf diese einfachen Schlüsse war von der philosophischen Facultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin den Studirenden für das Jahr 1879 die Aufgabe gestellt worden, über die Grösse von Extraströmen Versuche auszuführen, aus welchen wenigstens eine obere Grenze für die bewegte Masse würde festgestellt werden können. Es war schon in der Aufgabe darauf hingewiesen, dass zu diesen Versuchen die Extraströme aus doppeltdrähtigen Spiralen, deren Zweige in in entgegengesetzter Richtung durchflossen wären, besonders geeignet sein würden. Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen identisch mit derjenigen, welche des Preises gewürdigt wurde.

$$= \tfrac{1}{2} l \varrho q \lambda \left\{ \frac{155\,370 \cdot 10^6}{\lambda} \right\}^2 \frac{i^2}{q^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{l i^2}{q} \cdot \varrho \frac{155\,370^2\, 10^{12}}{\lambda} = \tfrac{1}{2} \mu \frac{l i^2}{q}.$$

Die Grösse $\frac{1}{2}\frac{l i^2}{q}$ ist in endlichen Maassen angebbar, die Grösse $\varrho \frac{155\,370^2\, 10^{12}}{\lambda}$, welche mit μ bezeichnet worden ist, ist eine Constante, welche nur vom Material des Leiters abhängt und für verschiedene Leiter den Dichtigkeiten der Electricität in denselben umgekehrt proportional ist. Ihrer Dimension nach ist dieselbe eine Fläche; mit der Bezeichnung Milligrammmillimeter versehen gibt sie die lebendige Kraft beider Electricitäten, d. h. die gesammte kinetische Energie der Strömung in einem Cubikmillimeter eines Leiters, in welchem die magnetische Stromdichtigkeit 1 herrscht.

Die Bestimmung der Grösse μ oder doch einer obern Grenze für dieselbe war die Aufgabe der vorliegenden Versuche.

Methode der Versuche.

Da wir die lebendige Kraft der gesammten Electricität einmal $= m i^2$, das andere mal $= \frac{l\mu}{q} i^2$ gesetzt haben, so folgt μ aus m nach der Formel $\mu = \frac{q m}{l}$. Zur Bestimmung von m würde es hingereicht haben, die Intensität J des Extrastromes in einem Leiter zu bestimmen, dessen Potential P und Widerstand w in absolutem Maasse bekannt waren. Aus der Gleichung $J = \frac{2i}{w}(P + m)$ würde sich m ohne weiteres ergeben. Da aber die Messung der Extraströme nur in verzweigten Leitersystemen möglich ist, also eine grosse Zahl von Widerständen zu bestimmen wäre, so empfiehlt es sich mehr, in derselben Leitung durch zwei verschiedene Potentiale Extraströme zu erregen, wodurch zwei Gleichungen für die Grössen w und m erhalten werden. Verhält sich die Intensität im unverzweigten Stromkreise zu derjenigen Intensität, nach welcher der Extrastrom gemessen wird, wie $\alpha : 1$,

und ist J die gemessene Intensität, so sind die in Betracht kommenden Gleichungen:

$$\frac{\alpha w J}{i} = 2P + 2m, \qquad \frac{\alpha w J'}{i'} = 2P' + 2m,$$

und also:

$$m = \frac{P\frac{J'}{i'} - P'\frac{J}{i}}{\frac{J}{i} - \frac{J'}{i'}}.$$

Man wird gut thun, das eine Potential P' so gross zu nehmen, dass der Einfluss der Masse jedenfalls dagegen verschwindet, das andere Potential P dagegen möglichst klein zu wählen. Man kann alsdann die Gleichungen einfacher schreiben:

$$\frac{\alpha w J}{i} = 2P + 2m, \qquad \frac{\alpha w J'}{i'} = 2P',$$

$$m = \frac{i'J}{iJ'}P' - P, \text{ oder, wenn } i' = i\text{:}$$

$$m = P\left\{\frac{JP'}{J'P} - 1\right\}.$$

Nach diesem Principe wurden die Versuche ausgeführt. Als stromgebende Leitersysteme dienten bei den ersten Versuchsreihen doppeldrähtige Spiralen, bei den späteren geradlinig ausgespannte Doppeldrähte. Diese Drahtsysteme konnten ohne Aenderung ihres Widerstandes so geschaltet werden, dass die beiden Zweige derselben in gleichem und in entgegengesetztem Sinne durchströmt waren. Die aus beiden Schaltungen resultirenden Potentiale wurden durch die Rechnung und die Intensitäten der aus beiden erfolgenden Extraströme durch den Versuch bestimmt. Waren diese Intensitäten den berechneten Potentialen proportional, so konnte der Einfluss einer Masse nicht nachgewiesen werden, wurde eine Abweichung von der Proportionalität constatirt, so folgte die lebendige Kraft der Strömung nach den obigen Formeln.

Die Messung der Extraströme geschah allemal mittelst einer Wheatstone'schen Brücke, in deren einen Zweig das stromgebende Drahtsystem eingeschaltet war, während das Potential der andern Zweige so klein als möglich gemacht wurde. Die Brücke war so abgeglichen, dass ein dieselbe

durchfliessender constanter Strom keine dauernde Ablenkung der Galvanometernadel hervorrief; wurde dann aber die Richtung desselben ausserhalb der Brücke umgekehrt, so passirten zwei gleiche und gleichgerichtete Extraströme das Galvanometer, deren Integralintensität durch den Ausschlag der Nadel gemessen wurde. Sobald die Nadel von ihrem Ausschlag zurückkehrte, konnte dann die Umschaltung wiederholt und so die Multiplicationsmethode in Anwendung gebracht werden.

Als Hauptschwierigkeit trat diesen Messungen die geringe Grösse der zu beobachtenden Extraströme entgegen, welche die eben beschriebene Methode in ihrer einfachsten Gestalt unmöglich machte. Allerdings konnte man schon durch blosse Steigerung der inducirenden Stromstärke die Extraströme beliebig gross machen, aber die Schwierigkeiten, welche eine genaue Regulirung der Brücke hatte, wuchsen weit schneller, als die so erhaltenen Intensitäten. Bei den grössten Stromstärken, bei welchen eine solche Regulirung noch dauernd möglich war, bewegte ein einzelner Extrastrom aus entgegengesetzt durchströmten Zweigen die Nadel des Galvanometers nur um Bruchtheile eines Scalentheils, während schon die Annäherung der Hand an einen Quecksilbernapf oder die Strahlung einer entfernten Gasflamme auf die Spiralen hinreichte, Ausschläge der Nadel von mehr als 100 Scalentheilen hervorzurufen. Ich versuchte daher, die Anwendung sehr starker Ströme dadurch zu ermöglichen, dass ich dieselben nur auf Augenblicke durch die mittelst eines schwachen Stromes regulirte Brücke leitete. Es zeigte sich indessen, dass die infolge der Wärmewirkungen des Stromes momentan in der Brücke entstandenen electromotorischen Kräfte von derselben Ordnung waren, wie die der zu beobachtenden Extraströme, sodass brauchbare Resultate nicht erhalten wurden. Nur so viel zeigten die auf diese Weise angestellten Versuche, dass eine bedeutende Abweichung vom Potentialgesetz jedenfalls nicht stattfinde.

Um deshalb auch mit schwächeren Strömen messbare Ausschläge zu erhalten, leitete ich bei jedem Durchgang der Nadel durch die Ruhelage eine grössere Zahl von Extra-

ströme in gleicher Richtung durch das Galvanometer. Zu dem Ende wurde der Strom im geeigneten Augenblick ausserhalb der Brücke 20 mal schnell hintereinander umgeschaltet, zugleich aber zwischen jeder Umschaltung des Stromes das Galvanometer gewendet. Dasselbe blieb ausserdem, um jede stärkere Dämpfung zu vermeiden, nachdem die Brücke einmal regulirt war, im allgemeinen geöffnet und wurde nur während der Zeit mit der übrigen Combination in Verbindung gesetzt, welche zur Erzeugung der Extraströme nothwendig war.

Die genannten Operationen wurden mittelst eines besonderen Commutators ausgeführt und nahmen ca. 2 Secunden in Anspruch, eine Zeit, welche hinreichend gross ist, um sämmtliche Extraströme zur vollen Entwicklung gelangen zu lassen, und sich auch als hinreichend klein gegen die Schwingungsdauer der Nadel erwies.

Diese Methode bot mehrere Vortheile dar. Zunächst konnten genau messbare Wirkungen schon mit sehr schwachen und daher auch sehr constanten erzeugenden Strömen hervorgerufen werden. In allen folgenden Versuchen bestand der äussere Stromkreis aus einem Daniell'schen Element und einem Ballastwiderstand von 3 bis zu 80 S.-E. Sind ferner die Widerstände der Brücke nicht genau abgeglichen, und passirt infolge davon auch von dem constanten Strom ein Theil das Galvanometer, so wird doch dieser Theil im Galvanometer beständig seine Richtung ändern, sodass, wenn die Ungleichheit nur klein ist, der durch sie verursachte Fehler fast völlig verschwindet.

Da weiter die Verbindung des Galvanometers mit den übrigen Drähten der Combination ihre Richtung beständig ändert, so werden diejenigen in der Brücke bestehenden oder durch den Strom erregten electromotorischen Kräfte, welche ihre Richtung nicht mit der Richtung des Stromes ändern, ohne Einfluss auf die Nadel sein. Von grossem Werthe ist der Umstand, dass während des grössten Theiles der Schwingung das Galvanometer allen störenden Einflüssen entzogen war.

Infolge dieser günstigen Bedingungen zeigten die Ver-

suche eine bei der Kleinheit der zu messenden Grössen befriedigende Uebereinstimmung, die Abweichung der erhaltenen Resultate vom Mittel war im allgemeinen kleiner als $^1/_{30}$ des ganzen Werthes. Auch hier wurde das Verfahren bei jedem Durchgang der Nadel durch die Ruhelage wiederholt. Bis zur Erlangung eines constanten Ausschlags konnte indessen die Multiplication nicht fortgesetzt werden, denn zu der constanten und geringen Dämpfung der Nadel durch den Luftwiderstand kam die nur kurze Zeit wirkende Dämpfung, welche durch die Einschaltung des Galvanometers in die Brücke entstand. Die Dauer dieser Einschaltung war nicht immer genau dieselbe, die daherrührende Dämpfung also auch nicht genau bestimmbar. Da nun ihr Einfluss bei weiten Schwingungen sehr merklich wird, so war das Verfahren auf kleinere Ausschläge beschränkt, und es wurden daher im allgemeinen nur 7 bis 9 Elongationen gemessen. Das Verfahren, nach welchem aus den erhaltenen ganzen Schwingungsbogen der wahrscheinlichste Werth des Extrastromes bestimmt wurde, soll zunächst auseinander gesetzt werden.

Es sei T die Schwingungsdauer der Galvanometernadel, λ das beständig wirkende logarithmische Decrement, $q = e^{-\lambda}$ das Verhältniss einer Schwingung zur vorhergehenden und zur Abkürzung:

$$\frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\lambda}} = \varkappa .$$

Ferner seien a_1, a_2, a_3 die successiven Elongationen rechts und links von der Ruhelage, $\alpha_1 = a_1 + a_2$, $\alpha_2 = a_2 + a_3$ etc. die ganzen Schwingungsbogen, und k_1, k_2... die Incremente der Geschwindigkeit in der Ruhelage, welche die Inductionsstösse messen. Dann ist, wenn von einer besondern Dämpfung während des Stosses einstweilen abgesehen wird:

$$a_2 = k_1 \varkappa + q a_1$$
$$a_3 = k_2 \varkappa + q a_2 = k_2 \varkappa + q k_1 \varkappa + q^2 a_1 ,$$

also wird:

$$\alpha_1 = \varkappa . k_1 + a_1 (1 + q)$$
$$\alpha_2 = \varkappa . k_2 + \varkappa k_1 (1 + q) + a_1 q (1 + q) .$$

Wird die erste Gleichung, mit q multiplicirt, von der zweiten subtrahirt, so wird erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 q &= (k_1 + k_2)\varkappa \text{ und analog} \\ \alpha_3 - \alpha_2 q &= (k_2 + k_3)\varkappa \\ &\vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} q &= (k_{n-1} + k_n)\varkappa . \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir den Mittelwerth der Stösse $k_1 \ldots k_n$, welche alle gleich sein müssten, wenn die Apparate exact arbeiteten:

$$\varkappa k = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n - q(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1})}{2(n-1)}$$

oder, wenn die Summe der ganzen Schwingungsbogen mit Σ bezeichnet wird:

$$\varkappa k = \frac{(\Sigma - \alpha_1) - q(\Sigma - \alpha_n)}{2(n-1)} .$$

Die Anwendung dieser Formel ist sehr bequem und empfiehlt sich immer dann, wenn die einzelnen Stösse nicht regelmässig genug sind, um einen constanten Grenzwerth der Schwingung hervorzubringen, oder wenn aus anderen Gründen nur eine beschränkte Zahl von Elongationen beobachtet worden ist.

Tritt zu der beständig wirkenden Dämpfung noch eine momentane während der Schliessung, so kann letztere als ein der Bewegung entgegen gerichteter Stoss betrachtet werden, welcher proportional der Dauer der Schliessung und der Geschwindigkeit der Nadel ist. Ist letztere $= v$, erstere $= \tau$, das logarithmische Decrement während der Schliessung $= \lambda'$, so ist die Grösse eines solchen Stosses:

$$-4\frac{\lambda'}{T} \cdot \tau \cdot v \cdot$$

Sind nun a_1 und a_2 die voraufgehende und die nachfolgende Elongation, so erreicht die Nadel die Ruhelage mit der Geschwindigkeit $\frac{a_1 q}{\varkappa}$ und verlässt dieselbe mit der Geschwindigkeit $\frac{a_2}{\varkappa}$; da das Anwachsen der Geschwindigkeit sehr nahezu gleichförmig geschieht, ist für v der mittlere Werth $\frac{a_1 q + a_2}{2\varkappa}$ zu setzen, und die Grösse des ganzen Stosses wird daher: $-2\frac{\lambda' \tau}{T\varkappa}(a_1 q + a_2) = -\frac{c}{\varkappa}(a_1 q + a_2)$.

Indem wir diesen Geschwindigkeitszuwachs zu dem durch den Inductionsstoss veranlassten k addiren, erhalten wir zunächst die Gleichungen:

$$a_2 = k_1 \varkappa + a_1 q - c\,(a_2 + a_1 q),$$
$$a_3 = k_2 \varkappa + a_2 q - c\,(a_3 + a_2 q) \text{ etc.}$$

oder:

$$(1 + c)\,a_2 = k_1 \varkappa - (1 - c)\,a_1 q,$$
$$(1 + c)\,a_3 = k_2 \varkappa - (1 - c)\,a_2 q \text{ etc.},$$

und durch eine ähnliche Rechnung wie oben:

$$(1 + c)\,\alpha_2 - (1 - c)\,q\,\alpha_1 = (k_2 + k_1)\,\varkappa,$$
$$(1 + c)\,\alpha_3 - (1 - c)\,q\,\alpha_2 = (k_3 + k_2)\,\varkappa,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(1 + c)\,\alpha_n - (1 - c)\,q\,\alpha_{n-1} = (k_n + k_{n-1})\,\varkappa.$$

Schreiben wir an Stelle der Grössen $k_1 \ldots k_n$ ihren theoretischen Werth k, so erhalten wir nach einer einfachen Umformung die Gleichungen:

$$\alpha_2 - q\alpha_1 + c\,(\alpha_2 + q\alpha_1) = 2k\varkappa,$$
$$\alpha_3 - q\alpha_2 + c\,(\alpha_3 + q\alpha_2) = 2k\varkappa,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n - q\alpha_{n-1} + c\,(\alpha_n + q\alpha_{n-1}) = 2k\varkappa;$$

und aus diesen sind nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Grössen k und c zu bestimmen.

Die sehr weitläufige Rechnung wurde indessen nicht für alle Beobachtungen durchgeführt, sondern es wurde aus einer Anzahl derselben der Werth von c bestimmt und das Mittel der erhaltenen wenig differirenden Werthe für die übrigen Beobachtungen als richtig angenommen. Ist c bekannt, so folgt einfacher:

$$k\varkappa = \frac{(\Sigma - \alpha_1) - q(\Sigma - \alpha_n) + c\,((\Sigma - \alpha_1) + q(\Sigma - \alpha_n))}{2(n-1)}.$$

Da das mit c behaftete Glied überhaupt nur als Correctur auftritt, kommt es auf eine haarscharfe Bestimmung von c gar nicht an. Dadurch dass man das Mittel aus zwei successiven Stössen bildet, nämlich:

$$k_m \varkappa = \frac{\alpha_m - q\,\alpha_{m-1} + c\,(\alpha_m + q\,\alpha_{m-1})}{2}$$

kann man sich Kenntniss davon verschaffen, wie weit die einzelnen Werthe vom Mittel abweichen.

Da im Folgenden immer nur die Endresultate gegeben werden sollen, will ich eine Multiplicationsreihe mit Berechnung der einzelnen Stösse vollständig mittheilen, um die Uebereinstimmung der Versuche unter sich beurtheilen zu lassen.

Extraströme aus geradlinigen Drähten (bei gleichsinnig durchströmten Drähten.)

Intensität des inducirenden Stromes: 75,7.

$q = 0{,}9830 \qquad c = 0{,}016.$

Ablesung, corr. auf Bogen	Schwingungsbogen α_n	$\alpha_n - q\alpha_{n-1}$	$\alpha_n + q\alpha_{n-1}$	Grösse der einzelnen Stösse in Scalentheilen $k\varkappa = \frac{\alpha_n - q\alpha_{n-1} + c(\alpha_n + q\alpha_{n-1})}{2}$
517,2	30,7	—	—	—
475,9 547,9	72,0	41,8	102,3	21,7
	111,3	40,5	182,5	21,7
437,8 587,2	149,4	40.0	258,8	22,1
	186,5	39,6	338,4	22,4
402,0 624,3	222,3	39,0	405,6	22,7
	254,7	36,2	473,2	21,9
371,2 656,7	285,5	35,1	535,9	21,8

Im Mittel ergibt sich $k\varkappa = 22{,}05$, die grösste Abweichung beträgt weniger als $^1/_{30}$ des Werthes. Da in jedem Stoss 40 Extraströme vereinigt waren, so betrug der von jedem einzelnen hervorgerufene Ausschlag nicht mehr als 0,551 Scalentheil. Etwa denselben Grad der Uebereinstimmung zeigten auch die übrigen Multiplicationsreihen, für welche die einzelnen Stösse berechnet wurden.

Beschreibung der Apparate.

Ehe ich zu den einzelnen Versuchen übergehe, will ich diejenigen Anordnungen beschreiben, welche allen Versuchen gemeinsam waren.

1. Sollte bei gleicher inducirender Stromstärke und gleichen Werthen der Potentiale die Intensität des Extrastromes im Galvanometer ein Maximum sein, so musste der Widerstand des Galvanometers möglichst klein, derjenige der übrigen Zweige aber gleich sein. Diese Anordnung hatte

noch einen besondern Vortheil. Es bieten sich nämlich dem Schliessungsstrom und dem Oeffnungsstrom verschiedene Wege dar, da sich der erste auch durch die äussere Schliessung entladen kann, der zweite nicht. Um daher alle Versuche auf gleiche Verhältnisse zu reduciren, muss im allgemeinen eine Correctur angebracht werden, welche von dem Widerstand der äussern Schliessung abhängig ist. Diese Correctur fällt weg, wenn der Widerstand der vier Zweige gleich ist. In der That, ist w dieser Widerstand, w_g der Widerstand des Galvanometers und w_x der Widerstand der Kette, so folgt für die Intensität im Galvanometer, wenn in einem Zweige die electromotorische Kraft E wirkt, nach den gewöhnlichen Formeln $\frac{E}{2(w+w_g)}$, welcher Werth von w_x unabhängig ist.

Wurden also die vier Zweige gleich gemacht, so konnten die mit verschiedenen Ketten erhaltenen Resultate ohne weiteres verglichen werden.

2. Die passiven Widerstände der Brücke mussten so gewählt werden, dass der aus ihnen herrührende Theil des Extrastromes möglichst klein war. Es würden sich in dieser Hinsicht unpolarisirbare Flüssigkeitssäulen mit grossem Durchmesser am meisten empfohlen haben, da das Potential solcher Säulen sehr klein ist. Indessen gelang es mir bei der grossen Empfindlichkeit der Brücke nicht, solche von hinreichender Constanz herzustellen. Ich wandte deshalb dünne Neusilberdrähte an, die durch Glasröhren gezogen und mit destillirtem Wasser umgeben waren, um gegen Temperaturänderungen geschützt zu sein. Dieselben wurden so angeordnet, dass die verschiedenen Zweigen angehörigen und in entgegengesetzter Richtung durchflossenen nebeneinander zu liegen kamen. Die noch übrig bleibenden Werthe des Potentials waren klein und konnten mit hinreichender Genauigkeit in Rechnung gezogen werden. Da die Neusilberdrähte sehr dünn waren, lag die Gefahr nahe, dass dieselben bei der Umschaltung des Stromes geringen, aber schnell eintretenden Temperaturänderungen ausgesetzt seien. Solche Aenderungen würden im Moment des Entstehens des Stromes

die Brücke ungleich gemacht und so eine schwer zu controlirende Vergrösserung oder Verkleinerung des Extrastromes hervorgerufen haben. Bei einer letzten Versuchsreihe wandte ich daher cylindrische Stäbe von Bunsen'scher Gaskohle, von 5 mm Durchmesser an, wie solche zur Erzeugung des electrischen Lichtes gebraucht werden.

3. Die Messung der Intensität des inducirenden Stromes geschah ausserhalb der Brücke; die angewandte Tangentenbussole bestand aus einem einfachen Kupferbügel von 213,2 mm Durchmesser, in dessen Mittelpunkt eine Nadel von ca. 25 mm Länge an einem einfachen Coconfaden aufgehängt war. Um die Schwingungen derselben möglichst stark zu dämpfen, war sie in ein Gefäss mit destillirtem Wasser eingelassen. Die Ablesung geschah mit Scala und Fernrohr, die Entfernung der erstern von der Bussole betrug 1295 mm, 1 Scalentheil Ablesung entspricht der absoluten electromagnetischen Intensität 0,01218. Die Messung geschah unter allen Umständen so, dass der Ausschlag nach rechts, nach links und wieder nach rechts beobachtet wurde. Das Resultat ist bis auf $^1/_{100}$ seines Werthes sicher.

Zur Messung der Extraströme diente ein Meyerstein'sches Galvanometer von sehr geringem Widerstande, wie solche bei Messungen mit dem Erdinductor angewandt werden. Das Nadelpaar war astatisch an 12 einfachen Coconfäden aufgehängt, die Schwingungsdauer desselben betrug 27,66 Secunden. Das Galvanometer war auf einem isolirten Steinpfeiler, 2905 mm von Scala und Fernrohr und etwa ebensoweit von der Brückenvorrichtung entfernt aufgestellt und mit letzterer durch parallele dicke Kupferdrähte verbunden.

4. Der Commutator hatte bei jedem Durchgang der Nadel durch die Ruhelage schnell hintereinander die folgenden Operationen auszuführen:

Einschaltung des Galvanometers in die Brücke,
Umschaltung des Stromes,
Umschaltung des Galvanometers
.... (20 mal wiederholt), ...
Umschaltung des Stromes,
Ausschaltung des Galvanometers.

Seine Einrichtung ist aus der Taf. IV Fig. 8 ersichtlich. Am Rande einer um eine verticale Axe drehbaren Scheibe sind in radialer Stellung 20 amalgamirte Kupferhäkchen von der Form Taf. IV Fig. 9 angebracht, welche in das Quecksilber der Gefässe *B* und *C* eben eintauchen. Sie stehen der Axe abwechselnd näher und ferner, sodass die innern Spitzen der ferneren mit den äusseren Spitzen der näheren auf einem Kreise um die Axe liegen. Indem sie über das Gefäss *B* gleiten, schalten sie den Strom, indem sie über *C* gleiten, das Galvanometer um. Die Einrichtung der Quecksilbergefässe und die Art, wie die Umschaltung vor sich geht, ist aus Taf. IV Fig. 10 zu ersehen. Das Gefäss *B* steht dem Gefäss *C* nicht genau gegenüber, sondern ist um die halbe Entfernung zweier Haken gegen dasselbe verschoben, sodass die Umschaltung des Galvanometers zwischen je zwei Umschaltungen des Stromes fällt. Während nach Ertheilung des Inductionsstosses die Nadel ihre Schwingung vollendet, stehen die Haken symmetrisch zum Gefäss *C*, derart, dass ein Haken über die Lücke des mittlern Napfes, die benachbarten rechts und links neben die Näpfe zu stehen kommen; die Verbindung des Galvanometers mit der Brücke ist dann aufgehoben. Sobald die Nadel die Ruhelage erreicht, wird die Scheibe mit der Hand gedreht und nach einer ganzen Umdrehung durch eine einfache Arretirung festgehalten, dabei führt dann der Commutator die oben angegebenen Operationen aus.

Im allgemeinen mag noch bemerkt werden, dass die Drähte der Brücke, wo es irgend anging, direct miteinander verlöthet waren, nur wo Verbindungen häufig zu lösen und wiederherzustellen waren, wurden Klemmschrauben und Quecksilbernäpfe angewandt.

Versuche mit doppeldrähtigen Spiralen.

Ich komme jetzt zu den einzelnen Versuchen, zunächst zu denjenigen mit doppeldrähtigen Spiralen. Zu denselben standen mir zwei vollkommen gleiche, sehr regelmässig gewickelte Spiralen zu Gebote, deren Länge 73,9 mm, deren äusserer und innerer Durchmesser resp. 83,6 und 67,3 mm

betrugen. Sie bestanden aus 8 Schichten zu je 68 Windungen. Die Gesammtlänge des Drahtes wurde durch Vergleichung mit dem Widerstand der obersten Schicht bestimmt und zu 130 032 mm gefunden. Der Durchmesser des Drahtes betrug 0,93 mm, der Gesammtwiderstand ca. 3,1 S.-E. Da die Spiralen vollkommen gleich waren, wurden sie gleichzeitig benutzt und in die diagonal gegenüberstehenden Zweige der Brücke eingeschaltet. Die aus ihnen herrührenden Extraströme summirten sich dann in der Brücke.

Gemäss den obigen Auseinandersetzungen waren die Inductionswirkungen zweier Potentiale P und P' zu beobachten, während der Widerstand der Leitung unverändert blieb. Das Potential P war das der in entgegengesetzter Richtung durchströmten Spiralen. Um ein zweites Potential P' zu erhalten, schaltete ich einen Zweig einer Spirale aus der Leitung aus und ersetzte ihn durch einen ihm gleichen Ballastwiderstand, dessen Grösse sich in der Brücke sehr genau reguliren liess.

Indem nun durch den freigewordenen Zweig ein Strom geleitet und in passender Weise umgeschaltet wurde, konnte der von dem einen Zweig im andern inducirte Strom gemessen werden. Die Grösse P' war dann das Potential des einen Zweiges auf den andern. Natürlich hätte auch der Extrastrom aus den in gleicher Richtung durchströmten Spiralen benutzt werden können, dieser aber war gegen denjenigen aus entgegengesetzt durchströmten Spiralen zu gross, um unter gleichen Bedingungen noch gut beobachtbar zu sein.

Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der numerischen Werthe von P und P'. P lässt sich aus den geometrischen Verhältnissen der Spiralen mit hinreichender Annäherung bestimmen und soll die Rechnung sogleich durchgeführt werden; P' hingegen lässt sich auf diesem Wege nur unter vereinfachenden Annahmen finden, welche einen beträchtlichen Fehler mit sich bringen. Ich zog es daher vor, dasselbe durch den Versuch zu bestimmen, indem ich es mit dem bekannten Potential geradliniger Drähte verglich.

Bestimmung von P. Ueber die Lagerung der Drähte werden zunächst die folgenden Voraussetzungen gemacht, welche der Wahrheit sehr nahe kommen dürften:

1) In einer und derselben Schicht wechseln positiv und negativ durchströmte Drähte beständig ab, die Abstände der Mittellinien sind gleich und gleich dem mittlern Abstand, welchen man erhält, wenn man die Länge der Spirale durch die Zahl der Windungen dividirt. 2) Zwei benachbarte Schichten liegen seitlich um den halben Abstand zweier Mittelpunkte gegeneinander verschoben. Durch diese Annahmen ist die geometrische Lage der Drähte vollständig gegeben; ob aber die äussersten Drähte an den Enden der Spirale alle in gleichem Sinne durchströmt sind, oder ob Wechsel in dieser Hinsicht stattfinden, lässt sich für die innern Schichten nicht constatiren. Aus diesem Grunde und wegen der unvermeidlichen Unregelmässigkeiten ist eine exacte Bestimmung des Potentials auch nicht möglich; es lassen sich nur Grenzen angeben, innerhalb deren es liegen muss, und es wird sich zeigen, dass diese Grenzen ziemlich eng gezogen werden können. Bei der Berechnung des Potentials einer Schicht auf sich selbst werden wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, dieselbe aufschneiden, in eine Ebene ausbreiten und als Theil eines unendlich langen geradlinigen Drahtsystems betrachten können, dessen Querschnitt mit dem der Schicht zusammenfällt. Denn die Lagerung jedes Elementes zu den benachbarten Theilen wird dadurch nicht geändert, die Wirkung entfernter Theile aufeinander aber ist Null.

Zunächst bestimmen wir das Potential Π einer einzelnen Schicht auf sich selber. Sei die Länge der Drähte $= S$, ihr Radius $= R$, der Abstand zweier benachbarten $= q$, endlich ihre Zahl $= n$. Sei ferner $\frac{1}{2}a_0$ das Potential eines Drahtes auf sich selber, a_m das Potential eines Drahtes auf den in der Entfernung mq befindlichen, dann ist:

$$a_0 = 2S\left(\log\frac{2S}{R} - \tfrac{3}{4}\right), \qquad a_m = 2S\left(\log\frac{2S}{mq} - 1\right)$$

und man findet durch Abzählung:

$$\Pi = na_0 - (2n-1)a_1 + (2n-2)a_2 - \ldots\ldots - a_{2n-1},$$

und durch Einsetzung der Werthe für die a:

$$\Pi = 2Sn\left\{\tfrac{1}{4} + \log\frac{q}{R} + \frac{1}{n}\log\frac{1^{2n-1}\cdot 3^{2n-3}\ldots\ldots(2n-3)^3(2n-1)}{2^{2n-2}\cdot 4^{2n-4}\ldots\ldots(2n-2)^2}\right\}.$$

Der Quotient $\frac{\Pi}{S}$ hat also hier einen bestimmten Werth, welcher als das Potential der Längeneinheit bezeichnet werden kann. Die directe Berechnung des in obigem Ausdruck enthaltenen Logarithmus ist bei grossen n nicht mehr wohl möglich, für solche ist daher ein Näherungswerth zu finden. Zu dem Ende zerlegen wir den Ausdruck in:

$$n\log\frac{1^2 3^2 5^2\ldots\ldots(2n-3)^2(2n-1)}{2^2 4^2\ldots\ldots(2n-2)^2}$$

$$+\log\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^4}{3^2 5^2}\cdot\frac{6^6}{5^3 7^3}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-2)^{2n-2}}{(2n-3)^{n-1}(2n-1)^{n-1}},$$

welche Theile gesondert berechnet werden sollen. Der erste kann geschrieben werden:

$$= n\sum_1^{n-1 m}\log\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2} = n\sum_1^{n-1}\log\left(1-\frac{1}{4m^2}\right).$$

Da $\frac{1}{4m^2}$ für alle in Betracht kommenden Werthe < 1 ist, können wir $\log\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)$ entwickeln und erhalten für den ersten Theil:

$$-n\left\{\tfrac{1}{4}\sum_1^{n-1}\frac{1}{m^2} + \tfrac{1}{32}\sum_1^{n-1}\frac{1}{m^4} + \ldots.\right\}$$

oder, wenn wir die Summen nach bekannten Formeln entwickeln:

$$= -n\left\{\text{const.} - \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{8(n-1)^2} - \frac{1}{24(n-1)^3} + \cdots - \frac{1}{96(n-1)^5} + \cdots\right\}.$$

Die Constante ist offenbar $= -\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$, denn für unendlich werdende n muss der ganze Ausdruck gegen die Grenze $n\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$ convergiren. Entwickeln wir die übrigen Glieder nach fallenden Potenzen von n und fassen die gleichen Potenzen zusammen, so erhalten wir schliesslich den ersten Theil gleich:

$$\log\left(\frac{2}{\pi}\right)^n + \tfrac{1}{4} + \frac{1}{8n} + \frac{1}{96n^2} + \cdots$$

Eine ganz analoge Rechnung lässt sich für den zweiten Theil durchführen, derselbe ist:

$$= \sum_1^{n-1} \log \frac{2m^{2m}}{(2m-1)^m (2m+1)^m} = \sum_1^{n-1} \log\left(1 - \frac{1}{4m^2}\right)^m$$

$$= \tfrac{1}{4} \sum_1^{n-1} \frac{1}{m} + \tfrac{1}{32} \sum_1^{n-1} \frac{1}{m^3} + \tfrac{1}{192} \sum_1^{n-1} \frac{1}{m^5} + \cdots$$

also nach der gleichen Rechnung wie oben:

$$= \tfrac{1}{4}\left(0{,}577\,216 + \log(n-1) + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{12(n-1)^2} + \cdots\right)$$

$$+ \tfrac{1}{32}\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{m^3} + \cdots \qquad - \frac{1}{2(n-1)^2} + \cdots\right)$$

$$+ \tfrac{1}{192}\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{m^5} + \cdots\right)$$

$$+ \tfrac{1}{1024}\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{m^7} + \cdots\right)$$

$$+ \cdots$$

Wird hierin das constante Glied direct berechnet, die übrigen Glieder aber nach fallenden Potenzen von n entwickelt, so wird der zweite Theil erhalten:

$$= 0{,}18848 + \tfrac{1}{4}\log n - \frac{1}{8n} - \frac{7}{192n^2} - \cdots$$

Die Summe beider Theile ergibt das ganze gesuchte Glied:

$$= 0{,}43848 + \log \sqrt[4]{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - \frac{3}{192n^2} - \cdots$$

$$= \log\left\{1{,}5503 \sqrt[4]{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right\} - \frac{3}{192n^2} - \cdots$$

$$= n \log\left\{\sqrt[4n]{5{,}7773\,n} \cdot \frac{2}{\pi}\right\} - \frac{3}{192n^2} \cdots;$$

und sonach wird mit beträchtlicher Annäherung das Potential der Schicht auf sich selber:

$$\Pi = 2Sn\left\{\tfrac{1}{4} + \log \frac{2q\sqrt{5{,}7773\,n}}{R\pi}\right\}.$$

Für grosse n convergirt die in dem Ausdrucke enthaltene Wurzel rasch gegen die Einheit, für solche Werthe von n kann daher auch einfacher geschrieben werden.

$$\Pi = 2\,Sn\left\{\tfrac{1}{4} + \log\frac{2q}{R\pi}\right\}.$$

Zu dieser Annäherung gelangen wir direct, wenn wir das Potential der ganzen Vorrichtung auf einen mittleren Draht berechnen und den erhaltenen Werth als für alle Drähte gültig annehmen. Dieser vereinfachten Methode können wir uns bedienen bei der Berechnung des Potentials zweier verschiedener Schichten aufeinander.

Es sei ε der senkrechte Abstand zweier Schichten voneinander, und es mögen in denselben die einzelnen Drahtpaare solche Lagen haben, dass sich die gleichsinnig durchströmten Drähte gegenüberliegen, sodass ihre Axen in einer zu beiden Schichten senkrechten Ebene sich befinden. Dann ist das Potential der einen Schicht auf einen mittlern Draht der andern Schicht:

$$= 2S\begin{Bmatrix} \log 2S & -\log\varepsilon & -1 \\ -2\log 2S & +2\log\sqrt{\varepsilon^2+q^2} & +2 \\ +2\log 2S & -2\log\sqrt{\varepsilon^2+4q^2} & -2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\log 2S & +\log\sqrt{\varepsilon^2+(2n+1)^2q^2} & +1 \end{Bmatrix}$$

$$= -2S\log\frac{\varepsilon\,(\varepsilon^2+2^2q^2)\,(\varepsilon^2+4^2q^2)\,\ldots\,(\varepsilon^2+(2n)^2q^2}{(\varepsilon^2+q^2)\,(\varepsilon^2+3^2q^2)\,\ldots\,\sqrt{\varepsilon^2+(2n+1)^2q^2}},$$

$$= 2S\log\frac{1^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}{\frac{\varepsilon}{q}}\cdot\frac{3^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}{2^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}}{\varepsilon^2+(2n)^2q^2}.$$

Für das hinter dem Logarithmenzeichen stehende Product erhalten wir einen Näherungswerth in geschlossener Form, wenn wir die Gleichung:

$$\cos^2\frac{z}{2} = \left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)^2\cdots$$

durch die andere:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots$$

dividiren, beiderseits $z = v\sqrt{-1}$ setzen und durch $\sqrt{-1}$ dividiren; wir erhalten hierdurch die Gleichung:

$$\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} = \lim \left\{ \frac{1^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}{\frac{v}{\pi}} \cdot \frac{3^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}{2^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2} \cdots \frac{\sqrt{(2n-1)^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}}{(2n)^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2} \right\},$$

und sonach wird das obige Potential für ein grosses n näherungsweise:

$$= S \log \frac{1+e^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}},$$

oder bei Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung $e^{-\frac{3\pi\varepsilon}{q}}$

$$= 4Se^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}.$$

Indem wir diesen Ausdruck mit $2n$ multipliciren, erhalten wir das Potential der einen Schicht auf die andere:

$$= +\,8Sne^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}.$$

Wird nun die eine derselben gegen die bisher angenommene Lage seitlich um die Strecke q verschoben, so wird offenbar das Potential:

$$= -\,8Sne^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}};$$

für alle mittleren Lagen hat das Potential eine zwischen beiden extremen Werthen liegende Grösse. Wenn wir also den Einfluss der verschiedenen Schichten aufeinander überhaupt vernachlässigen, so beträgt der Fehler für jedes in Betracht kommende Paar von Schichten weniger als $8Sne^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}$. Dabei sind jedoch je zwei unmittelbar benachbarte Schichten nicht in Rechnung zu bringen, da das Potential derselben aufeinander in der That mit grosser Annäherung gleich Null ist. Durch Einsetzung solcher Werthe von q, ε, R, welche den gewöhnlichen Verhältnissen entsprechen, überzeugt man sich leicht, dass der besprochene Fehler weniger als den 70ten Theil des Potentials der Schicht ausmacht. In so weit wir aber von demselben absehen, erhalten wir das Potential der ganzen Spirale, indem wir das der einzelnen Schichten

auf sich selbst einfach addiren, und es wird dasselbe daher schliesslich, wenn wir mit l die gesammte in der Spirale enthaltene Drahtlänge bezeichnen:

$$P = l\left\{\tfrac{1}{4} + \log \frac{2q\sqrt[4n]{5{,}7773\,n}}{R\pi}\right\}.$$

Für die in unserem Falle vorliegenden Spiralen war:

$$l = 130\,032\text{ mm}, \quad n = 34, \quad R = 0{,}465\text{ mm},$$
$$q = 1{,}087\text{ mm}, \quad P = 89250\text{ mm}.$$

Eine Bestimmung des hierbei möglicherweise begangenen Fehlers nach den obigen Principien ergab denselben kleiner als 1200 mm.

Bestimmung von P'. Das Potential P' des einen Zweiges der Spirale auf den andern wurde, wie schon bemerkt, durch Vergleichung mit dem Potential geradliniger Drähte bestimmt. Die Anordnung des Versuchs zeigt die Fig. 11 Taf. IV. A und B sind geradlinige, auf dem Boden des Laboratoriums ausgespannte Drahtsysteme von den eingeschriebenen Dimensionen, in A (dem inducirten Kreise) ist das Galvanometer und ein Zweig der Spirale C eingeschaltet, in B die Kette, die Tangentenbussole und der Commutator.

Es wurde zunächst die inducirende Wirkung des Kreises B auf A bestimmt. Da diese sehr klein war, so wurde die schon oben beschriebene Beobachtungs- und Rechnungsart in Anwendung gebracht, bei welcher der Kreis A im allgemeinen geöffnet war. Da die Wirkung des geradlinigen Systems B auf die Spirale C nicht Null war, so wurde letztere auf beide möglichen Arten in den Kreis A eingeschaltet. Die Werthe des Inductionsstosses wurden bei verschiedenen Intensitäten des inducirenden Stromes beobachtet; nachdem sie auf gleiche Intensität (100 Scalentheile der Tangentenbussole) reducirt waren, wurden sie gefunden

1) bei der ersten Schaltung der Spirale:

in Scalentheilen des Galvanometers

0,3997 0,3955 0,3791 0,4006 Mittel 0,3939;

2) bei der zweiten Schaltung:

0,3034 0,3102 Mittel 0,3068.

Das Mittel aus beiden Werthen, nämlich 0,3502, entspricht der Induction des Kreises B auf A. Das zugehörige logarithmische Decrement war das der freischwingenden Nadel, nämlich:

$$\lambda = 0{,}0172.$$

Um mit den bei einer andern Dämpfung gemachten Versuchen vergleichbar zu sein, muss der Stoss multiplicirt werden mit:

$$\frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\lambda}};$$

er wird erhalten nach Ausführung der Rechnung:

$$= \frac{1{,}1097}{T}.$$

Hierauf wurde der noch freie Zweig der Spirale C in den Strom B so eingeschaltet, dass sich die Wirkungen der Spirale und der geraden Drähte verstärkten und durch einfache Umschaltung des Stromes B bei jedem Durchgange der Nadel durch die Ruhelage die Wirkung des einen Zweiges auf den andern beobachtet. Nach Reduction auf die Intensität 100 wurden die Werthe der Inductionsstösse zu:

164,3 164,7 im Mittel zu 164,5 Scalentheilen

gefunden. Das zugehörige Decrement war diesmal $\lambda = 0{,}6362$, die entsprechende Reduction auf eine ungedämpft schwingende Nadel gibt die Grösse des Stosses:

$$= \frac{696{,}0}{T}.$$

Von der Verschiedenheit der Schwingungsdauer je nach der statthabenden Dämpfung kann hier und im Folgenden abgesehen werden. Demnach verhält sich das Potential der Zweige der Spirale aufeinander zu dem der geradlinigen Drähte aufeinander wie:

$$696{,}0 - 1{,}1 : 1{,}1097 = 694{,}9 : 1{,}1097.$$

Das letztere Potential konnte leicht aus den geometrischen Verhältnissen der Drähte berechnet werden und wurde gefunden $= 60428$ mm, woraus dann das Potential des einen Zweiges der Spirale auf den andern folgt:

$$= 37\,840\,000 \text{ mm}.$$

Die gleiche Grösse hatte ich schon einmal auf einem etwas anderen, aber ungenaueren Wege bestimmt und gleich

38 680 000 mm gefunden.

Beide Werthe stimmen hinreichend überein, es soll jedoch nur der erstere benutzt werden.

Ausführung der Messungen. Die Anordnung der Brücke, welche zur Messung der Extraströme diente, ist in Taf. IV Fig. 12 genauer wiedergegeben. Die Einmündungsstellen des Stromes sind A und A', die des Galvanometerdrahtes B und B'. Durch Verschiebung der Verbindung A' der Kette mit dem dicken Kupferdrahte EF wurde die Brücke regulirt. In die diagonal gegenüberliegenden Zweige $A'B$ und AB' sind die Spiralen und in die anderen beiden Zweige die als passive Widerstände dienenden Neusilberdrähte eingeschaltet, letztere sind dicht nebeneinander so gelegt, dass der Strom in ihnen entgegengesetzte Richtung hat. Die von der Kette kommenden und die zum Galvanometer führenden Drähte passiren den Commutator G, welcher so gestellt ist, dass er während der Beobachtung durch das Fernrohr H in Thätigkeit gesetzt werden kann. Bei einer Umdrehung desselben gehen 20 doppelte Extraströme aus je zwei Spiralen, im ganzen also 80 einfache Extraströme durch das Galvanometer. Die Tangentenbussole befindet sich in J, zu ihr gehört das Fernrohr K.

Zunächst wurde die Grösse des Extrastoms aus entgegengesetzt durchströmten Zweigen bestimmt und für dieselbe die folgenden Werthe erhalten:

Inducirende Intensität in Scalentheilen	Intensität des Extrastroms in Scalentheilen
48,8	0,1790
50,0	0,1738
123,2	0,4621
122,2	0,4417

Durch Reduction auf die Intensität 100 werden die Werthe erhalten:

0,3664 0,3476 0,3750 0,3600 im Mittel 0,3622.

Das logarithmische Decrement der Nadel während dieser Versuche war $\lambda = 0{,}0172$, wird der obige Stoss dem entsprechend mit $\frac{3{,}168}{T}$ multiplicirt, so wird er erhalten:

$$= \frac{1{,}1476}{T}.$$

Gemäss den früheren Auseinandersetzungen wurde sodann ein Zweig der einen Spirale ausgeschaltet, die Brücke wieder ausgeglichen und die Inductionswirkung des frei gewordenen Zweiges auf den anderen beobachtet. Verschwand in dem erstern ein Strom von der Intensität 100, so betrug der im Galvanometer beobachtete Stoss:

61,50 61,66 im Mittel 61,58 Scalentheile.

Das bei diesem Versuche vorhandene logarithmische Decrement war $\lambda = 0{,}4396$, der entsprechende Reductionsfactor $\frac{3{,}876}{T}$, und es wird sonach der reducirte Stoss:

$$\frac{238{,}67}{T}.$$

Bei den in der Brücke vorhandenen Widerständen und Stromverzweigungen entsprach also dieser Stoss dem Potential:

$$P' = 37\,840\,000.$$

Waren die Zweige der Spiralen in entgegengesetzter Richtung durchströmt, so war die entsprechende electromotorische Kraft des Extrastroms für jede Spirale:

$$2P = 178\,500.$$

Hierzu tritt jedoch als Correctur das Potential der übrigen Theile der Brücke, welches sich in folgender Weise berechnet:

1) Das Potential jedes Neusilberdrahtes auf sich selbst (Durchmesser 0,246 mm) war 6395, der vierfache Werth ist negativ in Rechnung zu ziehen, also der Beitrag -25580.

2) Diese Wirkung wird zum Theil aufgehoben durch die Wirkung des benachbarten Neusilberdrahtes, das Potential beider aufeinander ist 5348, dieser Werth ist doppelt in Rechnung zu bringen, also wird erhalten $+10696$.

3) Das doppelte Potential des Drahtes OP auf sich selbst ist $+9028$.

4) Das Potential des Drahtes OP auf den näheren Neusilberdraht ist + 2789.

5) Dasselbe auf den entfernteren — 1230.

6) Das Potential des Drahtes RS auf EA', doppelt in Rechnung gezogen wegen der doppelten Intensität in RS, gibt den Beitrag + 5254.

Die Summe aller dieser Correcturen beträgt nur +957, wovon also auf jede einzelne Spirale die Hälfte kommt, nämlich + 478 mm.

Es kommt also schliesslich zur Geltung die electromotorische Kraft 178 978, welche fast genau so gross ist wie die allein aus den Spiralen herrührende. Der Fehler dieses Werthes, welcher aus Vernachlässigung einzelner Theile des Potentials der Spiralen herrührt, beträgt nach dem Vorigen bis zu 2400 mm, von derselben Ordnung wird vermuthlich der Fehler sein, welcher aus Vernachlässigung einzelner Theile der Brücke entspringt.

Nach der Theorie müsste nun der Werth des Extrastroms aus entgegengesetzt durchströmten Spiralen die Grösse haben: $\frac{238{,}67}{T} \cdot \frac{178\,978}{378\,400\,00} = \frac{1{,}1351}{T}$.

Der thatsächlich beobachtete Werth war $\frac{1{,}1476}{T}$. Die Abweichung beider beträgt wenig mehr als $^1/_{100}$ des ganzen Werthes, während die Fehler der Beobachtung und die Unbestimmtheit der Rechnung im besten Falle $^1/_{30}$ desselben ausmachen. Ist daher auch die grosse Uebereinstimmung des berechneten und des beobachteten Werthes eine zufällige, so zeigt der Versuch doch, dass höchstens $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ des an sich sehr kleinen Extrastroms aus doppeldrähtigen Spiralen seine Entstehung einer trägen Masse der bewegten Electricität verdanken kann, und dass die oben angegebene Formel das Potential einer solchen Spirale in der That mit grosser Annäherung gibt.

Weiterer Versuche mit Spiralen glaubte ich mich überheben zu dürfen; wenn auch die Beobachtung zu grösserer Genauigkeit geführt werden könnte, so war doch eine exacte Bestimmung der in Betracht kommenden Potentialwerthe durch die Rechnung nicht möglich.

Erste Versuchsreihe mit geradlinigen Dräthen.

Um in dieser Hinsicht günstigere Bedingungen des Versuchs zu erlangen, versuchte ich die Grösse des aus entgegengesetzt durchströmten geradlinigen Doppeldrähten herrührenden Extrastroms zu bestimmen und mit der Theorie zu vergleichen.

Zu diesen Versuchen war die Brücke in folgender Weise geordnet. Drei der vier Widerstände, welche sämmtlich wie früher gleich waren, wurden durch dünne Neusilberdrähte gebildet; zwei von diesen waren vollkommen gleich gestaltet, sodass die aus ihnen entspringenden Extraströme sich aufhoben; der dritte bestand aus einem in sich zusammengefalteten Draht, dessen Potential klein und genau zu berechnen war, es wurde gefunden $p = 6597$ mm. Diesem letztern entgegen wirkte der vierte Widerstand der Brücke, das zu untersuchende Drahtsystem. Dasselbe war auf dem Boden des Laboratoriums ausgespannt und mit dem Experimentirtisch durch verticale Drähte verbunden; es hatte die Gestalt eines Rechtecks von 7229 mm Länge, 946 mm Breite, dessen Seiten durch je zwei in geringem Abstande verlaufenden Drähten bestand, deren jeder einen Zweig des Systems bildete. Durch einen Commutator konnte bewirkt werden, dass beide Zweige in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung durchströmt wurden. Der benutzte Draht war harter Kupferdraht, sein Durchmesser wurde an mehreren Stellen mit Mikroskop und Mikrometerschraube bestimmt und mit kleinen Abweichungen im Mittel = 0,4104 mm gefunden. Um den Abstand der beiden Zweige genau festzuhalten, wurden die Drähte über Holzstützen mit genau passenden Einschnitten geleitet. Diese Stützen wurden mit Hülfe zweier zunächst angefertigter Messingschablonen hergestellt. An letzteren wurde die Entfernung der Drähte mit Mikroskop und Mikrometerschraube gemessen und so im Mittel gefunden gleich 2,628 mm von Mitte zu Mitte. Um die Drähte gegen schnelle Temperaturänderungen durch Luftströme zu schützen, waren dieselben in ihrer ganzen Länge mit einer Hülle von Baumwolle umgeben.

Das Potential der ganzen Vorrichtung, welche nur aus

theils parallelen, theils zueinander senkrechten Drähten bestand, war nach den schon früher angegebenen Formeln leicht und exact zu bestimmen; es fand sich:

1) bei gleichgerichteter Durchströmung der Zweige:

$$P' = 486\,200 \text{ mm};$$

2) bei entgegengesetzt gerichteter Durchströmung der Zweige:

$$P = 96580 \text{ mm}.$$

Es ergibt sich sonach das Intensitätsverhältniss der in beiden Fällen zu erwartenden Extraströme:

$$= \frac{P' - p}{P - p} = 5{,}330.$$

In dieser Berechnung ist nur vernachlässigt die Wirkung der Commutatoren, der verschiebbaren Vorrichtung zur Regulirung der Brücke, und die des äussern Stromkreises auf die Theile der Brücke. Der Einfluss dieser Wirkungen ist sehr klein, und der aus ihnen entspringende Fehler verschwindet jedenfalls gegen denjenigen, welcher aus der Beobachtung herrührt.

Die nach der schon früher auseinandergesetzten Methode angestellte und berechnete Beobachtung ergab die folgenden Resultate.

1) bei gleichgerichteten Zweigen:

Intensität des induc. Stromes in Scalentheilen der Tangentenbussole	Grösse des einfachen Extrastroms in Scalentheilen des Galvanometers	Intensität des induc. Stromes in Scalentheilen der Tangentenbussole	Grösse des einfachen Extrastroms in Scalentheilen des Galvanometers
152,7	1,121	78,9	0,561
75,7	0,551	78,4	0,548
93,6	0,673	74,2	0,549
116,4	0,831	145,2	1,065
67,6	0,478	—	—

Durch Reduction auf die Intensität 100 Scalentheile werden die Werthe erhalten:

7,43 7,28 7,20 7,14 7,07 7,11 7,01 7,37 7,33 im Mittel 7,213

mit einem mittleren Fehler von 0,137 oder $^1/_{50}$ des ganzen Werthes.

2) bei entgegengesetzt durchströmten Zweigen:

Intensität des inducirenden Stroms	Intensität des Extrastroms	Intensität des inducirenden Stroms	Intensität des Extrastroms
152,7	0,2088	150,5	0,2025
152,7	0,2051	116,1	0,1443
140,1	0,1872	288,9	0,3992
139,0	0,1817	—	—

Durch Reduction auf die Intensität 100 werden die Werthe erhalten:

0,1367 0,1344 0,1337 0,1307 0,1345 0,1243 0,1382.

Die sechste Beohachtung, deren grosse Abweichung von den übrigen offenbar von einem besonderen Fehler herrührt, soll verworfen werden, die übrigen geben im Mittel 0,1348 mit einem mittlern Fehler von 0,0028 oder ca. $^1/_{60}$ des ganzen Werthes. Das beobachtete Verhältniss der beiden Extraströme:

$$= \frac{7{,}213}{0{,}1348} = 5{,}352$$

weicht von dem berechneten = 5,330 nur um $^1/_{250}$ ab, die Abweichung liegt also durchaus innerhalb der unvermeidlichen Fehler der Beobachtung.

Es muss bemerkt werden, dass in die oben gegebenen Resultate alle Beobachtungen ohne Unterschied aufgenommen worden sind.

Zweite Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten.

Noch eine zweite Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten wurde angestellt, welche sich von der vorigen nur dadurch unterschied, dass an Stelle des Neusilberwiderstandes $A'B$ ein Widerstand von Bunsen'scher Gaskohle angewandt wurde, und dass auch für das stromgebende Drahtsystem ein stärkerer Kupferdraht gewählt wurde. Es soll diese Abänderung die bei den vorigen Versuchen vorliegende Gefahr beseitigen, dass während der Umschaltung selbst eintretende kleine Temperaturschwankungen eine Abänderung der scheinbaren Grösse des Extrastroms hervorrufen, also etwa eine Abweichung desselben vom Potentialgesetz verdecken könnten. Um derartige und ähnliche Störungen bemerkbarer zu machen, wurden die Extraströme bei einer möglichst grossen Zahl verschiedener Intensitäten des inducirenden Stromes

beobachtet. Die Abweichung der Integralstärke der Extraströme von der Proportionalität mit diesen Intensitäten musste ihre Ursache nothwendig in solchen Störungen haben.

Der Durchmesser des angewandten Drahtes war 0,6482 mm, der Abstand der beiden Zweige 3,441 mm. Das Potential wurde genau wie oben berechnet, und es wurde gefunden:

$$2P' = 920\,956 \text{ mm}, \qquad 2P = 185\,252 \text{ mm}.$$

Das Potential des entgegenwirkenden Kohlenwiderstandes war:

$$2p = 2997 \text{ mm},$$

also das berechnete Verhältniss der Extraströme:

$$\frac{P'-p}{P-p} = 5{,}0367.$$

Die Versuche gaben die folgenden Resultate:

Nr.	Intensität des induc. Stroms	Intensität der Extraströme		Auf Intens. 100 reducirt	
		bei entgeg. Zweigen	bei gleichg. Zweigen	bei entgeg. Zweigen	bei gleichg. Zweigen
1.	11,3	0,0275	0,1225	0,2434	1,084
2.	17,2	0,0492	0,1940	0,2860	1,127
3.	18,8	0,0478	0,2082	0,2542	1,107
4.	20,9	0,0582	0,2430	0,2784	1,162
5.	24,1	0,0628	0,2775	0,2606	1,152
6.	27,7	0,0700	0,3235	0,2527	1,167
7.	33,3	0,0857	0,3792	0,2537	1,138
8.	37,2	0,0957	0,4015	0,2572	1,080
9.	47,7	0,1057	0,5243	0,2216	1,099
10.	57,8	0,1330	—	0,2301	—
11.	66,2	0,1478	0,7357	0,2234	1,112
12.	72,7	0,1555	—	0,2139	—
13.	88,7	0,2135	—	0,2135	—
14.	108,6	0,2432	—	0,2240	—
15.	108,7	0,2945	1,1425	0,2158	1,051
16.	141,3	0,3005	1,1825	0,2128	1,049
17.	172,6	0,3872	—	0,2276	—
18.	192,1	0,4105	—	0,2138	—

Als Mittelwerth des Extrastroms bei gleichgerichteten Zweigen und Intensität 100 wird erhalten 1,111 mit dem mittlern Fehler 0,038. Hieraus und aus dem berechneten Verhältniss würde für die Grösse des Extrastroms bei entgegengesetzt durchströmten Zweigen folgen 0,2203. Vergleicht man diesen Werth mit den beobachteten, so sieht man, dass die bei ganz schwachen Strömen beobachteten

Werthe bedeutend grösser sind; und auch der Mittelwerth sämmtlicher Beobachtungen, nämlich 0,2379, weicht von der Rechnung ab. Indessen erkennt man auch, dass aus dieser Abweichung ein Schluss in Bezug auf eine Masse in keiner Weise berechtigt wäre, da sie nur bei denjenigen Beobachtungen stattfindet, welche wegen der Kleinheit der Wirkungen schon sehr unsicher waren, auch unter sich schlecht übereinstimmen. Benutzt man nur die bessere Hälfte der Versuche von Nr. 8 an, so erhält man für den Extrastrom aus entgegengesetzten Zweigen den Mittelwerth 0,2197 mit dem mittlern Fehler 0,0060, und für das Verhältniss der beiden Extraströme 5,054, einen Werth, welcher von dem berechneten 5,037 um eine Grösse abweicht, die vollständig innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegt. Die Abweichung der kleineren beobachteten Werthe lässt sich leicht und auf verschiedene Weise auf thermische, magnetische oder diamagnetische Ursachen zurückführen, deren Wirkung nicht der Intensität proportional wächst, sondern schnell ein Maximum erreicht.

Recapitulation der Resultate und Folgerungen.

Um aus den Versuchen eine obere Grenze für die Grösse μ, deren Bedeutung in der Einleitung festgestellt wurde, abzuleiten, mögen die Resultate kurz recapitulirt werden.

Wir gehen aus von den Formeln:

$$m = P\left\{\frac{J}{J'}\frac{P'}{P} - 1\right\}, \qquad \mu = \frac{qm}{l}.$$

Die hierin vorkommenden Grössen hatten bei den verschiedenen Versuchen die folgenden Werthe.

1) Bei den Versuchen mit den Spiralen war:

$l = 130\,032$	$P' = 37\,840\,000$
$q = 0{,}6793$	$J = 1{,}1467$
$P = 89250$	$J' = 238{,}67$

Der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Angaben lässt sich nicht genau feststellen, da die zugehörigen Messungen und die dabei vorhandenen Fehlerquellen sehr mannichfaltig waren, jedoch ist sicher bei keiner Messung ein Fehler begangen,

der grösser als $^1/_{20}$ des Werthes war, und auch die Fehler der Rechnung, durch welche P bestimmt wurde, können nach dem Obigen diese Grösse nicht erreichen. Nehmen wir daher an, dass die Grösse $\frac{JP'}{J'P}$, welche sich aus den Beobachtungen zusammensetzt, um $^1/_{20}$ ihres Werthes falsch sei, in dem Sinne, dass eine vorhandene Wirkung der Masse dadurch verdeckt wird, so werden wir eine Grenze erhalten, deren Ueberschreitung sehr unwahrscheinlich ist, nämlich:

$$m < 89250 \left\{ \frac{J}{J'} \frac{P'}{2P} \cdot \frac{21}{20} - 1 \right\}^{1}),$$

$$m < 6668, \qquad \mu < 0{,}0348\ \text{mm}^2.$$

2) Eine engere Grenze erhalten wir aus den ersten Versuchen mit geradlinigen Drähten. Hier war:

$$l = 35892, \qquad P = 89980 \qquad J' = 0{,}7213,$$
$$q = 0{,}1323, \qquad \frac{P'}{P} = 5{,}330 \qquad J = 0{,}1348.$$

Die berechneten Potentiale können als exact richtig angenommen werden, da ihr Fehler wohl kaum $^1/_{100}$ erreicht. Für die Grössen J und J' können die wahrscheinlichsten Fehler aus den Versuchen abgeleitet werden, sie werden erhalten:

$$\text{für } J' = 0{,}0092, \qquad \text{für } J = 0{,}0019.$$

Nehmen wir hier an, dass beide Intensitäten um die volle Grösse des wahrscheinlichsten Fehlers falsch gemessen seien, und zwar beide in ungünstigem Sinne, also J zu klein, J' zu gross, so erhalten wir:

$$m < 89980 \left\{ 5{,}330 \cdot \frac{0{,}1367}{0{,}7121} - 1 \right\},$$

$$m < 2085, \qquad \mu < 0{,}0077\ \text{mm}^2.$$

3) Bei der zweiten Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten war:

$$l = 35892, \qquad P = 92620, \qquad J' = 1{,}111$$
$$q = 0{,}3300, \qquad \frac{P'}{P} = 5{,}0367, \qquad J = 0{,}2196.$$

---

1) Der Bruch $\frac{P'}{P}$ ist hier durch $\frac{P'}{2P}$ zu ersetzen, da P' das Potential eines Leiters auf einen andern, P ein Eigenpotential bezeichnet.

Bei der Bestimmung von J sind nur die Beobachtungen von Nr. 8 an benutzt. Die sich aus den Versuchen ergebenden wahrscheinlichsten Fehler sind:

$$\text{für } J' = 0{,}026, \qquad \text{für } J = 0{,}0040.$$

Die gleiche Annahme wie oben ergibt hier:

$$m < 92620 \left\{ 5{,}0367 \cdot \frac{0{,}2236}{1{,}085} - 1 \right\},$$

$$m < 3521, \qquad \mu < 0{,}0323 \text{ mm}^2.$$

Die Grenze wird hier nicht so eng erhalten wie bei den vorigen Versuchen, hauptsächlich aus dem Grunde, weil dort q, der Querschnitt des Drahtes kleiner, also die Bedingung für das Bemerkbarwerden der Masse günstiger war.

Unter Benutzung der ersten Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten, als der besten, erhalten wir also das Resultat:

Die kinetische Energie der electrischen Strömung in einem Cubikmillimeter eines kupfernen Leiters, welcher von einem Strome von der electromagnetischen Dichtigkeit 1 durchflossen wird, beträgt weniger als:

0,008 Milligrammmillimeter.

Da die kinetische Energie gleich der halben Masse multiplicirt mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, so ist die Masse der positiven Electricität in 1 cmm:

$$< \frac{0{,}008 \text{ mg}}{v^2},$$

ist beispielsweise $v = 1$ mm, 10 mm etc., so ist die Masse der positiven Electricität $< 0{,}008$ mg, $< 0{,}00008$ mg etc.

Es muss jedoch die Bemerkung gemacht werden, dass möglicherweise die kinetische Energie der Strömung die hier gesteckten Grenzen überschreitet, ohne dass deshalb die Beobachtungen einen Fehler in sich schlössen. Verhält sich nämlich die Leitungsfähigkeit der Metalle wie die Dichtigkeit der in ihnen enthaltenen Electricität, so müssen die in zwei Drähten von gleichem Widerstand von der Trägheit herrührenden electromotorischen Kräfte gleich sein, welches auch immer Material, Länge und Querschnitt der Drähte ist. Es mussten in diesem Falle auch die aus den vier

Zweigen der Brücke herrührenden Extraströmen, so weit sie ihre Entstehung einer Masse verdankten, gleich sein und sich daher aufheben. Nur unter der Annahme, dass obige Proportionalität nicht stattfindet, sondern dass die Dichtigkeit der Electricität in den verschiedenen Leitern wenigstens annähernd die gleiche sei, war es erlaubt, von der Wirkung der in den kurzen Neusilber- und Kohlenzweigen bewegten Masse abzusehen, wie wir es gethan haben.

Umgekehrt, gelänge es, auf anderem Wege nachzuweisen, dass die lebendige Kraft der electrischen Strömung die oben aufgestellte Grenze überschreitet, so würden die obigen Versuche den Beweis liefern, dass sich die Dichtigkeiten der Electricität in den benutzten Materien verhalten wie deren Leitungsfähigkeiten.

Eine Entscheidung über die vorgeführten Möglichkeiten ist der Theorie nach zu erlangen durch dynamometrische Versuche oder durch die Beobachtung des zeitlichen Verlaufs der Inductions- und Extraströme; praktisch aber versprechen alle Versuchsanordnungen, die ich ausfindig zu machen im Stande war, nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn die träge Masse die hier festgesetzte Grenze um viele tausend male überschreitet.

Zum Schlusse will ich, unter Ausschluss der zuletzt besprochenen Annahme, die gefundene Grenze für die Grösse μ in die Rechnungen einsetzen, welche von Hrn. Geheimrath Helmholtz im 72. Bande des Borchardt'chen Journals ausgeführt sind. Es wird dort gezeigt, dass unter gewissen, näher bestimmten Voraussetzungen und unter Annahme des Weber'schen Gesetzes in einer leitenden Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$ gewisse Strömungsformen, die durch eine Ordnungszahl $\mathfrak{a}$ gegeben sind, dann instabil werden, wenn nach unserer Bezeichnungsweise:

$$\mathfrak{R} > \mathfrak{a} \sqrt{\frac{\mu \pi}{2}} \text{ ist.}^{1})$$

1) Unsere Grösse μ ist in der dort benutzten Bezeichnungsweise ausgedrückt gleich $\frac{\mu}{2A^2}$.

Hieraus und aus der für μ gefundenen Grenze $\mu = 0{,}008\,\text{mm}^2$ ergibt sich, dass unter den gemachten Voraussetzungen die erste und Grundströmung schon in einer Kugel von 0,11 mm Radius instabil werden würde, und dass in einer Kugel von 1 cm Radius schon die ersten 90 Theilströmungen, also nahezu die gesammte Strömung, ins Unendliche würde wachsen können.

Extraströme in Eisendrähten.

Ist der durchflossene Draht fähig, magnetische Polarität anzunehmen, so wird dieser Umstand eine ähnliche Vermehrung des Eigenpotentials zur Folge haben, wie eine etwa vorhandene träge Masse der Electricität; die Grösse der Polarisationsfähigkeit wird sich daher nach derselben Methode bestimmen lassen, welche wir zum Nachweis einer trägen Masse in Anwendung zu bringen gesucht haben.

Theils um mich von der Brauchbarkeit der Methode zu diesem Zwecke zu überzeugen, theils um eine Schätzung darüber zu erhalten, wie weit die magnetischen Eigenschaften anderer Metalle zu Störungen Anlass geben könnten, stellte ich einige Versuche mit Eisendrähten an. In denselben war der zu untersuchende Widerstand der Brücke aus einem weichen Eisendrahte von 0,66 mm Durchmesser und 14070 mm Gesammtlänge gebildet, der, ähnlich wie früher der Kupferdraht, aus zwei Zweigen bestand, welche in zwei verschiedenen Weisen geschaltet werden konnten. Die Form des Drahtes bestand wieder aus Rechtecken, sodass für beide Schaltungen sich die Eigenpotentiale der Vorrichtung genau berechnen liessen. Aus den bei diesen beiden Potentialen erhaltenen Werthen des Extrastroms musste sich der Theorie nach schon die Vermehrung des Eigenpotentials durch den Magnetismus berechnen lassen, in Wirklichkeit zeigte sich dies nicht thunlich, da die Wirkung des Magnetismus nicht klein, sondern sehr gross gegen die reine Inductionswirkung war. Es wurde deshalb an Stelle des Eisendrahtes ein Zweig einer der früher erwähnten Spiralen mit dem nöthigen Ballastwiderstande in die Brücke eingeschaltet und mit dem Extrastrome, welchen

dies bekannte Potential hervorbrachte, der Extrastrom aus dem Eisendrahte verglichen.

Die Beobachtungen wurden nach den früher besprochenen Methoden angestellt; ihre Details bieten kein Interesse, sie gaben aber die Daten an die Hand, um in absolutem Maasse die in dem Eisendrahte wirkenden magnetisirenden Kräfte sowohl als auch die erreichten Polarisationen zu bestimmen. Die Resultate sind in folgender kleinen Tabelle zusammengestellt. Die erste Spalte gibt in absolutem Maasse den Werth der magnetisirenden Kraft K an der Mantelfläche des cylindrischen Drahtes (von wo aus sie gegen die Axe zu abnimmt, proportional dem Abstande von der Axe); die zweite Spalte gibt die aus den zugehörigen Beobachtungen berechneten Werthe der sogenannten Polarisationsconstanten θ:

K	θ	K	θ
0,96	8,12	1,98	8,83
1,17	8,42	2,94	9,67
1,47	9,02	3,12	9,67
1,62	8,92	3,99	9,96
1,74	8,65	7,20	11,60

Diese Werthe von K und θ können selbstverständlich nur nahezu als zusammengehörige Werthe bezeichnet werden. Abgesehen von manchen Unregelmässigkeiten zeigt sich, dass innerhalb der vorliegenden Grenzen θ wächst mit K, ein Verhalten, welches unter anderen Umständen schon häufig beobachtet ist. Die Beobachtungen auf grössere Stromstärken auszudehnen, war wegen der zu beträchtlichen Wärmeentwickelung im Eisendrahte nicht möglich.

IV. *Ueber Fluorescenz; von E. Lommel.*

In einer vor kurzem veröffentlichten Abhandlung[1]): „das Stokes'sche Gesetz" tritt Hr. Hagenbach neuerdings für die Allgemeingiltigkeit dieses Gesetzes in die Schranken. Der Mittheilung der vermeintlich „entscheidenden" Versuche, welche die Geltung dieses Gesetzes auch in den Fällen darthun sollen, die nach meinen von den Herren Brauner[2]) und und Lubarsch[3]) bestätigten Wahrnehmungen eine Ausnahme bilden, geht eine theoretische Erörterung voraus, in welcher Hr. Hagenbach auch gegen einige in meiner Abhandlung[4]) „über die Intensität des Fluorescenzlichtes" bezüglich des photometrischen Verhaltens dieses Lichtes aufgestellte Sätze Widerspruch erhebt. Auf den folgenden Seiten werde ich sowohl diese Einwendungen als auch die von Hrn. Hagenbach aus seinen Versuchen über das Stokes'sche Gesetz gezogenen Schlussfolgerungen widerlegen. Was den erstern Punkt anlangt, so hielt ich es für angemessen, in einem ersten Abschnitte die neuen photometrischen Principien, welche meiner Abhandlung „über die Intensität des Fluorescenzlichtes" zu Grunde liegen, etwas näher beleuchten. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den photometrischen Eigenthümlichkeiten des Fluorescenzlichtes insbesondere, weist die Unrichtigkeit der von Hrn. Hagenbach aufgestellten Theorie nach und widerlegt die von ihm gegen einige meiner Sätze erhobenen Einwände. Der dritte Abschnitt endlich ist der Besprechung der das Stokes'sche Gesetz betreffenden Versuche gewidmet.

I. Ueber die Grundsätze der Photometrie.

1. Nach dem Vorgange Lambert's stützte sich der photometrische Calcul bisher auf die folgenden drei Grundsätze:

1) Hagenbach, Wied. Ann. **8.** p. 369. 1879.
2) Brauner, Wiener Anzeiger, Nr. **19.** p. 178. 1877.
3) Lubarsch, Wied. Ann. **6.** p. 248. 1879.
4) Lommel, Pogg. Ann. **160.** p. 75. 1877.

I. Die von einem leuchtenden Punkte auf ein Flächenelement senkrecht einfallende Lichtmenge ist dem Quadrate der Entfernung des Punktes und des Flächenelementes umgekehrt proportional.

II. Die von einem Flächenelement senkrecht ausstrahlende und auf ein zweites Flächenelement fallende Lichtmenge ist dem Cosinus des Incidenzwinkels proportional.

III. Die von einem Flächenelement ausstrahlende und auf ein zweites Flächenelement senkrecht auffallende Lichtmenge ist dem Cosinus des Emanationswinkels proportional.

Bezeichnet man das lichtstrahlende Flächenelement mit $d\varphi$, das beleuchtete mit df, die Lichtmenge, welche von der Einheit der lichtstrahlenden Oberfläche senkrecht ausgesandt wird, mit J, ferner den Incidenz- und Emanationswinkel resp. mit i und ε, endlich mit d den Abstand der beiden Flächenelemente, so hat man hiernach die von dem ersten auf das zweite fallende Lichtmenge:

$$= \frac{df \,.\, d\varphi \,.\, J \,.\, \cos i \,.\, \cos \varepsilon}{d^2}.$$

Von jenen drei Grundsätzen lassen sich die beiden ersten aus dem Wesen der Lichtausbreitung selbst leicht theoretisch begründen; der dritte dagegen ist rein empirischer Natur und stützt sich nur auf die Beobachtung, dass eine glühende Kugel dem Auge in jeder Lage als eine gleichmässig leuchtende Scheibe erscheint.

2. Eine von der bisherigen abweichende Behandlungsweise photometrischer Probleme habe ich in der Abhandlung „über die Intensität des Fluorescenzlichts“ eingeführt. In dieser Arbeit werden nicht die Flächenelemente einer leuchtenden Oberfläche, sondern die Volumenelemente des leuchtenden Körpers als lichtstrahlend betrachtet. Diese Betrachtungsweise ist die eigentlich naturgemässe, da ja das von einem leuchtenden Körper ausstrahlende Licht nicht nur von seiner Oberfläche, sondern auch aus seinem Innern kommt. Sie gewährt den Vortheil, dass von den drei obigen Grundgesetzen nur noch die beiden ersten bestehen bleiben, das dritte dagegen als Grundsatz entbehrlich wird; dafür aber erheischt sie, dass die Absorption berücksichtigt

werde, welche das von jedem Volumenelemente ausstrahlende Licht innerhalb des leuchtenden Körpers oder überhaupt auf seinem Wege bis zu dem beleuchteten Flächenelement erleidet.

Wir legen demnach der Photometrie die folgenden Sätze zu Grunde:

I. Die von einem Volumenelement auf ein Flächenelement senkrecht einfallende Lichtmenge ist dem Quadrate der Entfernung des Volumenelementes und des Flächenelementes umgekehrt proportional.

II. Die von einem Volumenelement ausstrahlende und auf ein Flächenelement fallende Lichtmenge ist dem Cosinus des Incidenzwinkels proportional.

III. Das von einem Volumenelement ausstrahlende Licht erleidet auf seinem Wege innerhalb des leuchtenden Körpers Absorption nach Maassgabe des bekannten Absorptionsgesetzes.

Bezeichnet man also das lichtstrahlende Volumenelement mit dv, die von ihm nach irgend einer Richtung ausstrahlende Lichtmenge mit Edv, das beleuchtete Flächenelement mit df, den Incidenzwinkel mit i, den innerhalb des Körpers durchlaufenen Weg mit r, den ausserhalb bis zum Flächenelement zurückgelegten Weg mit r_0, sodass $d = r_0 + r$ ist, endlich den Exstinctionscoëfficienten des lichtstrahlenden Körpers für die betrachtete homogene Strahlengattung mit k, so ist die von dem Volumenelement dv dem Flächenelement df zugestrahlte Lichtmenge:

$$\frac{df.\,dv.\,E.\cos i.\,e^{-kr}}{(r_0 + r)^2}.$$

3. An die Stelle des Lambert'schen Cosinusgesetzes, welches wir aus der Reihe der photometrischen Grundsätze gestrichen haben, setzen wir also unser obiges drittes, weit umfassenderes Grundgesetz, in welchem alle besonderen, je nach der Beschaffenheit des lichtstrahlenden Körpers verschiedenen Emanationsgesetze (und namentlich auch das Lambert'sche Cosinusgesetz) als specielle Fälle enthalten sind.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir zuerst die Lichtstrahlung eines gleichmässig glühenden undurchsichtigen Körpers. Ich nenne einen Körper „undurchsichtig", wenn sein Exstinctionscoëfficient so gross ist, dass ein in ihm sich fortpflanzender Lichtstrahl schon nach Durchlaufung einer bestimmten sehr kleinen Strecke ϱ ausgelöscht wird, sodass e^{-kr} für $r = \varrho$ und für jeden grössern Werth von r als verschwindend klein angesehen werden kann; ich bezeichne ihn als „gleichmässig glühend", wenn seine Temperatur in seiner ganzen Ausdehnung die gleiche, und demnach auch die Leuchtkraft für gleichgrosse Volumenelemente überall die nämliche ist.

Sei nun MN (Fig. 1) die Oberfläche des leuchtenden Körpers, $AB = d\varphi$ ein Element derselben, AC die Normale daselbst, so bilden alle in der Richtung AD unter dem Emanationswinkel ε ausfahrenden und daher unter sich parallelen Strahlen einen zum Flächenelement $d\varphi$ schiefen Cylinder, der alle diejenigen Volumenelemente des leuchtenden Körpers in sich schliesst, welche Strahlen in der gegebenen Richtung durch das Flächenelement senden können. Durch Ebenen parallel zum Oberflächenelement theilen wir diesen Cylinder in Volumenelemente. Ein beliebiges derselben ($mnpq$), welches von dem Flächenelement um die Strecke r entfernt ist und das Volumen $d\varphi\, dr \cos\varepsilon$ besitzt, sendet die Lichtmenge:

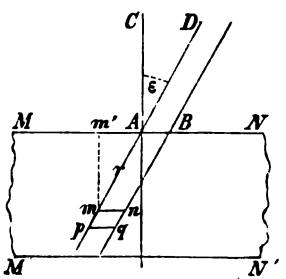


Fig. 1.

$$dL = d\varphi \,.\, dr \,.\, E \,.\, \cos\varepsilon \,.\, e^{-kr}$$

durch das Flächenelement $d\varphi$; da nämlich sämmtliche Strahlen dieselbe Richtung haben, und also eine Ausbreitung derselben nicht stattfindet, so kommt das Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung hier nicht zur Anwendung. Um die Lichtmenge L zu erhalten, welche sämmtliche in dem Cylinder enthaltenen Volumenelemente durch das Flächenelement in der gegebenen Richtung hindurchsenden, haben

wir obigen Ausdruck von $r = 0$ bis $r = \varrho$ zu integriren, d. h. bis zu derjenigen Entfernung, aus welcher überhaupt noch Licht bis zur Oberfläche dringt. Wir erhalten alsdann:

$$L = d\varphi \,.\, E \,.\, \cos\varepsilon \int_0^{\varrho} e^{-kr}\, dr = d\varphi \cdot \frac{E}{k} \cdot \cos\varepsilon\,(1 - e^{-k\varrho}),$$

oder, da $e^{-k\varrho}$ unserer Voraussetzung gemäss als verschwindend anzusehen ist:

$$L = d\varphi \cdot \frac{E}{k} \cdot \cos\varepsilon \cdot$$

Bezeichnen wir die von dem Flächenelement senkrecht ausfahrende Lichtmenge $d\varphi \cdot \frac{E}{k}$ mit L_0, so haben wir:

$$\frac{L}{L_0} = \cos\varepsilon,$$

d. h. die von einem Oberflächenelement eines glühenden undurchsichtigen Körpers nach irgend einer Richtung ausstrahlende Lichtmenge ist dem Cosinus des Emanationswinkels proportional.

Das Lambert'sche Cosinusgesetz hat hiermit seine auf allgemein anerkannte Principien gestützte theoretische Begründung gefunden.[1]) Zugleich aber ist gezeigt, dass dasselbe nur für glühende undurchsichtige Körper Geltung hat.

4. Ist nämlich der glühende Körper durchsichtig, jedoch absorbirend, und betrachten wir eine von den parallelen Ebenen MN und $M'N'$ (Fig. 1) begrenzte Schicht von der Dicke R, so haben wir, um die durch das Flächenelement $d\varphi$ ausstrahlende Lichtmenge zu finden, das obige Differential dL von $r = 0$ bis $r = \frac{R}{\cos\varepsilon}$ zu integriren und erhalten:

$$L = d\varphi \cdot \frac{E}{k} \cdot \cos\varepsilon \left(1 - e^{-k\frac{R}{\cos\varepsilon}}\right),$$

oder, da: $L_0 = d\varphi \cdot \frac{E}{k}(1 - e^{-kR})$ ist:

1) Bekanntlich hat bereits Fourier (Ann. de chim. et de phys. **6.** p. 259. 1817; **27.** p. 236. 1824; Pogg. Ann. **2.** p. 375. 1824) das Cosinusgesetz für strahlende Wärme aus der Annahme abgeleitet, dass die Strahlung nicht nur von der Oberfläche ausgehe, sondern auch bis zu einer gewissen Tiefe aus dem Innern dringe.

$$\frac{L}{L_0} = \cos\varepsilon \cdot \frac{1 - e^{-k\frac{R}{\cos\varepsilon}}}{1 - e^{-kR}}.$$

Das Emanationsgesetz wird also für einen glühenden durchsichtigen aber absorbirenden Körper nicht durch den Cosinus des Emanationswinkels, sondern durch eine Function dieses Cosinus:

$$\cos\varepsilon \cdot \frac{1 - e^{-k\frac{R}{\cos\varepsilon}}}{1 - e^{-kR}}$$

ausgedrückt, welche zwar wie dieser selbst für $\varepsilon = 0$ den Werth 1 hat und für $\varepsilon = 90^0$ verschwindet, auch mit wachsendem ε fortwährend abnimmt, jedoch für Werthe zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 90^0$ durchweg grösser ist als $\cos\varepsilon$. Erst für eine unendlich dicke Schicht des glühenden Körpers würde das reine Cosinusgesetz eintreten.

5. Bevor wir weiter schreiten, wollen wir die Grösse E, deren Product mit dem Inhalt dv eines Volumenelements die Lichtmenge ausdrückt, welche dieses Volumenelement nach irgend einer Richtung aussendet, noch etwas näher betrachten. Die Lichtmenge, welche eine unendlich dünne Oberflächenschicht des Körpers von der Dicke δ senkrecht zur Oberfläche durch die Flächeneinheit ausstrahlt, würde demnach sein $E\delta$. Das Verhältniss dieser emittirten Lichtmenge zur Dicke δ der Schicht, also die Grösse E selbst, nennen wir das Emissionsvermögen des Körpers.

Wenn bei senkrecht auf die Oberfläche eines Körpers einfallendem Licht durch die Flächeneinheit die Einheit der Lichtmenge in den Körper eindringt, so wird in der unendlich dünnen Oberflächenschicht von der Dicke δ die Lichtmenge $k\delta$ absorbirt; das Verhältniss dieser absorbirten Lichtmenge zur Dicke δ der Schicht, d. i. die Grösse k selbst, nennen wir das Absorptionsvermögen des Körpers. Das Absorptionsvermögen eines Körpers wird sonach durch seinen Exstinctionscoëfficienten gemessen.

6. Durch Versuche von Draper[1]), Becquerel[2]) u. a.

1) Draper, Phil. Mag. **30.** 1847.

2) Becquerel, La lumière, ses causes et ses effets. Paris 1867. p. 71—97.

ist bewiesen, dass die verschiedensten undurchsichtigen Körper, wenn man sie zum Glühen erhitzt, bei derselben Temperatur gleich hell erscheinen und Licht von derselben Zusammensetzung ausstrahlen. Die Lichtmenge, welche ein solcher Körper durch die Einheit seiner Oberfläche senkrecht ausstrahlt, ist aber nach dem Obigen:

$$\frac{E}{k};$$

dieser Quotient muss sonach unter den genannten Umständen für alle jene Körper einen und denselben Werth c haben. Wir gelangen demnach zu dem Kirchhoff'schen Satz:

$$\frac{E}{k} = c \quad \text{oder} \quad E = ck,$$

d. h. bei derselben Temperatur und für dieselbe Schwingungszahl ist das Verhältniss des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen für alle Körper das nämliche; oder: das Emissionsvermögen ist dem Absorptionsvermögen proportional. Die Grösse c stellt demnach für alle Körper die nämliche Function der Temperatur und der Schwingungszahl dar.

7. Dieser Satz ist hiermit zwar zunächst nur für undurchsichtige Körper bewiesen. Da jedoch zwischen durchsichtigen und undurchsichtigen Körpern nur ein gradweiser Unterschied des Absorptionsvermögens besteht, so ist kein Grund vorhanden, ihn nur auf diese zu beschränken, und wir werden ihn auch für jene als bewiesen erachten, wenn seine Anwendung auch für die durchsichtigen Körper zu Resultaten führt, welche mit der Erfahrung übereinstimmen.

Mit Anwendung des Kirchhoff'schen Satzes ergibt sich nämlich die von einem Oberflächenelement eines undurchsichtigen Körpers unter dem Emanationswinkel ε ausgestrahlte Lichtmenge:

$$L = d\varphi \,.\, c \,.\, \cos\varepsilon;$$

für einen durchsichtigen Körper dagegen hat man:

$$L = d\varphi \,.\, c \,.\, \cos\varepsilon \left(1 - e^{-k\frac{R}{\cos\varepsilon}}\right).$$

Hieraus ergibt sich, wenn der Körper vollkommen durchsichtig, d. h. wenn $k = 0$ ist: $L = 0$,

d. h. ein vollkommen durchsichtiger Körper strahlt, wie hoch auch seine Temperatur sein mag, gar kein Licht aus. Diese Folgerung wird bekanntlich durch die Erfahrung bestätigt.[1])

Ist das Absorptionsvermögen k eines Körpers hinlänglich klein, so können wir $e^{-k\frac{R}{\cos\varepsilon}}$ nach Potenzen des Exponenten entwickeln und die höheren Potenzen vernachlässigen. Dann wird:

$$L = d\varphi \,.\, ckR.$$

In diesem Fall, welcher bei einem glühenden Gas (z. B. der Bunsen'schen Flamme) eintritt, ist die durch die Oberfläche ausgestrahlte Lichtmenge von dem Emanationswinkel unabhängig und der Dicke der leuchtenden Schicht sowie dem Absorptionsvermögen proportional, d. h. das glühende Gas sendet diejenigen Strahlengattungen am stärksten aus, welche es am stärksten zu absorbiren vermag. Auch diese Folgerungen stimmen wie bekannt mit der Erfahrung vollkommen überein.

8. Wir betrachten jetzt die Lichtstrahlung eines glühenden Gases, in welchem feste glühende Körpertheilchen schweben (wie bei den gewöhnlichen Gas- und Kerzenflammen). Ist $E = ck$ das Emissionsvermögen der festen Substanz, $E' = ck'$ dasjenige des Gases, und erfüllt jene den Bruchtheil α, dieses also den Bruchtheil $1 - \alpha$ der Volumeneinheit, so ist $c\big(\alpha k + (1-\alpha)k'\big)$ das Emissionsvermögen und folglich $\alpha k + (1-\alpha)\,k'$ das Absorptionsvermögen des Gemisches. Die Lichtmenge, welche eine Schicht von der Dicke R durch ein Element $d\varphi$ der Oberfläche unter dem Winkel ε ausstrahlt, ist demnach:

$$L = d\varphi \,.\, c \,.\, \cos\varepsilon \left(1 - e^{-\left(\alpha k + (1-\alpha)k'\right)\frac{R}{\cos\varepsilon}}\right).$$

Sind α und k' so klein, dass die höheren Potenzen des Exponenten vernachlässigt werden können, so wird diese Lichtmenge:

$$L = d\varphi \,.\, c \,.\, \big(\alpha k + (1-\alpha)k'\big) \,.\, R$$

von dem Ausstrahlungswinkel unabhängig und der Dicke der

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. **109.** p. 293. 1860.

Schicht proportional. Ist das Absorptionsvermögen des glühenden Gases $= 0$ oder doch verschwindend klein im Vergleich zu demjenigen der festen Substanz, so hat man noch einfacher:

$$L = d\varphi \,.\, \alpha c k R.$$

9. Wir gehen jetzt über zur Ermittelung der Menge des Fluorescenzlichts, welches durch ein Oberflächenelement eines fluorescirenden Körpers nach irgend einer Richtung ausgestrahlt wird.

Dringt durch die Einheit der Oberfläche die homogene Lichtmenge J senkrecht ein, so gelangt davon bis zur Schicht, welche in der Tiefe $mm' = r\cos\varepsilon$ (Fig. 1) liegt, der Antheil:

$$Je^{-kr\cos\varepsilon},$$

wenn k das Absorptionsvermögen der Substanz für die einfallende Strahlengattung von der Wellenlänge λ vorstellt. Das in dieser Tiefe liegende Volumenelement $d\varphi\, dr\cos\varepsilon$ strahlt alsdann nach jeder Richtung die Menge:

$$d\varphi\, dr\, Ja\alpha k\cos\varepsilon e^{-kr\cos\varepsilon}$$

Fluorescenzlicht aus, wenn α einen von der Concentration abhängigen Factor, und a den Bruchtheil der Gesammtmenge des Fluorescenzlichts ausdrückt, welcher der Wellenlänge λ' zugehört. Ist k' das Absorptionsvermögen des Körpers für diese letztere Strahlengattung, so sendet das betrachtete Volumenelement nach dem Element $AB = d\varphi$ (Fig. 1) der Oberfläche die Lichtmenge:

$$dL = d\varphi\, dr\, Ja\alpha k\cos\varepsilon e^{-(k\cos\varepsilon + k')r}.$$

Um die Gesammtmenge des aus dem Oberflächenelement $d\varphi$ unter dem Winkel ε ausgestrahlten Fluorescenzlichts für eine Körperschicht von der Dicke R zu finden, hat man diesen Ausdruck von $r = 0$ bis $r = \frac{R}{\cos\varepsilon}$ zu integriren und erhält die Lichtmenge:

$$L = d\varphi \,.\, Ja\alpha \cdot \frac{k\cos\varepsilon}{k\cos\varepsilon + k'}\left(1 - e^{-(k\cos\varepsilon + k')\frac{R}{\cos\varepsilon}}\right).$$

Daraus folgt für senkrechte Ausstrahlung:

$$L_0 = d\varphi \,.\, Ja\alpha \cdot \frac{k}{k + k'} \cdot (1 - e^{-(k+k')R}).$$

Das Emanationsgesetz für fluorescirende Körper ergibt sich daher in folgender Gestalt:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{(k+k')\cos\varepsilon}{k\cos\varepsilon + k'} \cdot \frac{1 - e^{-(k\cos\varepsilon + k')\frac{R}{\cos\varepsilon}}}{1 - e^{-(k+k')R}},$$

woraus für eine unendlich dicke Schicht oder eine sehr concentrirte Lösung der einfachere Ausdruck:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{(k+k')\cos\varepsilon}{k\cos\varepsilon + k'}$$

hervorgeht. Das Emanationsgesetz für fluorescirende Substanzen wird also durch eine Function des Cosinus, welche zwar wie dieser $= 1$ ist für $\varepsilon = 0$ und $= 0$ für $\varepsilon = 90^0$, für dazwischenliegende Werthe von ε aber durchaus grösser ist als $\cos\varepsilon$, jedoch niemals durch den Cosinus selbst ausgedrückt.

10. Bisher wurde von der Brechung, welche die Strahlen beim Austritt oder Eintritt in den Körper erleiden, ganz abgesehen, oder vielmehr, unter dem Winkel ε wurde der Winkel verstanden, welchen das betrachtete Strahlenbündel im Innern der Substanz mit der Normalen der Oberfläche bildet. Bezeichnen wir jetzt den letztern Winkel mit ε', den dazugehörigen wirklichen Austrittswinkel mit ε, und nehmen wir ferner noch an, dass die einfallenden Strahlen mit dem Lothe ausserhalb den Winkel i, innerhalb den Winkel i' bilden, so findet man leicht durch dieselben Ueberlegungen wie vorher:

$$L = d\varphi \,.\, Ja\alpha \cdot \frac{k\cos i'\cos\varepsilon'}{k\cos\varepsilon' + k'\cos i'}\left(1 - e^{-\left(k\frac{\cos\varepsilon'}{\cos i'} + k'\right)\frac{R}{\cos\varepsilon'}}\right),$$

wo i' und ε' aus den Gleichungen:

$$\sin i' = \frac{\sin i}{n} \quad \text{und} \quad \sin\varepsilon' = \frac{\sin\varepsilon}{n'}$$

zu bestimmen sind, wenn n und n' resp. die Brechungscoëfficienten der einfallenden und der austretenden Strahlen bedeuten.

In vorstehender Formel ist übrigens noch der Umstand unberücksichtigt geblieben, dass das austretende Strahlenbündel bei der Brechung einen Lichtverlust erleidet. Um

auch diesem Umstand Rechnung zu tragen, braucht man nur noch den Factor:

$$\varkappa = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin^2(\varepsilon+\varepsilon')} + \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon-\varepsilon')}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon+\varepsilon')}\right)$$

hinzuzufügen, welcher sich aus der Fresnel'schen Reflexionstheorie ergibt. Für das einfallende Licht können wir uns den analogen von i und i' abhängigen Factor in der Grösse J, wenn wir unter J die durch die Flächeneinheit eindringende Lichtmenge verstehen, inbegriffen denken.

11. Aus den bisherigen Auseinandersetzungen erhellt zur Genüge, dass das Emanationsgesetz, wie es sich je nach der Beschaffenheit des lichtstrahlenden Körpers gestaltet, eine Folge der von dem Körper ausgeübten Absorption ist. Das jeweils giltige Emanationsgesetz ist daher in unserem dritten Grundsatz implicite bereits enthalten. Gerade durch diese umfassende Bedeutung ist dieser Grundsatz dem entsprechenden Lambert'schen (vom Cosinus des Emanationswinkels) weit überlegen. Ueberhaupt ist durch unser Verfahren für die theoretische Photometrie eine neue vertiefte Grundlage gewonnen und ihrer Anwendung ein bedeutend erweitertes Gebiet eröffnet.

Jedes photometrische Problem kann nach unserer Methode auf zweierlei Weise behandelt werden. Entweder direct, indem man, von den Volumenelementen als den wirklichen und ursprünglichen Sitzen des Leuchtprocesses ausgehend, unsere obige Grundformel (§ 2) über das gesammte Volumen des lichtstrahlenden Körpers integrirt. Irgend ein Emanationsgesetz braucht man bei diesem directen Verfahren nicht zu berücksichtigen, da dieses Gesetz, in der für jeden Fall giltigen Form, in der Grundformel bereits involvirt ist. Oder man kann einen Umweg einschlagen, indem man (wie es in der bisherigen Photometrie üblich war), die Oberflächenelemente, durch welche das Licht ausstrahlt, als Lichtquellen auffasst und sonach die Integration über die Oberfläche des lichtstrahlenden Körpers erstreckt. Bei diesem indirecten Verfahren muss aber, wenn das Resultat richtig ausfallen soll, das für jeden speciellen Fall giltige Emanationsgesetz zuvor ermittelt und in

Rechnung gezogen werden. Bei dem ersten Verfahren werden alle einwirkenden Umstände, wie sie bei verschiedenen leuchtenden Körpern eintreten mögen, mit einer Formel umfasst[1]), das zweite Verfahren dagegen erheischt für jeden speciellen Fall einen besondern Gang der Untersuchung.

12. Dass diese beiden Verfahrungsweisen übrigens vollkommen äquivalent sind und zu dem nämlichen Resultat führen, möge an einem einfachen und bekannten Beispiele gezeigt werden, indem wir auf beiden Wegen die Lichtmenge bestimmen, welche ein undurchsichtiger glühender Körper nach einem gegebenen Flächenelemente df sendet. Ist $E = ck$ das Emissionsvermögen des Körpers, so schickt ein Volumenelement dv desselben nach dem Flächenelement df die Lichtmenge:

$$\frac{df\,dv\,ck\cos i e^{-kr}}{(r_0+r)^2},$$

wenn i den Einfallswinkel, r den innerhalb, r_0 den ausserhalb des Körpers bis zum Flächenelement durchlaufenen Weg des Strahlenbündels darstellt. Wählen wir die Normale des Flächenelements df zur Polaraxe eines sogenannten „geographischen" Coordinatensystems, so ist der Ort des Volumenelementes dv durch die Polardistanz i, die geographische Länge ψ und den Radius vector $r_0 + r$ bestimmt, wobei noch bemerkt sein mag, dass r_0 als Function von i und ψ beliebig gegeben zu denken ist, und sonach $r_0 = F(i, \psi)$ die Gleichung der Oberfläche des Körpers darstellt. Es ergibt sich alsdann das Volumenelement:

$$dv = d\psi\, di\, dr\,(r_0+r)^2 \sin i,$$

und die von ihm nach df gestrahlte Lichtmenge:

$$df\,d\psi\,di\,dr\,ck \sin i \cos i e^{-kr}.$$

Da nur bis zu einer gewissen Tiefe ϱ Licht aus dem Körper hervordringt, so hat man diesen Ausdruck nach r von $r = 0$ bis $r = \varrho$ zu integriren und erhält zunächst:

1) Vgl. Hagenbach a. a. O. p. 372, Z. 9—11 v. o., wozu ich nur bemerke, dass ich „die einwirkenden Umstände mit einer Formel zu umfassen" nicht nur „gesucht", sondern dies wirklich und in vollkommen sachgemässer Weise auch gethan habe.

$$df\,d\psi\,di\,c\,\sin i\cos i(1-e^{-k\varrho}),$$

oder, da $e^{-k\varrho}$ der Voraussetzung gemäss als verschwindend anzusehen ist:

$$df\,d\psi\,di\,c\,\sin i\cos i.$$

Dieser Ausdruck muss nun noch, unter der Voraussetzung, dass der leuchtende Körper oder der zu berücksichtigende Theil desselben einen Kegel von der Oeffnung i_1 vollständig ausfülle, nach ψ von 0 bis 2π, und nach i von 0 bis i_1 integrirt werden. Das Flächenelement df empfängt alsdann die Lichtmenge: $L = df.\pi c\,\sin^2 i_1$.

Um dieselbe Grösse nach dem zweiten (bisher allein üblichen) Verfahren zu berechnen, haben wir zuerst die Lichtmenge zu ermitteln, welche von einem Oberflächenelement $d\varphi$ eines glühenden Körpers nach irgend einer Richtung ausgestrahlt wird. Nun haben wir oben bereits gefunden, dass, wenn diese Richtung mit der Normalen des Flächenelements den Winkel ε bildet, jene Lichtmenge:

$$d\varphi\,.\,c.\,\cos\varepsilon$$

beträgt. Ist r_0 die Entfernung zwischen dem leuchtenden und dem beleuchteten Flächenelement, so empfängt das letztere die Lichtquantität:

$$\frac{df\,d\varphi\,.\,c.\,\cos\varepsilon\cos i}{r_0^2},$$

oder, da bei Anwendung des oben bereits gebrauchten Polarcoordinatensystems:

$$d\varphi = \frac{d\psi\,di\,r_0^2\sin i}{\cos\varepsilon}$$

ist, die Lichtmenge:

$$df\,d\psi\,di\,.\,c\,.\sin i\cos i.$$

Dieser Ausdruck, welcher mit dem entsprechenden nach der ersten Methode gefundenen identisch ist, gibt, unter denselben Grenzbedingungen integrirt, das nämliche Endresultat wie oben.

II. Ueber die Intensität des Fluorescenzlichts.

1. Die im vorhergehenden Abschnitt näher beleuchteten Principien sind es, welche meiner Arbeit „über die Intensität des Fluorescenzlichts“ zu Grunde liegen. In seiner oben citirten Abhandlung hat nun Hr. Hagenbach meiner Be-

arbeitung dieses Problems eine andere Theorie gegenübergestellt, aus welcher er Folgerungen zieht, die in einigen Punkten mit den von mir erhaltenen Resultaten im Widerspruch stehen. Während ich direct von den lichtstrahlenden Volumenelementen ausging, zieht Hr. Hagenbach es vor, den bisher in der Photometrie üblichen Weg einzuschlagen, indem er die Oberflächenelemente als lichtstrahlend ansieht. Gegen diese Methode ist nichts einzuwenden, sobald nur für jeden Fall das richtige Emanationsgesetz in Rechnung gezogen wird. Um das für fluorescirende Körper giltige Emanationsgesetz zu ermitteln, legt sich Hr. Hagenbach die Frage vor, ob eine durch Fluorescenz leuchtende Oberfläche sich verhalte wie ein glühendes Metallblech, für welches das Lambert'sche Cosinusgesetz gilt, oder wie eine brennende Gasflamme, für welche dieses Gesetz nicht gilt. Um diese Frage zu entscheiden, nimmt er zum Experimente seine Zuflucht und findet, dass eine stark fluorescirende Flüssigkeit, z. B. eine Lösung von Naphthalinroth, wenn man sie entweder senkrecht oder schief ansieht, so gut als ein glühendes Blech dem Auge gleich hell vorkommt, und dass man in beiden Fällen zum Auslöschen des Lichtes eine gleiche Anzahl übereinander gelegter grüner Gläser braucht.[1]) Durch solche „Experimente" glaubt Hr. Hagenbach den „bestimmten Entscheid" geliefert zu haben, dass eine durch Fluorescenz leuchtende Fläche sich verhalte wie ein glühendes Blech, und hält sich für berechtigt, das Lambert'sche Cosinusgesetz „ohne Bedenken" auch auf fluorescirende Oberflächen anzuwenden.

2. Durch sehr einfache Versuche lässt sich aber schlagend nachweisen, dass das Lambert'sche Ausstrahlungsgesetz für fluorescirende Substanzen nicht gilt, sondern dass deren Verhalten mit dem oben (I. 9.) aufgestellten Emanationsgesetz übereinstimmt.

1) Ueber diese Methode, Lichtstärken durch absorbirende Medien zu bestimmen, äussert sich Helmholtz (Handbuch der physiologischen Optik, p. 329) folgendermassen: „Die Grenze der Empfindlichkeit des Auges für Licht ist doch zu unbestimmt, als dass bei solchen Messungen nicht Irrungen um das Dreifache oder mehr der gemessenen Grösse eintreten sollten."

Wir haben nämlich oben unter der Voraussetzung senkrechter Beleuchtung die von dem Oberflächenelement $d\varphi$ eines fluorescirenden Körpers unter dem (innern) Emanationswinkel ε ausstrahlende Lichtmenge:

$$L = d\varphi \,.\, J a \alpha \cdot \frac{k \cos \varepsilon}{k \cos \varepsilon + k'} \cdot \left(1 - e^{-(k \cos \varepsilon + k') \frac{R}{\cos \varepsilon}}\right)$$

gefunden. Ist die Dicke R der Schicht klein genug oder sind (bei sehr geringer Concentration) k und k' hinreichend klein, um die höheren Potenzen des Exponenten vernachlässigen zu können, so ergibt sich hieraus:

$$L = d\varphi \,.\, J a \alpha k R,$$

d. h. unter den vorausgesetzten Umständen ist die ausgestrahlte Lichtmenge der Dicke der Schicht proportional und von dem Emanationswinkel unabhängig.

Erster Versuch. Man bringe einen Tropfen einer stark fluorescirenden Flüssigkeit (Fluoresceïn, Eosin, Naphthalinroth) auf eine farblose Glasplatte und decke eine zweite solche Glasplatte darüber; man erhält so zwischen den beiden Platten eine sehr dünne Flüssigkeitsschicht. Solcher zwischen je zwei Glasplatten eingeschlossener Schichten stelle man sich mehrere her. Legt man nun auf die erste Schicht eine zweite, sodass sie sich theilweise decken, und betrachtet sie vor einem dunkeln Hintergrund, so erscheint die doppelte Schicht bedeutend heller als die einfache, was um so sicherer constatirt werden kann, als die zu vergleichenden Helligkeiten sich unmittelbar nebeneinander befinden. Durch Hinzufügen einer dritten Schicht wird die Helligkeit noch grösser, sie wächst jedoch bei zunehmender Anzahl der Schichten immer langsamer, indem sie sich (entsprechend der obigen vollständigen Formel) einer obern Grenze nähert.

Zweiter Versuch. Man fülle ein scharfwinkliges Hohlprisma, wie man es zur Beobachtung der anomalen Dispersion zu gebrauchen pflegt, mit einer sehr verdünnten Lösung einer fluorescirenden Substanz und betrachte dasselbe vor einem dunkeln Hintergrund. Man wird wahrnehmen, dass die Helligkeit des Fluorescenzlichts von der Kante des Pris-

mas an, wo sie Null ist, nach dem Rücken hin, also mit wachsender Dicke der Schicht, stetig zunimmt.

In diesen beiden besonderen Fällen verhält sich also ein fluorescirender Körper ähnlich wie eine Gasflamme.

3. Im allgemeinen freilich verhält sich eine fluorescirende Substanz hinsichtlich ihrer Ausstrahlung weder wie eine Gasflamme noch wie ein glühendes Metall, sondern eben — wie eine fluorescirende Substanz, nach Massgabe der obigen Formel. Aus dieser lässt sich leicht die Lichtmenge ableiten, welche unter irgend einem Emanationswinkel auf ein dem ausfahrenden Strahlenbündel senkrecht dargebotenes Flächenelement trifft. Ist nämlich df dieses Flächenelement (z. B. ein Element der Pupille des Auges oder diese selbst), so hat man in obige Formel nur:

$$d\varphi = \frac{df}{\cos\varepsilon}$$

einzusetzen, und erhält die gesuchte Lichtmenge:

$$L_1 = df.Ja\alpha \cdot \frac{k}{k\cos\varepsilon + k'} \cdot \left(1 - e^{-(k\cos\varepsilon + k')\frac{R}{\cos\varepsilon}}\right).$$

Mit wachsendem Emanationswinkel nimmt hiernach die gesehene Helligkeit der durch Fluorescenz leuchtenden Oberfläche fortwährend zu, von dem Werthe:

$$df.Ja\alpha \cdot \frac{k}{k+k'}(1 - e^{-(k+k')R})$$

für $\varepsilon = 0$, bis zu dem Werthe:

$$df.Ja\alpha \cdot \frac{k}{k'}$$

für $\varepsilon = 90^0$. Dass eine solche Zunahme der Helligkeit mit wachsendem Ausstrahlungswinkel in der That stattfindet, zeigen die folgenden Versuche.

Dritter Versuch. Man stelle in die Mitte einer kreisrunden Glaswanne mit cylindrischer Wandung (*A*, Fig. 2 von oben gesehen) einen kleinen etwa mit Fluoresceïnlösung gefüllten Glastrog (*B*) und giesse in die Wanne Wasser bis zur halben Höhe des Troges. Der Trog wird senkrecht zu seiner Vorderfläche durch ein Bündel paralleler Strahlen beleuchtet, welches durch die Glaswand der Wanne eindringt. Damit auch die durch das Wasser zur untern Hälfte des

Troges gelangenden Strahlen parallel bleiben, ist an die cylindrische Wand der Wanne von innen eine ebene zum Troge parallele Glasplatte (C) wasserdicht angekittet, die zwischen sich und der Glaswand einen Hohlraum von der Gestalt einer planconvexen Cylinderlinse abschliesst, welcher mit Luft gefüllt bleibt. Man blicke nun durch die Glaswand der Wanne in schräger Richtung (OB) nach der durch Fluorescenz leuchtenden Vorderfläche des Troges, sodass die Pupille des Auges durch die Wasseroberfläche halbirt, und sonach die untere Hälfte des Troges durch das Wasser, die obere Hälfte durch die Luft gesehen wird. Für die untere Hälfte des Troges ist, da der Brechungscoëfficient der wässerigen Fluoresceïnlösung von demjenigen des Wassers kaum abweicht, der Winkel, welchen die Visirrichtung mit der Normalen der Trogwand bildet, zugleich der innere Emanationswinkel; für die obere Hälfte dagegen ist derselbe gleich dem Brechungswinkel beim Uebertritt von Luft in Wasser für jenen Winkel als Einfallswinkel. Man erblickt also bei dieser Anordnung zwei fluorescirende Flächen, von denen die untere bei grösserem, die obere bei kleinerem Emanationswinkel ausstrahlt, unmittelbar übereinander und kann ihre Helligkeit direct vergleichen. Man findet, dass die durch das Wasser gesehene untere Hälfte des Troges stets heller, und bei grossem Emanationswinkel beträchtlich heller erscheint als die obere durch die Luft gesehene Hälfte. Dasselbe gilt natürlich nicht blos für Fluoresceïn, sondern für jede beliebige fluorescirende Substanz. Bei alkoholischen Lösungen wird man statt des Wassers Weingeist in die Glaswanne giessen.

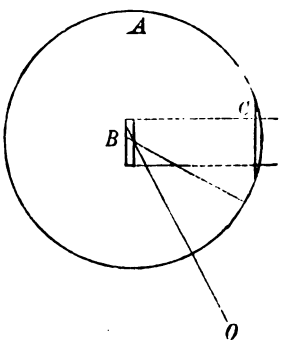


Fig. 2.

Gegen diesen Versuch könnte das Bedenken geltend gemacht werden, dass das von der oberen und unteren Hälfte des Troges ausgehende Licht durch die vorkommenden Reflexionen ungleiche Verluste erleidet, und zwar derart, dass

sich ersteres gegenüber letzterem schon von vornherein im Nachtheil befindet. Durch einen einfachen Controlversuch lässt sich aber zeigen, dass dieser Umstand keinen wesentlichen Einfluss übt.

Man beklebe die Rückseite einer Glasplatte mit weissem oder irgendwie gefärbtem Papier, bringe diese Glasplatte an die Stelle des Trogs und beobachte wie vorhin. Wäre im vorigen Fall die grössere Helligkeit der untern Troghälfte eine Folge geringerer Reflexionsverluste, so müsste nun auch die durch das Wasser gesehene Hälfte der Papierfläche, deren diffus ausgestrahltes Licht nun ganz die gleichen Verluste erleidet, ebenfalls heller erscheinen als die durch die Luft gesehene Hälfte. Sie erscheint aber eher ein wenig dunkler, ohne Zweifel infolge der Absorption des Wassers.

Vierter Versuch. Man stelle neben den mit Fluoresceïnlösung gefüllten Trog, der wie vorhin im Wasser der Glaswanne steht, einen Silberspiegel (*S*, Fig. 3) so auf, dass seine Fläche mit der Vorderwand des Troges einen stumpfen Winkel bildet, und blicke durch das Wasser der Glaswanne nahe der Richtung der einfallenden Strahlen gegen den Trog und sein unmittelbar daneben liegendes Spiegelbild (*B'*). Man sieht alsdann die durch Fluorescenz leuchtende Vorderfläche der Lösung gleichzeitig direct unter kleinem, und durch Spiegelung unter grossem Emanationswinkel, wie in der Figur angedeutet ist. Im Spiegelbild erscheint nun das Fluorescenzlicht bedeutend heller als bei der direct gesehenen Lösung, obgleich es dort einen grösseren Reflexionsverlust erlitten hat als hier. Das Wasser in der Glaswanne hat wie bei dem vorigen Versuch den Zweck, grosse Emanationswinkel zu ermöglichen. Zu den Versuchen genügt gewöhnliches Tageslicht.

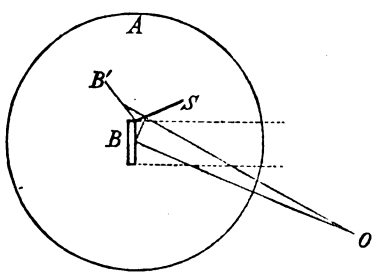


Fig. 3.

4. Die Helligkeit des ausgestrahlten Fluor-

escenzlichtes nimmt demnach mit wachsendem Emanationswinkel zu, wie unsere obige Formel es verlangt. Das Lambert'sche Cosinusgesetz ist für fluorescirende Körper ungültig.

Man wird bemerken, dass in den obigen Versuchen dafür Sorge getragen ist, dass sich die hinsichtlich ihrer Lichtstärke zu vergleichenden Flächen unmittelbar nebeneinander befinden und gleichzeitig gesehen werden. Der Umstand, dass Hr. Hagenbach diese erste Grundregel der praktischen Photometrie ausser Acht liess, trägt wohl die Hauptschuld an dem unrichtigen Resultate, zu dem er gelangte. Ausserdem konnten die Emanationswinkel, welche Hr. Hagenbach benutzte, indem er eine Lösung von Naphthalinroth nacheinander senkrecht und schief ansah, den Grenzwinkel der Totalreflexion für Weingeist (d. i. 47°) nicht überschreiten, und waren daher wahrscheinlich zu klein, um bei der unsichern successiven Beobachtung einen noch in die Augen fallenden Helligkeitsunterschied wahrnehmen zu lassen. Bei der oben beschriebenen Versuchsmethode dagegen lässt sich auch bei solchen kleineren Emanationswinkeln der Helligkeitsunterschied deutlich wahrnehmen.

5. Da das Cosinusgesetz für fluorescirende Substanzen nicht gilt, so ist die ganze von Hrn. Hagenbach auf dasselbe gegründete Theorie des Fluorescenzlichts hinfällig. Wenn Hr. Hagenbach gleichwohl mehrere richtige Folgerungen zu ziehen vermochte, so ist dies dem Umstande zu verdanken, dass er den von ihm als „Leuchtkraft" bezeichneten Ausdruck:

$$a\alpha \cdot \frac{k}{k+k'}\left(1 - e^{-(k+k')R}\right)$$

ohne Anwendung des Cosinusgesetzes direct aus den von mir aufgestellten Principien ableitete, und nun diese Formel als Ausgangspunkt einer Reihe von Schlussfolgerungen benutzte, welche zum Theil, nämlich so weit sie richtig sind, mit den meinigen übereinstimmen. Dieser Ausdruck bedeutet nämlich nichts anderes als die von der Flächeneinheit einer fluorescirenden Substanz bei der senkrechten Beleuchtung 1 in senkrechter Richtung ausgestrahlte Lichtmenge, und ergibt sich

aus unserer obigen Formel L, wenn darin 1 statt $d\varphi$, $J = 1$ und $\varepsilon = 0$ gesetzt wird. Aus dieser speciellen Formel folgt natürlich ebenso wie aus unserer allgemeineren, dass bei geringer Dicke der Schicht oder bei schwacher Concentration die ausgestrahlte Lichtmenge:

$$a\alpha k R$$

der Dicke der Schicht proportional ist. Während also die Hagenbach'sche Theorie von der Prämisse ausgeht, dass eine durch Fluorescenz leuchtende Substanz sich verhalte wie ein glühendes Blech, führt sie andererseits zu der Folgerung, dass sie sich unter den oben genannten Umständen verhalte wie eine Gasflamme, und steht demnach mit sich selbst in directem Widerspruch.

6. Wir gehen nun über zur besondern Besprechung der Einwendungen, welche Hr. Hagenbach gegen einige in meiner Abhandlung „über die Intensität des Fluorescenzlichts" aufgestellte Sätze erhoben hat.

Hr. Hagenbach unternimmt zuerst, die Lichtmenge zu berechnen, welche eine durch Fluorescenz leuchtende Oberfläche nach einem Flächenelement sendet, und gelangt unter Anwendung des Lambert'schen Cosinusgesetzes zu dem bekannten, oben (I. 12) zur Erläuterung unserer neuen photometrischen Principien abgeleiteten Ausdruck, welcher für undurchsichtige glühende Körper, nicht aber für fluorescirende Substanzen gilt.

Wir wollen nun zeigen, wie sich diese Aufgabe für fluorescirende Körper wirklich gestaltet. Benutzen wir dieselben Bezeichnungen wie bisher, so ist:

$$dL = df . J a \alpha k \cos i \cdot \frac{e^{-(kr' + k'r)}}{(r_0 + r)^2} dv$$

die Lichtmenge, welche das Volumenelement dv dem Flächenelement df unter dem Incidenzwinkel i zusendet, wenn r' der Weg ist, den das einfallende Licht bis zu dem Volumenelemente, und r der Weg, den das von dem Volumenelemente ausstrahlende Fluorescenzlicht innerhalb des Körpers zurückzulegen hat. Legen wir das bereits oben (I. 12) eingeführte Polarcoordinatensystem zu Grunde, dessen Polaraxe die Nor-

male des Flächenelements df ist, und sehen wir von der Lichtbrechung ab, oder denken wir uns dieselbe durch eine Vorkehrung beseitigt, welche der oben in unserem dritten und vierten Versuche angewendeten analog ist, so haben wir:

$$dv = d\psi\, di\, dr\, (r_0 + r)^2 \sin i$$

zu setzen und erhalten:

$$dL = df . Jak \sin i \cos i e^{-(kr' + k'r)}\, dr\, di\, d\psi .$$

Da r' von der Gestalt des fluorescirenden Körpers abhängig ist und als Function von r, i und ψ gegeben sein muss, so lässt sich die Integration dieses Ausdrucks nicht allgemein durchführen. Um einen einfachen Fall herauszugreifen, nehmen wir daher an, dass die fluorescirende Substanz eine Schicht von der Dicke R bilde, welche von zwei mit dem Flächenelement df parallelen Ebenen begrenzt ist, dass dieselbe von parallelen, zur Oberfläche senkrechten Strahlen beleuchtet werde, und dass sämmtliche innerhalb eines geraden Kreiskegels, dessen Axe die Normale des Flächenelements und dessen halbe Oeffnung $= i_1$ ist, gelegenen Volumenelemente Licht nach df senden. Alsdann ist:

$$r' = r \cos i,$$

und wir erhalten:

$$L = df . Jak \int_0^{i_1} di \sin i \cos i \int_0^{\frac{R}{\cos i}} e^{-(k \cos i + k')r}\, dr \int_0^{2\pi} d\psi ,$$

oder:

$$L = df . 2\pi Jak \int_0^{i_1} \left(1 - e^{-(k \cos i + k') \frac{R}{\cos i}}\right) \cdot \frac{\sin i \cos i}{k \cos i + k'} \cdot di .$$

Um die oben (I. 11) besprochene Aequivalenz der beiden möglichen Behandlungsweisen photometrischer Probleme durch ein zweites Beispiel zu belegen, möge die nämliche Formel auch noch nach der zweiten Methode, indem man nämlich die Oberflächenelemente der fluorescirenden Schicht als lichtstrahlend betrachtet, abgeleitet werden. Ist $d\varphi$ ein solches Oberflächenelement und r_0 seine Entfernung von dem Flächenstückchen df, so erhält man unter Benutzung des oben

(I. 9) bereits ermittelten Emanationsgesetzes die von ersterem auf letzteres gestrahlte Lichtmenge:

$$dL = df\,d\varphi \cdot \frac{Ja\,\alpha \cos i}{r_0^2} \cdot \frac{k \cos i^*}{k \cos i + k'} \cdot \left(1 - e^{-(k \cos i + k')\frac{R}{\cos i}}\right),$$

da im vorliegenden Falle der Emanationswinkel ε dem Incidenzwinkel i gleich ist. Nun ist aber:

$$d\varphi = \frac{d\psi\, di\, r_0^2 \sin i}{\cos i},$$

also: $$dL = df.Ja\alpha k \cdot \frac{\sin i \cos i}{k \cos i + k'} \left(1 - e^{-(k \cos i + k')\frac{R}{\cos i}}\right) di\, d\psi,$$

welcher Ausdruck, von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ und von $i = 0$ bis $i = i_1$ integrirt, ebenfalls zu der obigen Formel führt.

7. Die Ausführung der angedeuteten Integration liefert einen ziemlich complicirten Ausdruck, in dessen Zusammensetzung Integrallogarithmen eingehen. Wir beschränken uns daher auf den Fall, dass die Exponentialgrösse unter dem Integralzeichen, etwa wegen sehr starker Concentration der fluorescirenden Lösung (k sehr gross), als verschwindend klein angesehen werden kann. Alsdann ist:

$$L = df.2\pi Ja\,\alpha\, k \int_0^{i_1} \frac{\sin i \cos i}{k \cos i + k'} di,$$

oder:
$$L = df.2\pi Ja\,\alpha \left(1 - \cos i_1 + \frac{k'}{k} \log \frac{k \cos i_1 + k'}{k + k'}\right)$$

$$= df.2\pi Ja\,\alpha \left(2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i_1 + \frac{k'}{k} \log \left(1 - \frac{2k \sin^2 \frac{1}{2} i_1}{k + k'}\right)\right).$$

Denkt man sich die fluorescirende Schicht nach allen zur Normale des beleuchteten Flächenelements senkrechten Richtungen unbegrenzt, so hat man $i_1 = 90^0$ zu setzen; alsdann ist die Erleuchtung des Flächenstückchens:

$$L = df.2\pi Ja\,\alpha \left(1 + \frac{k'}{k} \log \frac{k'}{k + k'}\right)$$

von seinem Abstande von der strahlenden Schicht ganz unabhängig. Betrachtet man die unbegrenzte Schicht durch ein Spectroskop, so stellt die Spaltöffnung desselben das auffangende Flächenelement vor. Von dem durch den Spalt

eindringenden Licht geht aber nur derjenige Theil durch die Collimatorlinse weiter, welcher von dem Oeffnungskegel des Collimators begrenzt wird; ist α der halbe Oeffnungswinkel, so findet man die zum Prisma des Spectroskops gelangende Lichtmenge, wenn man in obigem Ausdruck $i_1 = \alpha$ setzt. Diese Lichtmenge ist also von der Entfernung des Spectroskops von der fluorescirenden Schicht unabhängig.

Anders verhält sich dagegen die Sache, wenn das fluorescirende Volumen, wie es thatsächlich immer der Fall sein wird, ein begrenztes ist. Die Art der Begrenzung ist in unserem Beispiel durch die gewählte Beleuchtungsart gegeben; da nämlich die einfallenden Strahlen senkrecht auf die Oberfläche der Schicht fallen, so ist das fluorescirende Volumen ein gerader Cylinder, welcher den auf der Oberfläche der Schicht entworfenen Lichtfleck zur Grundfläche hat. Für ein beliebiges, der Strahlung frei dargebotenes Flächenelement gelten jetzt die obigen Formeln, welche das fluorescirende Volumen als von einem Kegel begrenzt voraussetzen, dessen Spitze in dem beleuchteten Flächenelement liegt, überhaupt nicht mehr. Bei Anwendung des Spectroskops dagegen gelten sie noch, wenn der Spalt dem Lichtfleck so weit genähert ist, dass der Oeffnungskegel des Collimators von fluorescirender Substanz vollständig ausgefüllt wird. Ist b der Halbmesser des kreisförmig gedachten Lichtflecks, so ergibt sich die grösste Entfernung R_0, bei welcher dies noch stattfindet, aus der Gleichung:

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + (R_0 + R)^2}} = \sin\alpha,$$

wenn R die Dicke der fluorescirenden Schicht und α den halben Oeffnungswinkel des Collimators bezeichnet. Nähert man den Spalt noch mehr, so kann sich, wie Hr. Hagenbach richtig angibt, weder die Helligkeit noch die Farbenmischung des durch das Spectroskop gesehenen Lichtes weiter ändern, weil in der obigen Formel der Winkel i_1 nun unveränderlich $= \alpha$ bleibt. Jene Entfernung R_0 ist aber um so kleiner, je kleiner der Halbmesser b des Lichtflecks ist, d. h. je stärker das einfallende Licht concentrirt wird. Für Entfernungen, die grösser als R_0 sind, gelten die obigen

Formeln nicht mehr, sondern es treten nun auch hier die von mir für ein beliebiges freies Flächenelement aufgestellten und von Hrn. Hagenbach mit Unrecht bestrittenen Sätze in Kraft, welche die Abhängigkeit der Lichtstärke und der Farbenmischung von der Entfernung zwischen fluorescirendem Körper und beleuchtetem Flächenelement ausdrücken.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

VII. *Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten; von H. F. Weber.*

(Fortsetzung von p. 320.)

III. Vergleichung der erhaltenen Resultate mit den Ergebnissen früherer Beobachter.

1. Vergleichung der gewonnenen Resultate mit den Resultaten des Hrn. Lundquist.

In der in der Einleitung citirten Abhandlung hat Hr. Lundquist in Upsala nach der Ångström'schen Methode die Wärmeleitungsfähigkeit für Wasser, für eine Kochsalzlösung, für drei verschiedene Zinkvitriollösungen und für drei verschiedene Schwefelsäurewassermischungen ermittelt. Laut den Angaben auf p. 27 seiner Abhandlung erhielt er für die auch von mir untersuchten Flüssigkeiten unter Zugrundelegung derselben Einheiten, die in dieser Untersuchung gewählt wurden, folgende absolute Werthe der Wärmeleitungsfähigkeit für die beigeschriebenen Mitteltemperaturen:

A. Für Kochsalzlösung.		B. Für Wasser.	
$\varrho = 1{,}178$	$c = 0{,}785$	$\varrho = 1{,}00$	$c = 1{,}00$
$k = 0{,}0966$	43,9°	$k = 0{,}0908$	39,2°
0,0881	43,9	0,0955	43,3
0,0906	44,8	0,0934	41,0
0,0898	45,1	0,0946	41,8
0,0925	43,3	0,0939	38,5
0,0894	43,1	0,0940	41,1
0,0824	39,5	Im Mittel: 0,0937	40,8°
0,0885	47,8		
Im Mittel: 0,0897	43,9°		

C. Für Zinkvitriollösung.

$\varrho = 1{,}382$	$c = 0{,}770$
$k = 0{,}0935$	$42{,}3°$
$0{,}0949$	$45{,}6$
$0{,}0972$	$47{,}7$
Im Mittel: $0{,}0952$	$45{,}2°$

Für dieselben drei Flüssigkeiten habe ich nach meiner Methode erhalten:

für Wasser: für die mittlere Temperatur $4{,}10°$ $k = 0{,}0745$
„ „ „ „ $23{,}67°$ $k = 0{,}0857$

für Kochsalzlösung $\left(\begin{matrix}\varrho = 1{,}178\\ c = 0{,}800\end{matrix}\right)$:

für die mittlere Temperatur $4{,}40°$ $k = 0{,}0692$
„ „ „ „ $26{,}28°$ $k = 0{,}0809$

für Zinkvitriollösung $\left(\begin{matrix}\varrho = 1{,}362\\ c = 0{,}706\end{matrix}\right)$:

für die mittlere Temperatur $4{,}51°$ $k = 0{,}0691$
„ „ „ „ $23{,}44$ $k = 0{,}0776$

Nehmen wir an, dass sich die Wärmeleitungsfähigkeiten dieser drei Flüssigkeiten von 0° an bis gegen 50° hin in linearer Form mit steigender Temperatur vergrössern (was offenbar sehr angenähert der Fall sein wird), so erhalten wir für die von Hrn Lundquist benutzten Mitteltemperaturen folgende Werthe der Wärmeleitungsvermögen:

		Weber	Lundquist
für Wasser und für die Temperatur . .	$40{,}8°$	0.0953	0,0937
für Kochsalzlösung und für die Temperatur	$43{,}9°$	0,0901	0.0897
für Zinkvitriollösung u. „ „ „	$45{,}2°$	0,0872	0.0952

Für die beiden ersten Flüssigkeiten sind die Unterschiede in den Resultaten beider Versuchsreihen sehr unbedeutend; sie erreichen im Mittel noch nicht den Werth von 1%; um so auffallender ist die grosse Abweichung in den Angaben über die Wärmeleitungsfähigkeit der Zinkvitriollösung. Dieser Widerspruch löst sich aber bei näherer Durchsicht der Angaben des Hrn. Lundquist vollkommen auf. Hr. Lundquist hat die specifische Wärme der Zinkvitriollösung nicht selbst bestimmt, sondern diese Grösse durch die Herren Höglund und Thalander bestimmen lassen. Der von diesen Herren gefundene Werth $c = 0{,}0770$ ist aber völlig unrichtig;

wiederholt ausgeführte Messungen haben mir stets den Werth $c = 0{,}697$ ergeben. Wird dieser richtige Werth an die Stelle von 0,770 eingesetzt, so ergibt sich aus den Messungen des Hrn. Lundquist das Wärmeleitungsvermögen der Zinkvitriollösung gleich 0,0862, während ich den nur um weniges grössern Werth 0,0872 gefunden habe.

Nach Berichtigung dieses Fehlers ergibt sich also: die von Hrn. Lundquist für Wasser, Kochsalzlösung und Zinkvitriollösung ausgeführten Messungen der Wärmeleitungsfähigkeit stimmen fast bis auf ein Hundertstel mit den von mir nach einer gänzlich verschiedenen Methode erhaltenen Wärmeleitungsvermögen überein.

2. *Vergleichung meiner Beobachtungsresultate mit den von Hrn. Winkelmann gefundenen.*

Von den sechs Flüssigkeiten, für welche Hr. Winkelmann die absolute Wärmeleitungsfähigkeit bestimmt hat, habe ich fünf meiner Messungsmethode innerhalb derselben Temperaturgrenzen unterworfen. Ich stelle die von Hrn. Winkelmann und die von mir gefundenen absoluten Wärmeleitungsvermögen in der folgenden Tabelle zusammen: (wie bisher wurde auch hier die Minute als Zeiteinheit angenommen).

	Winkelmann	Weber
Wasser	0,0924	0,0745
Kochsalzlösung	0.1605	0,0692
Alkohol	0,0904	0,0292
Schwefelkohlenstoff . . .	0,1186	0,0250
Glycerin	0,0449	0,0402

Ein Blick auf diese Tabelle lehrt, dass die Abweichungen in den Resultaten der beiden Beobachtungsreihen ganz ausserordentlich grosse sind; es ist ja u. a. der von Hrn. Winkelmann gefundene Werth des Wärmeleitungsvermögens von Schwefelkohlenstoff nahezu fünfmal so gross als der von mir angegebene. Nur für die zäheste dieser fünf Flüssigkeiten, für Glycerin, liefern die beiden Beobachtungsreihen Werthe, die sich nicht sehr weit voneinander entfernen.

Diese grosse, durchgehende Disharmonie der Beobachtungsresultate deutet mit Gewissheit an, dass die eine oder die andere der besprochenen Versuchsmethoden einen principiellen Fehler einschliesst. Eine Durchsicht der Berechnungsweise, welche Hr. Winkelmann auf seine Versuche angewendet hat, lässt erkennen, dass dieser principielle Fehler in der eigenthümlichen Interpretation enthalten ist, mit welcher Hr. Winkelmann seine Resultate auslegt. Um diesen Fehler klar legen zu können, muss ich etwas näher auf die Winkelmann'sche Beobachtungsmethode und auf deren directe Resultate eingehen.

Hr. Winkelmann benutzte zur Messung des Wärmeleitungsvermögens der Flüssigkeiten die Beobachtungsmethode, welche von Hrn. Stefan vor sieben Jahren zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit der Gase angegeben wurde. Der dünne Zwischenraum zwischen den beiden coaxial gestellten Messingcylindern des Stefan'schen Apparates wurde mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt; der gefüllte Apparat wurde zunächst eine Zeit lang der Zimmertemperatur ausgesetzt und sodann von einem gewissen Zeitmomente an in seiner ganzen äussern Begrenzungsfläche dauernd auf 0^0 in einer Mischung von Wasser und Eis abgekühlt. Die dadurch hervorgerufene allmähliche Abkühlung des innern Messingcylinders wurde nach der Stefan'schen Methode messend verfolgt und aus der ermittelten Abkühlungsgeschwindigkeit dieses Cylinders, aus den Dimensionen und Massen des Apparates und der Dichte ϱ und der specifischen Wärme c der untersuchten Flüssigkeit wurde sodann ein Rückschluss auf die Grösse des Wärmeleitungsvermögens der Flüssigkeit gemacht. Wie Hr. Winkelmann ausführlich entwickelt hat, ist der Zusammenhang zwischen dem Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeit und den erwähnten Grössen von der Form:

$$k = v(A \,.\, \varrho \,.\, c + B),$$

wo die Abkühlungsgeschwindigkeit v des inneren Cylinders die Grösse $\frac{1}{t_2 - t_1} \log\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$ darstellt, und wo die Grössen A und B Werthe sind, die lediglich von der Form und den

Dimensionen des Apparates und der Masse des innern Cylinders abhängen.

Es wurden drei verschiedene Apparate benutzt, die Apparate I, II, III, in welchen der Abstand der beiden Messingcylinder der Reihe nach die Längen 0,20 cm, 0,26 cm und 0,50 cm betrug. Die mit diesen drei Apparaten erhaltenen absoluten Werthe des Leitungsvermögens waren:

	Apparat I	Apparat II	Apparat III
Wasser	0,0624	0,0696	0,0850
Kochsalzlösung	0,0651	0,0869	0,1262
Alkohol	0,0294	0,0359	0,0650
Schwefelkohlenstoff	0,0357	0,0446	0,0826
Glycerin	0,0404	0,0413	0,0435

Wie die Zahlen dieser Tabelle zeigen, unterscheiden sich die von den verschiedenen Apparaten gelieferten Werthe der Wärmeleitungsfähigkeit derselben Flüssigkeit so bedeutend voneinander, dass sich nicht einmal die Grenzen abstecken lassen, innerhalb deren die wahren Werthe dieser Leitungsvermögen liegen.

Die Ursache dieser ausserordentlich grossen Divergenz der von den verschiedenen Apparaten gelieferten Werthe glaubt Hr. Winkelmann angeben, und weiter auf Grund dieser Kenntniss eine Correctionsformel aufstellen zu können, welche einen sichern Rückschluss aus den beobachteten unrichtigen Werthen auf den wahren Werth des Wärmeleitungsvermögens gestatten soll. Zur Erzielung einer möglichst constanten Abkühlungsgeschwindigkeit des innern Cylinders musste Hr. Winkelmann einen Rührer anbringen, welcher die in die Mischung von Wasser und Eis tauchende äussere Begrenzungsfläche des Apparates dauernd auf 0° zu erhalten hatte; ohne dieses Rührwerk bildete sich über der äussern Begrenzungsfläche rasch eine stagnirende Schicht höher temperirten Wassers, welche die Abkühlungsgeschwindigkeit des innern Cylinders zu klein und stetig abnehmend ausfallen liess. Dieser Rührer beeinflusste aber nicht alle Theile der äussern Begrenzungsfläche in gleichem Maasse; er entfernte wohl die stagnirende Wasserschicht von der

cylindrischen Mantelfläche, vermochte aber nicht die an die horizontalen Basisflächen des äussern Cylinders grenzenden Wasserschichten stetig und vollkommen zu erneuern. Infolge dieses Umstandes mussten nach Hrn. Winkelmann die Basisflächen in allen Stadien des Versuchs stets eine etwas höhere Temperatur haben als die Mantelfläche, und das beobachtete Leitungsvermögen musste infolge davon zu klein ausfallen. An den beobachteten Werthen des Leitungsvermögens wäre also eine Vergrösserung, eine positive Correction, anzubringen; diese Correction glaubt Hr. Winkelmann als proportional der beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeit und proportional dem Verhältniss zwischen der Summe der beiden Basisflächen zur Mantelfläche des äussern Cylinders setzen zu müssen. Bedeutet K die wahre Wärmeleitungsfähigkeit, k die von dem Apparate gelieferte fehlerhafte, stellt p das genannte Verhältniss der beiden Flächen und n eine von Flüssigkeit zu Flüssigkeit verschiedene Constante dar, so setzt Hr. Winkelmann:

$$K = k + n.p.v.$$

Aus den drei, den drei Apparaten entsprechenden Gleichungen:

$$K = k_1 + n.p_1.v_1, \quad K = k_2 + n.p_2.v_2, \quad K = k_3 + n.p_3.v_3$$

leitet er den Werth der Constanten n ab und berechnet sodann mit Hülfe des Mittelwerthes von n den wahren Werth des Wärmeleitungsvermögens. Auf diesem Wege wurden die oben genannten Winkelmann'schen Werthe gewonnen.

Diese Annahme über die Ursachen, welche die Wärmeleitungsfähigkeit von Apparat zu Apparat so sehr verschieden ausfallen lassen, und diese vorgetragene Auffassungsweise bezüglich der Herleitung des wahren Werthes der Wärmeleitungsfähigkeit ist sicherlich unrichtig.

Eine erhebliche Differenz zwischen der Temperatur der horziontalen Basisflächen und der Temperatur der Mantelfläche kann wegen des verhältnissmässig sehr grossen Wärmeleitungsvermögens des Messings selbst dann kaum resultiren, wenn der Rührer nur die Mantelfläche abfegt und die horizontalen Basisflächen ganz unberührt lässt. Damit wird aber auch die Form der angebrachten Correction hinfällig.

Die beobachteten Werthe sprechen überdies selbst dafür, dass die wahre Wärmeleitungsfähigkeit in einer andern Weise berechnet werden muss, als nach der angegebenen Correctionsformel; denn die Grösse n ist laut den Beobachtungsdaten nicht constant. So ergeben sich aus der Combination der an den Apparaten I, II, III gemachten Beobachtungen für Kochsalzlösung für n die drei Werthe:

$$n = 0{,}094, \quad 0{,}179, \quad 0{,}157,$$

und für Wasser:

$$n = 0{,}065, \quad 0{,}0492, \quad 0{,}0548.$$

Die mit wachsender Dicke der benutzten Flüssigkeitsschicht erfolgende Zunahme des beobachteten Wärmeleitungsvermögens muss demnach in anderer Weise erklärt werden; sie ist nach meiner Auffassung eine unmittelbare Folge der Flüssigkeitsströmungen, die sich in dem benutzten Apparate während der ganzen Dauer der Versuche herstellen müssen. Alle Flüssigkeitstheilchen, die auf der Mantelfläche des innern Cylinders und in deren Nähe liegen, müssen in eine nach oben gerichtete, und alle die Flüssigkeitstheilchen, die sich auf der Mantelfläche des äussern Cylinders und in deren Nähe befinden, müssen in eine nach unten gerichtete Strömung hineingezogen werden. Eine weitere, jedoch viel energischere Strömung muss sich über der obern Basisfläche des innern Cylinders entwickeln, denn dort liegen permanent kühlere Schichten über wärmeren in verticaler Schichtung.

Die von Hrn. Winkelmann beobachteten Wärmeleitungsfähigkeiten sind also nicht kleiner als ihre wahren Werthe, sie sind im Gegentheil viel zu gross; die an den beobachteten Werthen anzubringende Correction muss eine negative sein.

Eine aufmerksame Durchmusterung der von Hrn. Winkelmann an den drei Apparaten erhaltenen Resultate, die ich noch einmal an dieser Stelle anführen will, lässt die Richtigkeit dieser Annahme sofort in die Augen springen. Für jede der benutzten Flüssigkeiten wächst das beobachtete (scheinbare) Wärmeleitungsvermögen in beschleunigter Weise mit wachsender Dicke der Flüssigkeitslamelle:

	Apparat I Dicke der Schicht 0,20 cm	Apparat II Dicke der Schicht 0,26 cm	Apparat III Dicke der Schicht 0,50 cm
Wasser	0,0624	0,0697	0,0850
Kochsalzlösung	0,0658	0,0869	0,1261
Alkohol	0,0294	0,0359	0,0650
Schwefelkohlenstoff	0,0357	0,0446	0,0826
Glycerin	0,0404	0,0413	0,0435

weil sich die Flüssigkeitsströmungen mit wachsender Dicke der Flüssigkeitsschicht in intensiverer und intensiverer Weise entwickeln können. Die Intensität der bei gegebenen Temperaturunterschieden in engbegrenzten Räumen entstehenden Flüssigkeitsströmungen hängt in strengster Weise von der Grösse der innern Reibung der Flüssigkeiten ab; sie ist der letztern Grösse umgekehrt proportional. Die Zunahmen, welche Hr. Winkelmann für die beobachtete Wärmeleitungsfähigkeit bei wachsender Dicke der Flüssigkeitsschicht gefunden hat, müssen also bei der leichtflüssigsten der obigen fünf Flüssigkeiten, bei dem Schwefelkohlenstoff, am grössten und bei der allerzähesten der Flüssigkeiten, dem Glycerin, kaum bemerkbar sein. Die für Schwefelkohlenstoff und für Glycerin in der obenstehenden Tabelle gegebenen Zahlenwerthe bestätigen diese Folgerung in der befriedigendsten Weise.

Ist aber die mit wachsender Dicke der Flüssigkeitsschicht constatirte Zunahme der beobachteten Wärmeleitungsfähigkeit eine Folge der Flüssigkeitsströmungen, dann muss der wahre Werth der Wärmeleitungsfähigkeit von jeder der untersuchten Flüssigkeiten kleiner sein als der für die kleinste Dicke der Flüssigkeitsschicht mit Hülfe des Apparates I gefundene Werth, und es wird der wahre Werth des Wärmeleitungsvermögens diesem letztern Werthe um so näher stehen, je grösser die innere Reibung der betreffenden Flüssigkeit ist. Die in der folgenden Tabelle stehenden, aus den Beobachtungen am Apparate I berechneten Werthe können also nur um weniges grösser sein als die wahren Werthe der Wärmeleitungsfähigkeit. In der letzten Spalte dieser Tabelle stehen die Werthe, welche ich für dieselben

	Winkelmann	Weber
Wasser	0,0624	0,0745
Kochsalzlösung . . .	0,0658	0,0692
Alkohol	0,0295	0,0292
Schwefelkohlenstoff . .	0,0357	0,0250
Glycerin	0,0404	0,0402

Flüssigkeiten bei derselben Temperatur nach einer Methode erhalten habe, welche die Flüssigkeitsströmungen vollständig ausschliesst. Eine Vergleichung der beiden Zahlenreihen lässt erkennen, dass die Resultate der richtig interpretirten Winkelmann'schen Versuche und die Resultate meiner Beobachtungsreihen in der besten Uebereinstimmung stehen. Für Kochsalzlösung, Alkohol und Glycerin ist die Uebereinstimmung eine fast vollkommene; für die leichtflüssigste Flüssigkeit, den Schwefelkohlenstoff, muss der Winkelmann'sche Werth etwas grösser als der meinige ausfallen, da sich in diesem leichtbeweglichen Medium auch innerhalb sehr dünner Schichten noch merkliche Strömungen entwickeln müssen; was die Ursache der für Wasser bestehenden Differenz sein könnte, vermag ich nicht mit Sicherheit anzugeben. Ich habe mich jedoch durch zahlreiche Versuche nach meiner, so weit ich sehe, fehlerfreien Methode überzeugt, dass Wasser in der That das angegebene Wärmeleitungsvermögen besitzt, und dass sein Leitungsvermögen zweifellos ganz erheblich grösser ist als das Leitungsvermögen wässeriger Salzlösungen. Ich glaube deswegen die Vermuthung aussprechen zu dürfen, dass in die von Hrn. Winkelmann über die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers ausgeführten Versuche ein kleiner Fehler eingeflossen ist.

Die Versuche des Hrn. Winkelmann liefern also bei richtiger Interpretation Resultate, welche mit den von mir erhaltenen Ergebnissen (bis auf eine einzige, nicht sehr erhebliche Ausnahme) in bester Uebereinstimmung stehen.

3. *Vergleichung der erhaltenen Resultate mit den Resultaten des Hrn. Beetz.*

Wie schon in den einleitenden Worten dieser Abhandlung hervorgehoben wurde, hat Hr. Beetz in neuester Zeit

eine umfassende Arbeit ausgeführt, in welcher er sich die Aufgabe stellte, nicht sowohl neue Zahlenwerthe für die absoluten Leitungsfähigkeiten der verschiedenen Flüssigkeiten beizubringen, als vielmehr die Umstände aufzusuchen, welche auf das Leitungsvermögen von Einfluss sind, und die Richtung kennen zu lernen, in welcher dasselbe durch diese Umstände verändert wird. Zu diesem Zwecke hat er eine grosse Anzahl von Flüssigkeiten der Untersuchung unterworfen mittelst eines einfachen Apparates, den Hr. Kundt angewandt hat, um die Unterschiede im Leitungsvermögen verschiedener Gase evident zu machen. Dieser Apparat besteht aus einem Reagensglase, welches von einem zweiten, an dasselbe angeschmolzenen Glasrohre so nahe umgeben ist, dass der Abstand der beiden Rohre nur etwa 2 mm beträgt. Diesen Zwischenraum füllte Hr. Beetz mit der zu untersuchenden Flüssigkeit bis zu einer Marke an, füllte das innere Glas mit einer stets gleich grossen Quecksilbermasse und senkte in diese das Gefäss eines in Zehntelgrade getheilten Quecksilberthermometers. Hierauf tauchte er den Apparat bis zu einer passenden Höhe in ein bis zu einer bestimmten Temperatur erkaltetes, resp. erwärmtes Wasserbad, liess denselben die Temperatur des Bades annehmen und führte ihn sodann in ein anderes Wasserbad mit der constanten Temperatur 20°. Mit Hülfe einer Secundenschlaguhr wurden nun die Zeitmomente notirt, in welchen das Thermometer eine Temperaturerhöhung, resp. eine Temperaturerniedrigung um je 2° anzeigte. Aus dem gemessenen Gange des Erwärmens oder Erkaltens glaubte Hr. Beetz einen einfachen Rückschluss auf das Wärmeleitungsvermögen k der untersuchten Flüssigkeit machen zu können. Bedeuten u_1 und u_2 die negativen oder positiven Temperaturüberschüsse des Thermometers über die Temperatur des Wärme- oder Kühlwassers in den Zeitmomenten t_1 und t_2 und wird:

$$v = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \log \frac{u_1}{u_2}$$

gesetzt, so ist nach Hrn. Beetz,

$$v = A.k,$$

wo A eine für alle mit Hülfe desselben Apparates ausgeführten Messungen constant bleibende Grösse bedeutet. Die Wärmeleitungsfähigkeiten k der verschiedenen Flüssigkeiten verhalten sich also nach Hrn. Beetz direct wie die gemessenen Abkühlungsgeschwindigkeiten v.

Nach diesem Verfahren hat Hr. Beetz eine sehr grosse Anzahl von Flüssigkeiten untersucht und zwar innerhalb zweier verschiedener Temperaturintervalle: zwischen 8° und 14° und zwischen 28° und 36°. Die hauptsächlichsten Resultate seiner Untersuchung sind:

Die leichtflüssigen Flüssigkeiten, wie Schwefelkohlenstoff, Benzin, Chloroform u. s. w. sind bei weitem bessere Wärmeleiter als die schwerer flüssigen; am schlechtesten leiten Olivenöl, Glycerin und concentrirte Schwefelsäure, während Wasser ungefähr in der Mitte zwischen guten und schlechten Wärmeleitern steht.

In niederen Temperaturen leiten alle verdünnten Salzlösungen besser als Wasser; ihr Leitungsvermögen wächst mit steigender Concentration, um bei noch höheren Werthen der Concentration wieder abzunehmen.

In höheren Temperaturen ist aber das Wasser ein besserer Wärmeleiter als alle wässerigen Salzlösungen, und das Leitungsvermögen der letzteren wird stetig kleiner mit steigender Concentration.

Das Wärmeleitungsvermögen aller untersuchten Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur stetig zu.

Alle diese Resultate, mit Ausnahme des letzten, stehen mit den von mir gefundenen Thatsachen in vollständigem Widerspruch. Wie weit die Divergenz zwischen meinen und den von Hrn. Beetz gefundenen Resultaten geht, mag u. a. folgende kleine Tabelle zeigen, in welcher die absoluten und relativen Werthe der Leitungsvermögen von neun von mir und von Hrn. Beetz untersuchten Flüssigkeiten zusammengestellt sind.

	Weber		Beetz
	k (absolut)	k (relativ	k (relativ)
Wasser	0,0745	100,0	100,0
Kochsalzlösung .	0,0692	92,0	104,8
Glycerin	0,0402	53,9	82,3
Alkohol	0,0292	39,2	87,1
Schwefelkohlenstoff	0,0250	33,6	124,2
Aether	0,0243	32,6	112,6
Olivenöl	0,0235	31,6	64,4
Chloroform . . .	0,0220	29,5	113,8
Benzin	0,0200	26,8	99,0

Der durchgehende immense Widerspruch in den beiden letzten Zahlenreihen deutet an, dass entweder die von mir benutzte oder die von Hrn. Beetz angewandte Beobachtungsmethode einen schweren Fehler einschliessen muss. Ich glaube, dass dieser Irrthum in der Interpretation enthalten ist, die Hr. Beetz auf seine Beobachtungen angewandt hat.

Die von Hrn. Beetz gemachte Annahme, dass der Werth der Abkühlungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \log\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$$

einzig und allein von der Wärmeleitungsfähigkeit k der untersuchten Flüssigkeit und von der Form und den Dimensionen des Apparates abhängt, ist durchaus unrichtig; auch die Dichte ϱ und die specifische Wärme c der untersuchten Flüssigkeit haben den durchgreifendsten Einfluss auf die Grösse v.

Um dieses evident zu machen, entwickele ich die Theorie der Versuche des Hrn. Beetz mit möglichster Strenge.

Der Beetz'sche Versuchsapparat darf mit sehr grosser Annäherung als ein System zweier coaxialer, sehr langer und sehr dünner Cylinder aufgefasst werden, deren dünner Zwischenraum mit der auf die Wärmeleitung zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist. Es darf ferner unbedenklich angenommen werden, dass die während der Versuche entstehenden Flüssigkeitsströmungen sich innerhalb der dünnen Flüssigkeitsschicht nur so schwach entwickeln können, dass die durch diese Strömungen fortgeführte Wärme sehr klein ist

gegenüber der durch die Leitung translocirten Wärme. Der Raum des innern Cylinders soll durch eine Masse erfüllt sein, die ein so gutes Wärmeleitungsvermögen besitzt, dass in jedem Zeitmomente die Temperaturen aller ihrer Massenelemente als gleich gross betrachtet werden dürfen. Diese Annahme konnte allerdings in dem Beetz'schen Apparate nicht in aller Strenge erfüllt sein, da Hr. Beetz zur Füllung des innern Cylinders den schlechtesten aller metallischen Leiter, das Quecksilber, wählte; indess wird der hieraus fliessende Fehler nur ein Fehler zweiter Ordnung sein können gegenüber dem oben erwähnten Versehen, das Hr. Beetz in der Interpretation seiner Beobachtungsresultate begangen hat. Der anfängliche, durch das ganze Cylindersystem gleichförmig bestehende negative, resp. positive Ueberschuss der Temperatur des Cylindersystems über die constante Temperatur des Wasserbades, in welchem die Erwärmung resp. Erkältung vor sich geht, sei u_0. Im Zeitmomente $t = 0$ soll das Cylindersystem in das Wasserbad eingeführt, und von diesem Zeitpunkte an soll der Gang der Temperatur des innern Cylinders messend verfolgt werden. Es ist das Gesetz anzugeben, nach welchem der Temperaturüberschuss u irgend eines Massenelements der zwischen den beiden Cylinderflächen eingeschalteten Flüssigkeit im Laufe der Zeit variirt.

Es möge der Betrachtung ein cylindrisches Coordinatensystem (x, r, φ) zu Grunde gelegt werden, dessen Axe mit der Axe des Cylindersystems zusammenfällt, und dessen Nullpunkt etwa in der Mitte der zuletztgenannten Axe liegen soll. Der Temperaturüberschuss irgend eines Volumenelements der Flüssigkeit hat dann in jedem Zeitmomente die partielle Differentialgleichung zu erfüllen:

$$(1) \qquad \varrho c \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right).$$

In den Versuchen des Hrn. Beetz war die Wärmeleitung unabhängig von der Richtung φ, und es hatte das Cylindersystem eine solche Länge, dass nahezu alle normal zur Axe gelegten Querschnitte unter identischen Temperaturverhält-

nissen standen. Den ausgeführten Versuchen entsprach also die folgende einfachere Form der Differentialgleichung:

$$\varrho c \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{1a}$$

Neben dieser Differentialgleichung hat u zwei Grenzbedingungen zu erfüllen. Zunächst ist:

$$\text{für } r = r_2 \qquad u = 0 \quad \text{für alle } t; \tag{2}$$

weiter ist die dem innern Cylinder in jedem Zeitelemente entführte Wärmemenge gleich dem Wärmequantum, das durch die innere Grenzfläche der cylindrischen Flüssigkeitslamelle auf dem Wege der innern Wärmeleitung während desselben Zeitintervalls hindurchtritt, d. h. es ist:

$$-M_1 c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{r=r_1} = -kF_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=r_1} \text{ für alle } t, \tag{3}$$

wenn M_1, c_1 die Masse und die specifische Wärme des inneren mit Quecksilber gefüllten Cylinders bedeutet und F_1 die innere Begrenzungsfläche der Flüssigkeitslamelle darstellt.

Schliesslich hat u der Anfangsbedingung zu genügen:

$$u = u_0 \text{ für } t = 0 \text{ und für alle } r. \tag{4}$$

Eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (1a) ist:

$$u = e^{-\frac{k}{\varrho c} m^2 t}(A I^0_{mr} + B Y^0_{mr}), \tag{5}$$

wo m, A, B näher zu bestimmende Constanten bedeuten, I^0_{mr} die Bessel'sche Function erster Gattung mit dem Index 0 und dem Argument mr und Y^0_{mr} die Bessel'sche Function zweiter Gattung mit demselben Index und dem nämlichen Argument darstellt, wo also I^0_{mr} und Y^0_{mr} die Zeichen für die beiden particulären Integrale folgender Differentialgleichung sind:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + m^2 r = 0.$$

Damit die gegebene einfache Lösung (5) die Grenzgleichung (2) erfüllt, muss:

$$A I^0_{mr_2} + B Y^0_{mr_2} = 0$$

sein, muss also: $B = -A\dfrac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}}$ gewählt werden.

Die Bestimmung der Constanten m ist so zu treffen, dass die einfache Lösung:

$$u = Ae^{-\frac{k}{\varrho c} m^2 t} \left\{ I^0_{mr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr} \right\} \tag{6}$$

auch die Grenzgleichung (3) erfüllt; die Grösse m ist also durch die Wurzeln der Gleichung bestimmt:

$$M_1 c_1 \frac{k}{\varrho c} m^2 \left(I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1} \right) = -kF_1 \left(\frac{dI^0_{mr}}{dr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} \frac{dY^0_{mr}}{dr} \right)_{r=r_1}.$$

Der rechten Seite dieser Gleichung kann eine andere Form gegeben werden. Aus der Theorie der Bessel'schen Functionen ist bekannt, dass:

$$\frac{dI^0_{mr}}{dr} = -mI^1_{mr} \quad \text{und} \quad \frac{dY^0_{mr}}{dr} = -mY^1_{mr}$$

ist, wo I^1_{mr} und Y^1_{mr} die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Gattung mit dem Index 1 bezeichnen. Nimmt man ausserdem in Betracht, dass sich die Masse M_1 durch $\pi r_1^2 H \varrho_1$ und die Fläche F_1 durch $2\pi r_1 H$ ersetzen lässt (wo ϱ_1 die Dichte des Quecksilbers und H die Länge des cylindrischen Systems bedeutet), so lässt sich die zuletzt gegebene Gleichung in die folgende Form überführen:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}$$

oder in die mehr symmetrische Form:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}. \tag{7}$$

Diese Gleichung (7) liefert unendlich viele Wurzelwerthe für m; diese mögen der Reihe nach (mit dem kleinsten Werthe beginnend) mit $m_1, m_2, m_3 \ldots$ bezeichnet werden. Wird irgend einer dieser Wurzelwerthe in die oben gegebene einfache Lösung (6) eingesetzt, so befriedigt diese Lösung die Gleichungen (1) bis (3). Um der letzten Bedingungsgleichung Genüge zu leisten, bilden wir die allgemeine Lösung für u durch

Summation aller zulässigen particulären Lösungen und erhalten so als allgemeinsten Ausdruck:

$$(8)\qquad \begin{cases} u = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} + \\ + A_2 \left(I^0_{m_2 r} - \frac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}} Y^0_{m_2 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_2^2 t} + \cdots \end{cases}$$

Die hierin vorkommenden Constanten A_1, $A_2 \ldots$ sind so zu wählen, dass die Anfangsbedingung (4):

$$u = u_0 \qquad \text{für } t = 0 \quad \text{für alle } r$$

erfüllt wird, also so zu bestimmen, dass die Gleichung besteht:

$$u_0 = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) + A_2 \left(I^0_{m_2 r} - \frac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}} Y^0_{m_2 r} \right) + \cdots$$

Auf diese sehr schwierige Constantenbestimmung soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie zur Berechnung der besprochenen Versuche durchaus nicht erforderlich ist.

Eine nähere Betrachtung der Gleichung (7) lässt erkennen, dass die aufeinanderfolgenden Wurzelwerthe m mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse zunehmen. Die Werthe der auf das erste Glied folgenden Glieder der allgemeinen Lösung (8) sind also schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit sehr klein gegenüber dem Werthe des ersten Gliedes; von einer gewissen Zeit an dürfen also diese Glieder als verschwindend klein gegenüber dem ersten Gliede betrachtet werden. Von dieser Zeit an ist der Ausdruck des Temperaturüberschusses der cylindrischen Flüssigkeitsschicht im Abstande r von der Axe:

$$u = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

Demnach ist der Temperaturüberschuss der inneren Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle und folglich auch der Temperaturüberschuss der Quecksilbermasse des innern Cylinders:

$$u_{r=r_1} = u' = A_1 \left(I^0_{m_1 r_1} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r_1} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} = A e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

Die Bestimmung der Constanten m ist so zu treffen, dass die einfache Lösung:

$$u = Ae^{-\frac{k}{\varrho c} m^2 t} \left\{ I^0_{mr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr} \right\} \tag{6}$$

auch die Grenzgleichung (3) erfüllt; die Grösse m ist also durch die Wurzeln der Gleichung bestimmt:

$$M_1 c_1 \frac{k}{\varrho c} m^2 \left(I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1} \right) = -kF_1 \left(\frac{dI^0_{mr}}{dr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} \frac{dY^0_{mr}}{dr} \right)_{r=r_1}.$$

Der rechten Seite dieser Gleichung kann eine andere Form gegeben werden. Aus der Theorie der Bessel'schen Functionen ist bekannt, dass:

$$\frac{dI^0_{mr}}{dr} = -mI^1_{mr} \quad \text{und} \quad \frac{dY^0_{mr}}{dr} = -mY^1_{mr}$$

ist, wo I^1_{mr} und Y^1_{mr} die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Gattung mit dem Index 1 bezeichnen. Nimmt man ausserdem in Betracht, dass sich die Masse M_1 durch $\pi r_1^2 H \varrho_1$ und die Fläche F_1 durch $2\pi r_1 H$ ersetzen lässt (wo ϱ_1 die Dichte des Quecksilbers und H die Länge des cylindrischen Systems bedeutet), so lässt sich die zuletzt gegebene Gleichung in die folgende Form überführen:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}$$

oder in die mehr symmetrische Form:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}. \tag{7}$$

Diese Gleichung (7) liefert unendlich viele Wurzelwerthe für m; diese mögen der Reihe nach (mit dem kleinsten Werthe beginnend) mit $m_1, m_2, m_3 \ldots$ bezeichnet werden. Wird irgend einer dieser Wurzelwerthe in die oben gegebene einfache Lösung (6) eingesetzt, so befriedigt diese Lösung die Gleichungen (1) bis (3). Um der letzten Bedingungsgleichung Genüge zu leisten, bilden wir die allgemeine Lösung für u durch

Summation aller zulässigen particulären Lösungen und erhalten so als allgemeinsten Ausdruck:

$$(8)\qquad \begin{cases} u = A_1\left(I^0_{m_1 r} - \dfrac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}}\, Y^0_{m_1 r}\right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} + \\ + A_2\left(I^0_{m_2 r} - \dfrac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}}\, Y^0_{m_2 r}\right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_2^2 t} + \cdots \end{cases}$$

Die hierin vorkommenden Constanten A_1, $A_2 \ldots$ sind so zu wählen, dass die Anfangsbedingung (4):

$$u = u_0 \qquad \text{für } t = 0 \quad \text{für alle } r$$

erfüllt wird, also so zu bestimmen, dass die Gleichung besteht:

$$u_0 = A_1\left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}}\, Y^0_{m_1 r}\right) + A_2\left(I^0_{m_2 r} - \frac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}}\, Y^0_{m_2 r}\right) + \cdots$$

Auf diese sehr schwierige Constantenbestimmung soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie zur Berechnung der besprochenen Versuche durchaus nicht erforderlich ist.

Eine nähere Betrachtung der Gleichung (7) lässt erkennen, dass die aufeinanderfolgenden Wurzelwerthe m mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse zunehmen. Die Werthe der auf das erste Glied folgenden Glieder der allgemeinen Lösung (8) sind also schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit sehr klein gegenüber dem Werthe des ersten Gliedes; von einer gewissen Zeit an dürfen also diese Glieder als verschwindend klein gegenüber dem ersten Gliede betrachtet werden. Von dieser Zeit an ist der Ausdruck des Temperaturüberschusses der cylindrischen Flüssigkeitsschicht im Abstande r von der Axe:

$$u = A_1\left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}}\, Y^0_{m_1 r}\right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

Demnach ist der Temperaturüberschuss der inneren Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle und folglich auch der Temperaturüberschuss der Quecksilbermasse des innern Cylinders:

$$u_{r=r_1} = u' = A_1\left(I^0_{m_1 r_1} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}}\, Y^0_{m_1 r_1}\right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} = A e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

Die Bestimmung der Constanten m ist so zu treffen, dass die einfache Lösung:

$$u = Ae^{-\frac{k}{\varrho c} m^2 t} \left\{ I^0_{mr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr} \right\} \tag{6}$$

auch die Grenzgleichung (3) erfüllt; die Grösse m ist also durch die Wurzeln der Gleichung bestimmt:

$$M_1 c_1 \frac{k}{\varrho c} m^2 \left(I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1} \right) = -kF_1 \left(\frac{dI^0_{mr}}{dr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} \frac{dY^0_{mr}}{dr} \right)_{r=r_1}.$$

Der rechten Seite dieser Gleichung kann eine andere Form gegeben werden. Aus der Theorie der Bessel'schen Functionen ist bekannt, dass:

$$\frac{dI^0_{mr}}{dr} = -mI^1_{mr} \quad \text{und} \quad \frac{dY^0_{mr}}{dr} = -mY^1_{mr}$$

ist, wo I^1_{mr} und Y^1_{mr} die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Gattung mit dem Index 1 bezeichnen. Nimmt man ausserdem in Betracht, dass sich die Masse M_1 durch $\pi r_1^2 H \varrho_1$ und die Fläche F_1 durch $2\pi r_1 H$ ersetzen lässt (wo ϱ_1 die Dichte des Quecksilbers und H die Länge des cylindrischen Systems bedeutet), so lässt sich die zuletzt gegebene Gleichung in die folgende Form überführen:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}$$

oder in die mehr symmetrische Form:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}. \tag{7}$$

Diese Gleichung (7) liefert unendlich viele Wurzelwerthe für m; diese mögen der Reihe nach (mit dem kleinsten Werthe beginnend) mit $m_1, m_2, m_3 \ldots$ bezeichnet werden. Wird irgend einer dieser Wurzelwerthe in die oben gegebene einfache Lösung (6) eingesetzt, so befriedigt diese Lösung die Gleichungen (1) bis (3). Um der letzten Bedingungsgleichung Genüge zu leisten, bilden wir die allgemeine Lösung für u durch

Summation aller zulässigen particulären Lösungen und erhalten so als allgemeinsten Ausdruck:

$$(8)\qquad \begin{cases} u = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \dfrac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} + \\ + A_2 \left(I^0_{m_2 r} - \dfrac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}} Y^0_{m_2 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_2^2 t} + \cdots \end{cases}$$

Die hierin vorkommenden Constanten A_1, $A_2 \ldots$ sind so zu wählen, dass die Anfangsbedingung (4):

$$u = u_0 \qquad \text{für } t = 0 \quad \text{für alle } r$$

erfüllt wird, also so zu bestimmen, dass die Gleichung besteht:

$$u_0 = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) + A_2 \left(I^0_{m_2 r} - \frac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}} Y^0_{m_2 r} \right) + \cdots$$

Auf diese sehr schwierige Constantenbestimmung soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie zur Berechnung der besprochenen Versuche durchaus nicht erforderlich ist.

Eine nähere Betrachtung der Gleichung (7) lässt erkennen, dass die aufeinanderfolgenden Wurzelwerthe m mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse zunehmen. Die Werthe der auf das erste Glied folgenden Glieder der allgemeinen Lösung (8) sind also schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit sehr klein gegenüber dem Werthe des ersten Gliedes; von einer gewissen Zeit an dürfen also diese Glieder als verschwindend klein gegenüber dem ersten Gliede betrachtet werden. Von dieser Zeit an ist der Ausdruck des Temperaturüberschusses der cylindrischen Flüssigkeitsschicht im Abstande r von der Axe:

$$u = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

Demnach ist der Temperaturüberschuss der inneren Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle und folglich auch der Temperaturüberschuss der Quecksilbermasse des innern Cylinders:

$$u_{r=r_1} = u' = A_1 \left(I^0_{m_1 r_1} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r_1} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} = A e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

Die Bestimmung der Constanten m ist so zu treffen, dass die einfache Lösung:

$$u = Ae^{-\frac{k}{\varrho c} m^2 t} \left\{ I^0_{mr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr} \right\} \tag{6}$$

auch die Grenzgleichung (3) erfüllt; die Grösse m ist also durch die Wurzeln der Gleichung bestimmt:

$$M_1 c_1 \frac{k}{\varrho c} m^2 \left(I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1} \right) = -kF_1 \left(\frac{dI^0_{mr}}{dr} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} \frac{dY^0_{mr}}{dr} \right)_{r=r_1}.$$

Der rechten Seite dieser Gleichung kann eine andere Form gegeben werden. Aus der Theorie der Bessel'schen Functionen ist bekannt, dass:

$$\frac{dI^0_{mr}}{dr} = -mI^1_{mr} \quad \text{und} \quad \frac{dY^0_{mr}}{dr} = -mY^1_{mr}$$

ist, wo I^1_{mr} und Y^1_{mr} die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Gattung mit dem Index 1 bezeichnen. Nimmt man ausserdem in Betracht, dass sich die Masse M_1 durch $\pi r_1^2 H \varrho_1$ und die Fläche F_1 durch $2\pi r_1 H$ ersetzen lässt (wo ϱ_1 die Dichte des Quecksilbers und H die Länge des cylindrischen Systems bedeutet), so lässt sich die zuletzt gegebene Gleichung in die folgende Form überführen:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} - \frac{I^0_{mr_2}}{Y^0_{mr_2}} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}$$

oder in die mehr symmetrische Form:

$$mr_1 \frac{I^0_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^0_{mr_1}}{I^1_{mr_1} Y^0_{mr_2} - I^0_{mr_2} Y^1_{mr_1}} = 2 \frac{\varrho \cdot c}{\varrho_1 c_1}. \tag{7}$$

Diese Gleichung (7) liefert unendlich viele Wurzelwerthe für m; diese mögen der Reihe nach (mit dem kleinsten Werthe beginnend) mit $m_1, m_2, m_3 \ldots$ bezeichnet werden. Wird irgend einer dieser Wurzelwerthe in die oben gegebene einfache Lösung (6) eingesetzt, so befriedigt diese Lösung die Gleichungen (1) bis (3). Um der letzten Bedingungsgleichung Genüge zu leisten, bilden wir die allgemeine Lösung für u durch

Summation aller zulässigen particulären Lösungen und erhalten so als allgemeinsten Ausdruck:

$$(8)\qquad \begin{cases} u = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \dfrac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} + \\ + A_2 \left(I^0_{m_2 r} - \dfrac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}} Y^0_{m_2 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_2^2 t} + \cdots \end{cases}$$

Die hierin vorkommenden Constanten A_1, $A_2 \ldots$ sind so zu wählen, dass die Anfangsbedingung (4):

$$u = u_0 \qquad \text{für } t = 0 \quad \text{für alle } r$$

erfüllt wird, also so zu bestimmen, dass die Gleichung besteht:

$$u_0 = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) + A_2 \left(I^0_{m_2 r} - \frac{I^0_{m_2 r_2}}{Y^0_{m_2 r_2}} Y^0_{m_2 r} \right) + \cdots$$

Auf diese sehr schwierige Constantenbestimmung soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie zur Berechnung der besprochenen Versuche durchaus nicht erforderlich ist.

Eine nähere Betrachtung der Gleichung (7) lässt erkennen, dass die aufeinanderfolgenden Wurzelwerthe m mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse zunehmen. Die Werthe der auf das erste Glied folgenden Glieder der allgemeinen Lösung (8) sind also schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit sehr klein gegenüber dem Werthe des ersten Gliedes; von einer gewissen Zeit an dürfen also diese Glieder als verschwindend klein gegenüber dem ersten Gliede betrachtet werden. Von dieser Zeit an ist der Ausdruck des Temperaturüberschusses der cylindrischen Flüssigkeitsschicht im Abstande r von der Axe:

$$u = A_1 \left(I^0_{m_1 r} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

Demnach ist der Temperaturüberschuss der inneren Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle und folglich auch der Temperaturüberschuss der Quecksilbermasse des innern Cylinders:

$$u_{r=r_1} = u' = A_1 \left(I^0_{m_1 r_1} - \frac{I^0_{m_1 r_2}}{Y^0_{m_1 r_2}} Y^0_{m_1 r_1} \right) e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} = A e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t}.$$

in welcher die Grösse η für eine Temperatur von einigen Graden über 0° den Mittelwerth 0,068 besitzt. Berechnen wir für Quecksilber und für dieselbe Temperatur (ca. 4°) diese Grösse, so erhalten wir:

$$\eta = 2{,}00,$$

d. h. einen Werth, welcher ca. 30mal grösser ist als der für nichtmetallische, durchsichtige Flüssigkeiten gefundene.

Dieses Resultat drängt zu der Annahme, dass der Vorgang der Wärmeleitung in metallischen Flüssigkeiten von wesentlich anderen Momenten abhängt als in nichtmetallischen. Während in den letzteren die Wärmeleitung in einer einfachen Uebertragung der lebendigen Kraft der bewegten ponderablen Molecüle von Schicht zu Schicht zu bestehen scheint, lässt das für Quecksilber gefundene, ganz abweichende Resultat vermuthen, dass in der Wärmeleitung innerhalb der metallischen Substanzen die von Schicht zu Schicht stattfindende innere Strahlung das wesentliche Element ist, und dass die zwischen je zwei Nachbarschichten eintretende Uebertragung der lebendigen Kraft der bewegten ponderablen Molecüle nur eine secundäre Bedeutung hat.

Damit fällt aber ein ganz neues Licht auf die bisher constatirte, jedoch vollkommen unbegriffene Analogie zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und dem electrischen Leitungsvermögen der Metalle. Es eröffnet sich jetzt die Aussicht, dass der parallele Verlauf dieser beiden Leitungsvermögen einer Erklärung zugänglich gemacht werden kann. Freilich ist vorher erst mit aller möglichen Schärfe zu untersuchen, wie weit dieser Parallelismus der beiden Leitungsvermögen geht, wo die Abweichung beginnt, und wie weit diese Abweichung reicht. Schon jetzt lässt sich erkennen, dass das Wärmeleitungsvermögen der Metalle nicht vollkommen genau proportional ihrem electrischen Leitungsvermögen ist; denn das electrische Leitungsvermögen des Quecksilbers nimmt mit steigender Temperatur ab nach der Relation: $k = k_0 [1 - 0{,}00072\, u]$,

während das electrische Leitungsvermögen mit wachsender Temperatur nach der Form:

$$k = k_0 [1 + 0{,}0055\, u]$$

zunimmt. Exactere und umfassendere Einsichten in diese Fragen sollen eingehende Untersuchungen ergeben, die ich gegenwärtig durch die Herren A. Tuchschmied und G. Weber in meinem Laboratorium ausführen lasse. Nachdem in dem Vorstehenden eine Methode entwickelt worden ist, welche die Wärmeleitungsfähigkeit fast mit derselben Genauigkeit zu messen gestattet, mit welcher man gegenwärtig die electrische Leitungsfähigkeit zu messen vermag, wird sich kein ernstliches Hinderniss der weitern Forschung auf diesem Gebiete entgegenstellen.

2. Die für steigende Temperatur gefundene Zunahme des Wärmeleitungsvermögens von Quecksilber widerspricht den Ergebnissen einer Untersuchung, welche Hr. Herwig unter dem Titel: „Das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers unabhängig von der Temperatur" vor fünf Jahren publicirt hat.[1])

Es lässt sich jedoch zeigen, dass Hr. Herwig das Endresultat seiner Versuche in fehlerhafter Weise abgeleitet hat, und dass die exacte Berechnung dieser Versuche zu genau demselben Resultate führt, das ich in den soeben besprochenen Versuchsreihen erhalten habe.

Hr. Herwig interessirte sich für die Frage: ob wohl das Wärmeleitungsvermögen der Metalle vollkommen proportional ihrem electrischen Leitungsvermögen ist, und glaubte mit Recht, dass er die sicherste Antwort auf diese Frage gewinnen könnte, wenn er untersuchte, ob das Wärmeleitungsvermögen der Metalle ebenso in linearer Weise und mit genau demselben Coëfficienten mit steigender Temperatur abnimmt, wie das electrische Leitungsvermögen. Um vollkommen genau definirbares Material zu haben, wurde flüssiges Quecksilber als Untersuchungsobject ausgewählt.

Eine ca. 1 cm weite, beträchtlich lange und vertical gestellte Glasröhre wurde mit Quecksilber gefüllt, in eine Umgebung von constanter Temperatur (sie möge mit 0° bezeichnet werden) gebracht und in ihrem obersten Querschnitte auf

1) Herwig, Pogg. Ann. **151.** p. 177. 1874.

einer höhern unveränderlichen Temperatur U dauernd erhalten. Zur Untersuchung wurde die stationäre Temperaturvertheilung benutzt, die nach Verlauf einer gewissen Zeit in dem Quecksilberstabe eintrat.

Unter der Annahme, dass die äussere Wärmeleitungsfähigkeit h der Glasröhre unabhängig von der Temperatur u ist und unter der weiteren Annahme, dass die Differentialgleichung, welche die Temperaturvertheilung über die einzelnen Stabquerschnitte im stationären Zustande angibt, die Form hat:

$$\frac{q \cdot k_0}{1 + \alpha u} \frac{d^2 u}{dx^2} = p \cdot h \cdot u,$$

wo q den Querschnitt, p den Umfang der Glasröhre bedeutet und wo $\frac{k_0}{1 + \alpha u}$ die Grösse des Wärmeleitungsvermögens des Quecksilbers für die Temperatur u darstellt, leitet Hr. Herwig folgende Beziehung ab zwischen der constanten Heiztemperatur U des obersten Querschnitts und der mittleren Temperatur $\bar{u}$ des Quecksilberstabes:

$$\frac{U}{\bar{u}} = L \sqrt{\frac{p h}{q k_0}} \cdot \frac{1 + \alpha U}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} \alpha U}},$$

worin L die Stablänge bezeichnet. Dieser Temperaturquotient ist also mit U variabel, sobald α von Null verschieden ist. Diese Beziehung benutzte nun Hr. Herwig zur numerischen Bestimmung des Coëfficienten α. Es wurden eine Reihe verschiedener Temperaturen U hergestellt und die dazu gehörigen mittleren Temperaturen $\bar{u}$ in sinnreicher Weise gemessen. Die folgenden drei Zeilen enthalten den Niederschlag der Versuchsergebnisse. Es fand sich im Mittel für:

$U = 42{,}36°$ $\bar{u} = 5{,}64°$ und somit $\frac{U}{\bar{u}} = 7{,}512$ .... (4 Versuche)

$U = 112{,}10°$ $\bar{u} = 14{,}90°$ „ „ $\frac{U}{\bar{u}} = 7{,}523$ .... (12 Versuche)

$U = 139{,}01°$ $\bar{u} = 18{,}50°$ „ „ $\frac{U}{\bar{u}} = 7{,}515$ .... (6 Versuche)

Daraus schloss Hr. Herwig: „Die Versuchsresultate der letzten Columne entscheiden mit aller Evidenz die vorliegende Frage dahin, dass das Wärmeleitungsvermögen des reinen Quecksilbers zwischen 40° und 160° völlig constant ist.“

Diese Folgerung ist unrichtig, weil sie sich auf zwei (oben genannte) Annahmen stützt, die nicht zutreffend sind. Die äussere Wärmeleitung h ist nicht unabhängig von der Temperatur, und die Differentialgleichung, welche die stationäre Temperaturvertheilung in einem Stabe angibt, dessen innere Wärmeleitungsfähigkeit mit wachsender Temperatur in linearer Weise abnimmt, hat eine andere Form als die von Hrn. Herwig gegebene Differentialgleichung. Die zuverlässigsten Untersuchungen, die bisher über den Vorgang der äussern Wärmeleitung ausgeführt worden sind, zeigen, dass das äussere Wärmeleitungsvermögen mit steigender Temperatur zunimmt und zwar in erster Annäherung der Temperatur proportional zunimmt; das äussere Wärmeleitungsvermögen h hat also für die Temperatur u den Werth $h_0(1+\beta u)$. Um die exacte Form für die Differentialgleichung zu erhalten, welche die Temperaturvertheilung im Stabe im stationären Zustande angibt, ist von der Bedingung auszugehen, die erfüllt sein muss, damit die Temperaturvertheilung eine stationäre sein kann. Wird angenommen, dass das Stabmaterial bei der Temperatur u ein inneres Wärmeleitungsvermögen gleich $k_0(1-\alpha u)$ besitzt, und wird die constante Temperatur der Umgebung des Stabes gleich Null gesetzt, so ist diese Bedingung für ein unendlich dünnes Element des Stabes mit der Abscisse x, der Temperatur u und der Dicke dx die folgende:

$$-qk_0(1-\alpha u)\frac{du}{dx}+qk_0\left(1-\alpha\left(u+\frac{du}{dx}dx\right)\right)\left(\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}dx\right)-$$
$$-ph_0(1+\beta u)u=0,$$

oder, wenn die kürzeste Form gewählt wird, die Grösse $\frac{pk_0}{qk_0}=a^2$ gesetzt wird und unendlich kleine Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}-\frac{\alpha}{2}\frac{d^2(u^2)}{dx^2}-a^2u-a^2.\beta.u^2=0.$$

Der Stab soll in dem Querschnitte $x=0$ dauernd auf der Temperatur U erhalten werden, und seine Länge L sei so beträchtlich, dass der Endquerschnitt in $x=L$ dauernd die Temperatur der Umgebung $u=0$ habe. Die Lösung der

obigen Differentialgleichung hat dann die beiden Grenzgleichungen zu erfüllen:

(2) für $x = 0$ ist $u = U$,

(3) für $x = L$ ist $u = 0$.

Wären die beiden Wärmeleitungsfähigkeiten h und k von der Temperatur unabhängig, wären also die beiden Coëfficienten α und $\beta = 0$, so würde diejenige Lösung der obigen Differentialgleichung, die zugleich auch die beiden Grenzgleichungen erfüllt, die folgende sein:

$$u = U.e^{-ax},$$

falls die Länge L so bedeutend genommen wird, dass e^{-aL} verschwindend klein ausfällt. In dem Falle, dass α und β von Null verschieden sind, geben wir der Lösung der Differentialgleichung die Form:

(4) $$u = Ae^{-ax} + Be^{-2ax}$$

und suchen die Constanten A und B so zu bestimmen, dass diese Lösung sowohl der Differentialgleichung als auch den beiden Grenzgleichungen genügt. Die Constante B verschwindet mit den Coëfficienten α und β. Sehen wir von den Gliedern ab, welche die zweiten und höheren Potenzen der beiden Coëfficienten α und β als Factoren enthalten, so erhalten wir in der angegebenen Form eine sehr angenäherte Lösung der Differentialgleichung, sobald wir:

(5) $$B = \tfrac{1}{3} A^2(\beta + 2\alpha)$$

setzen. Damit die Lösung (4) die Grenzgleichung (2) erfülle, hat die weitere Relation zu gelten:

(6) $$U = A + B.$$

Die Gleichungen (5) und (6) liefern die Mittel zur Bestimmung der Constanten A und B. Vernachlässigen wir auch hier bei dieser Constantenbestimmung die zweiten und höheren Potenzen der kleinen Grösse $(\beta + 2\alpha)$, so erhalten wir aus (5) und (6):

$$\left.\begin{aligned} A &= U\left(1 - \tfrac{1}{3}(\beta + 2\alpha)\, U\right) \\ B &= \tfrac{1}{3} U^2(\beta + 2\alpha) \end{aligned}\right\}$$

Im stationären Zustande ist also die Temperatur über den Stab (die Quecksilberröhre) hin nach folgendem Gesetze vertheilt:

(7) $$u = U\left(1 - \tfrac{1}{3}(\beta + 2\alpha)\, U\right) e^{-ax} + \tfrac{1}{3} U^2 (\beta + 2\alpha) e^{-2ax}.$$

Aus diesem Vertheilungsgesetze der Temperatur lässt sich der Werth des von Hrn. Herwig benutzten Temperaturquotienten $\frac{U}{u}$ leicht finden.

Es ist:

(8) $$\frac{U}{u} = a\, L\left(1 + \tfrac{1}{6}(\beta + 2\alpha)\, U\right).$$

Für den Fall, dass $\beta = 0$ wäre, eine Annahme, die Hr. Herwig bei der Ableitung des Werthes $\frac{U}{u}$ getroffen hat, würde also nicht die von Hrn. Herwig aus einer unexacten Differentialgleichung abgeleitete Gleichung:

$$\frac{U}{u} = a L \frac{1 + \alpha U}{\sqrt{1 + \tfrac{2}{3}\alpha U}} = a L (1 + \tfrac{2}{3}\alpha U)$$

resultiren, sondern:

$$\frac{U}{u} = a L (1 + \tfrac{1}{3}\alpha U).$$

Die Gleichung (8) zeigt: ist die Coëfficientensumme $\beta = 2\alpha \gtrless 0$, so nimmt der Temperaturquotient $\frac{U}{u}$ mit steigender Temperatur $U \begin{matrix} \text{zu} \\ \text{ab} \end{matrix}\}$; ist die Coëfficientensumme $\beta + 2\alpha = 0$, also $\beta = 0$ und $\alpha = 0$, oder aber $\alpha = -\frac{\beta}{2}$, so ist der Temperaturquotient $\frac{U}{u}$ von der Temperatur U unabhängig.

Hr. Herwig fand in seinen Versuchen diesen Quotienten unabhängig von der Temperatur und schloss daraus, dass der Coëfficient α gleich Null ist; dieser Schluss ist unzulässig, weil der Coëfficient β existirt und zwar stets einen positiven Werth besitzt. Aus den Herwig'schen Messungen darf nur geschlossen werden, dass:

$$\alpha = -\tfrac{\beta}{2} \text{ ist,}$$

dass also die innere Wärmeleitungsfähigkeit des Quecksilbers in linearer Weise (in erster Annäherung) mit steigender Temperatur zunimmt, und dass der Coëfficient dieser Zunahme gleich, oder nahezu gleich, der Hälfte des Coëfficienten der Zunahme des äussern Wärmeleitungsvermögens ist.

Nach meinen Erfahrungen und nach den Ergebnissen einer Reihe von Bestimmungen über das äussere Wärmeleitungsvermögen, die alljährlich als Uebungsaufgaben in meinem Laboratorium ausgeführt werden, hat der Coëfficient β einen Werth, welcher zwischen 0,010 und 0,0125 liegt.

Wird für β der Mittelwerth $\beta = 0{,}0110$ genommen, so folgt aus Hrn. Herwig's Messungen, dass das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers mit steigender Temperatur nach der Form:

$$k = k_0 (1 + 0{,}0055 \,.\, u)$$

zunimmt, ein Resultat, das qualitativ und quantitativ mit den Ergebnissen meiner Messungen über die Wärmeleitung im Quecksilber auf das beste übereinstimmt.

Die in dieser Abhandlung dargelegte Methode zur Bestimmung des absoluten Wärmeleitungsvermögens von Flüssigkeiten lässt sich auch mit dem besten Erfolge zur Untersuchung der Wärmeleitungsfähigkeit fester Substanzen verwenden. Ich lasse gegenwärtig die absolute Wärmeleitungsfähigkeit einer Reihe von schlecht leitenden Metallen, wie Blei, Wismuth u. s. w. nach dieser Methode messen und gleichzeitig das electrische Leitungsvermögen dieser Metalle bestimmen, um etwas sicherere Aufschlüsse über die Analogie zwischen dem Wärme- und dem electrischen Leitungsvermögen der Metalle zu erhalten, als die bisherigen Beobachtungen geliefert haben.

Auch zur Bestimmung des absoluten Wärmeleitungsvermögens der Gase leistet die Methode gute Dienste. Die Effecte der Gasströmungen, die in dem Stefan'schen Apparate nur durch erhebliche Verkleinerung der Dichte des untersuchten Gases zum Verschwinden gebracht werden können, fallen hier gänzlich fort, und es lässt sich z. B. ein etwa bestehender Einfluss des Druckes auf das Wärmeleitungsvermögen auf das schärfste untersuchen.

Zürich, im November 1879.

VIII. *Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt; von G. Kirchhoff.*

(Aus d. Monatsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 27. Octbr. 1879; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Schwingungen cylindrischer Stäbe sind theoretisch und experimentell ausführlich behandelt; die Schwingungen eines Stabes, dessen Querschnitt veränderlich ist, sind aber bisher nicht näher untersucht, obwohl sie ausser dem mathematischen Interesse, das ihnen zukommt, auch ein praktisches insofern besitzen, als bei einem Stabe, der mit einem freien Ende schwingt, die Excursionen dieses Endes viel grösser sein können, wenn nach ihm hin der Stab sich verjüngt, als wenn der Querschnitt überall derselbe ist, ohne dass die Grenze der Elasticität überschritten wird. Die folgenden Betrachtungen sollen sich auf die Transversalschwingungen eines Stabes beziehen, der ein Prisma oder einen Kegel von äusserst kleinem Winkel bildet, bei dem die Kante oder Spitze ein freies Ende ist.

Es werde zunächst ein Stab ins Auge gefasst, dessen Querschnitt in der Richtung der Länge beliebig, nur so variirt, dass alle Querschnitte unendlich klein sind, ihre Schwerpunkte in einer Geraden liegen, und ihre Hauptaxen die gleichen Richtungen haben. Ein solcher Stab kann unendlich kleine Schwingungen ausführen, bei denen die Verschiebungen immer in einer dieser beiden Richtungen geschehen; um solche Schwingungen soll es sich handeln; die Differentialgleichung derselben ist bekannt[1]) und leicht mit Hülfe des Hamilton'schen Principes abzuleiten. Die Linie, die die Schwerpunkte der Querschnitte in der Gleichgewichtslage bilden, sei die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Richtung der Hauptaxe eines Querschnitts, der parallel die Schwingungen geschehen, die Richtung der x-Axe. Es sei ferner:

1) The theory of sound by John William Strutt. 1. p. 240. London 1877.

$$q = \iint dx\,dy, \qquad k = \iint x^2\,dx\,dy,$$

die Integrationen über den dem Werthe von z entsprechenden Querschnitt ausgedehnt, ξ die Verrückung zur Zeit t dieses Querschnitts, μ die Dichtigkeit, E der Elasticitätscoëfficient der Substanz des Stabes; dann ist die lebendige Kraft:

$$\frac{\mu}{2}\int dz\,q\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2,$$

und die potentielle Energie des Stabes:

$$\frac{E}{2}\int dz\,k\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)^2,$$

die Integrationen über die Länge desselben ausgedehnt. Hieraus folgt die partielle Differentialgleichung:

$$q\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -E\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(k\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right),$$

und, wenn auf die Enden des Stabes nicht Kräfte wirken, die Arbeit leisten, d. h. wenn die Enden frei oder fest sind, folgt weiter, dass für jedes Ende:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)\delta\xi \quad \text{und} \quad k\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\,\delta\frac{\partial\xi}{\partial z}$$

verschwinden.

Beschränkt man sich auf die Betrachtung von Schwingungen, bei denen der Stab einen einfachen Ton gibt, so kann man: $\xi = u\sin\lambda t$

setzen, wo u eine Function von z, λ eine Constante bedeutet. Für u hat man dann die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$q\mu\lambda^2 u = E\frac{d^2}{dz^2}\left(k\frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

und die Bedingung, dass für jedes Ende:

$$\frac{d}{dz}\left(k\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta u \quad \text{und} \quad k\frac{d^2u}{dz^2}\,\delta\frac{du}{dz}$$

verschwinden.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist ohne Schwierigkeit anzugeben, wenn die Aenderungen des Querschnitts der Art sind, dass die Gleichung seiner Grenze eine Gleichung zwischen den beiden Variabeln:

$$\frac{x}{z^m} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z^n}$$

ist, wo m und n zwei Constanten bedeuten. Bezeichnet man durch q' und k' die Werthe von q und k für $z=1$, so ist dann:

$$q = q' z^{m+n}, \qquad k = k' z^{3m+n},$$

also die Differentialgleichung:

$$q' \mu \lambda^2 z^{m+n} u = Ek' \frac{d^3}{dz^3}\left(z^{3m+n} \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Man erhält ein Integral derselben, wenn man:

$$u = Az^h + A_1 z^{h+(4-2m)} + A_2 z^{h+2(4-2m)} + \cdots$$

setzt, h aus der Gleichung 4. Grades:

$$h(h-1)(h-2+3m+n)(h-3+3m+n) = 0,$$

und die Coëfficienten A_1, A_2 ... aus den Gleichungen:

$$\frac{q' \mu \lambda^2}{k' E} A = A_1 (h+4-2m)(h-1+4-2m)$$
$$(h-2+4-2m+3m+n)(h-3+4-2m+3m+n),$$

$$\frac{q' \mu \lambda^2}{k' E} A_1 = A_2 \big(h+2(4-2m)\big)\big(h-1+2(4-2m)\big)$$
$$\big(h-2+2(4-2m)+3m+n\big)\big(h-3+2(4-2m)+3m+n\big)$$

u. s. f. bestimmt. Wählt man für h der Reihe nach die vier Werthe 0, 1, $2-3m-n$, $3-3m-n$, gibt der willkürlichen Constanten A jedesmal einen andern Werth und bildet die Summe der so für u gewonnenen Ausdrücke, so erhält man das allgemeine Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung. Die convergenten Reihen, durch die dasselbe dargestellt ist, schreiten nach steigenden oder fallenden Potenzen von z fort, je nachdem m kleiner oder grösser als 2 ist. In dem Grenzfalle $m = 2$ ist u gleich der Summe der vier Werthe, die der Ausdruck: Az^h
annimmt, wenn man darin für h eine Wurzel der Gleichung 4. Grades:

$$h(h-1)(h+4+n)(h+3+n) = \frac{q' \mu \lambda^2}{k' E}$$

setzt und die willkürliche Constante A jedesmal anders wählt. Noch in anderen Fällen verliert die entwickelte Form des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung ihre Brauchbarkeit; dann nämlich, wenn zwei von den für h angegebenen Werthen einander gleich werden, oder wenn einer der Factoren, die bei A_1, A_2 ... in den für diese Grössen aufge-

stellten Gleichungen auftreten, verschwindet. Eine brauchbare Form des Integrals erhält man dann, indem man den Werth von m sich unendlich wenig geändert denkt; man findet es dadurch als eine Summe von Potenzreihen, die zum Theil mit $\log z$ multiplicirt sind; die Coëfficienten derselben lassen sich auch direct aus der Differentialgleichung bestimmen.

Weiter verfolgt sollen hier nur die Fälle werden, dass $m = 1$, $n = 0$ oder $m = 1$, $n = 1$ ist. In jedem dieser Fälle lässt sich die Differentialgleichung 4. Ordnung auf Differentialgleichungen 2. Ordnung reduciren und zwar auf solche, deren Integrale Bessel'sche Functionen mit reellem oder imaginärem Argumente sind.

Es sei also zunächst:

$$m = 1, \qquad n = 0;$$

das findet statt, wenn der Stab der Breite nach durch zwei parallele Ebenen, der Dicke nach durch zwei Ebenen, die einen sehr kleinen Winkel miteinander machen, begrenzt ist, wenn der Stab also ein sehr spitzes Prisma bildet. Die Differentialgleichung ist dann:

$$\frac{q'\mu\lambda^2}{k'E} z u = \frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{d^2 u}{dz^2}$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{q'\mu\lambda^2}{k'E} u = \frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^3 \frac{d}{dz}\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^2 \frac{du}{dz}.$$

Sie wird erfüllt, wenn:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz} = u\lambda \sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}},$$

und auch, wenn:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^2 \frac{du}{dz} = -u\lambda \sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}}$$

ist. Hieraus folgt, dass, wenn man:

$$z\lambda \sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}} = x$$

setzt, das allgemeine Integral der für u geltenden Differentialgleichung gleich der Summe der allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen:

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}=u, \qquad x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}=-u$$

ist. Nun seien φ und ψ gewisse Integrale der Gleichungen:

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}=\varphi, \qquad x\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d\psi}{dx}=-\psi,$$

und zwar sei:

$$\varphi=1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{(1.2)^2}+\frac{x^3}{(1.2.3)^2}+\cdots$$

$$\psi=1-\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{(1.2)^2}-\frac{x^3}{(1.2.3)^2}+\cdots,$$

φ' und ψ' seien andere Integrale derselben Gleichungen, nämlich:

$$\varphi'=\varphi\log x-2\left(\frac{x}{1^2}+\frac{x^2(1+\frac{1}{2})}{(1.2)^2}+\frac{x^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{(1.2.3)^2}+\cdot\right)$$

$$\psi'=\psi\log x+2\left(\frac{x}{1^2}-\frac{x^2(1+\frac{1}{2})}{(1.2)^2}+\frac{x^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{(1.2.3)^2}-\cdot\right);$$

der allgemeine Ausdruck von u ist dann die Summe der mit willkürlichen Constanten multiplicirten Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi'}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{d\psi'}{dx}$.

Es sei für das eine Ende des Stabes z, also auch x unendlich klein, und dieses Ende sei frei; es muss dann für ein unendlich kleines x:

$$x^3\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dx}x^3\frac{d^2u}{dx^2}$$

verschwinden; das geschieht, wenn die Coëfficienten von $\frac{d\varphi'}{dx}$ und $\frac{d\psi'}{dx}$ in dem Ausdruck von u gleich Null gemacht werden, also:

$$u=A\frac{d\varphi}{\partial x}+B\frac{d\psi}{dx}$$

gesetzt wird.

Das zweite Ende des Stabes sei so befestigt, dass für dasselbe u und $\frac{du}{dz}$, also auch $\frac{du}{dx}$, verschwinden müssen; für dieses Ende ist dann:

$$0=A\frac{d\varphi}{dx}+B\frac{d\psi}{dx} \quad \text{und} \quad 0=A\frac{d^2\varphi}{dx^2}+B\frac{d^2\psi}{dx^2},$$

also auch, nach den Differentialgleichungen, denen φ und ψ genügen:

$$0 = A\varphi - B\psi,$$

mithin: $0 = \varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dx}$ oder $0 = \frac{d\varphi\psi}{dx}$.

Dieses ist die Gleichung, aus der die Werthe von λ, d. h. die Schwingungszahlen der Töne, die der Stab geben kann, zu bestimmen sind. Zur Entwickelung derselben kann die Methode dienen, die ich bei einem allgemeineren Falle in meiner Arbeit über die Schwingungen einer kreisförmigen Platte[1]) benutzt habe. Multiplicirt man die Differentialgleichungen für φ und ψ:

mit ψ oder mit $\frac{d\psi}{dx}$ oder mit ψ

„ $-\varphi$ „ „ $\frac{d\varphi}{dx}$ „ „ φ

und addirt sie jedesmal, so erhält man:

$$2\varphi\psi = \frac{d}{dx} x\left(\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx}\right),$$

$$\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^2 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx},$$

$$x\left(\psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi \frac{d^2\psi}{dx^2}\right) + \frac{d\varphi\psi}{dx} = 0.$$

Transformirt man die letzte von diesen Gleichungen mit Hülfe der identischen Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi\psi}{dx^2} = \psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx},$$

so wird sie: $$\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} x \frac{d\varphi\psi}{dx}.$$

Daraus ergibt sich für $\varphi\psi$ die Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$4\varphi\psi = -\frac{d^2}{dx^2} x \frac{d}{dx} x \frac{d\varphi\psi}{dx},$$

und diese bestimmt die Coëfficienten B in der Gleichung:

$$\varphi\psi = 1 + B_1 x^2 + B_2 x^4 + B_3 x^6 + \cdots,$$

die aus den Ausdrücken von φ und ψ unmittelbar folgt.

1) Kirchhoff, Crelle's Journal **40.** p. 51. 1850.

Man findet:

$$B_n = -B_{n-1}n^2.2n - 1.2n,$$

also, wenn man:

$$1.2.3\ldots n \text{ durch } n!$$

bezeichnet:

$$\varphi\psi = 1 - \frac{x^2}{(1!)^2 2!} + \frac{x^4}{(2!)^2 4!} - \frac{x^6}{(3!)^2 6!} + \cdots.$$

Die Gleichung, die zur Bestimmung der Tonhöhe zu dienen hat, ist daher:

$$0 = 1 - \frac{x^2}{(2!)^2 3!} + \frac{x^4}{(3!)^2 5!} - \frac{x^6}{(4!)^2 7!} + \cdots.$$

Es sei x_0 die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung, also diejenige, die den Grundton des Stabes bedingt. Ohne Mühe findet man:

$$x_0 = 5{,}315.$$

Ist l die Länge des Stabes, so ist aber:

$$l\lambda\sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}} = x_0;$$

hieraus ist der Werth von λ für den Grundton zu berechnen. Es sei $2a$ die Dicke des Stabes an dem befestigten Ende; es ist dann:

$$\frac{q'}{k'} = \frac{3l^2}{a^2}, \quad \text{also:} \quad \lambda = 5{,}315\sqrt{\frac{E}{3\mu}}\frac{a}{l^2}.$$

Bei dem prismatischen Stabe ist daher, wie bei dem parallelepipedischen die Schwingungszahl des Grundtons mit dem Quadrat der Länge umgekehrt und mit der Dicke direct proportional, falls die Dicke an dem befestigten Ende gemessen wird. Bei gleichen Werthen von a und l ist der Grundton des prismatischen Stabes höher als der des parallelepipedischen; für den letztern ist nämlich:

$$\lambda = 3{,}516\sqrt{\frac{E}{3\mu}}\frac{a}{l^2},$$

sodass der Grundton des prismatischen Stabes ungefähr die Quinte von dem Grundton des parallelepipedischen ist.

Nun soll untersucht werden, wie gross die Excursionen des freien Endes des prismatischen Stabes sein können, wenn

die Dilatationen nirgends eine gewisse Grenze überschreiten sollen.

In irgend einem Querschnitt findet das Maximum der Dilatation an seiner Grenze in den Augenblicken statt, in denen der Stab seine grösste Ausbiegung nach der einen oder der andern Seite erlitten hat, und es ist dieses Maximum gleich dem absoluten Werthe von:

$$\frac{az}{l}\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad \text{d. i. von:} \qquad \frac{ax_0}{l^2}x\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Dieser Werth erlangt, wenn x von 0 bis x_0 wächst, ein Maximum bei einem gewissen Werthe von x, der berechnet werden soll. Man bezeichne die Werthe von φ und ψ für $x = x_0$ durch φ_0 und ψ_0; es ist dann:

$$\varphi_0 = 19{,}2772, \qquad \psi_0 = -0{,}2934,$$

und man kann setzen:

$$u = -C\left(\varphi_0\frac{d\psi}{dx} + \psi_0\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

wo C eine Constante bedeutet. Die Bedingung für das gesuchte Maximum ist daher:

$$0 = \varphi_0\frac{d}{dx}x\frac{d^3\psi}{dx^3} + \psi_0\frac{d}{dx}x\frac{d^3\varphi}{dx^3}$$

oder:

$$0 = \varphi_0\left(\frac{1}{3!} - \frac{2x}{1!\,4!} + \frac{3x^2}{2!\,5!} - \frac{4x^3}{3!\,6!} + \cdots\right)$$
$$- \psi_0\left(\frac{1}{3!} + \frac{2x}{1!\,4!} + \frac{3x^2}{2!\,5!} + \frac{4x^3}{3!\,6!} + \cdots\right).$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung und die einzige, die zwischen 0 und x_0 liegt, ist:

$$= 3{,}688.$$

Für diesen Werth von x ist:

$$x\left(\varphi_0\frac{d^3\psi}{dx^3} + \psi_0\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) = -4{,}992.$$

Für $x = x_0$ ist derselbe Ausdruck $= -4{,}333$. Bezeichnet man die grösste Dilatation durch ε, so ist daher:

$$\varepsilon = C\frac{ax_0}{l^2}4{,}992.$$

Nun sei U die grösste Elongation des freien Endes des Stabes; dann ist:

$U = C(\varphi_0 - \psi_0)$, d. h. $= C.19{,}563$, also: $U = \varepsilon \frac{l^2}{\alpha x_0} 3{,}919$,

oder bei Rücksicht auf die Gleichung, die λ bestimmt:

$$U = \varepsilon \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{3\mu}} \cdot 3{,}919 .$$

Bei den, dem Grundton entsprechenden Schwingungen des parallelepipedischen Stabes findet das Maximum der Dilatation an dem befestigten Ende statt, und zwischen diesem Maximum und der grössten Elongation des freien Endes besteht die Beziehung:

$$U = \varepsilon \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{3\mu}} .$$

Man sieht hieraus, dass bei gleichem Material und gleicher Schwingungsdauer der prismatische Stab etwa 4 mal so grosse Elongationen des freien Endes geben kann, als der parallelepipedische.

Jetzt soll in ähnlicher Weise der Fall behandelt werden, dass der Stab einen sehr spitzen Kegel bildet. Die Differentialgleichung seiner Schwingungen ist dann den vorausgeschickten Bemerkungen zufolge:

$$\frac{q' \mu \lambda^2}{k' E} z^2 u = \frac{d^2}{dz^2} z^4 \frac{d^2 u}{dz^2} .$$

Dieselbe lässt sich schreiben:

$$\frac{q' \mu \lambda^2}{k' E} u = \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} z^3 \frac{d}{dz} \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz} ,$$

und sie wird erfüllt, wenn man:

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz} = \pm u \lambda \sqrt{\frac{q' \mu}{k' E}}$$

setzt. Macht man wiederum:

$$x = z \lambda \sqrt{\frac{q' \mu}{k' E}} ,$$

so ist daher der allgemeine Ausdruck von u die Summe der allgemeinen Integrale der beiden Differentialgleichungen:

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + 3 \frac{du}{dx} = \pm u .$$

Gebraucht man die Zeichen φ und ψ, φ' und ψ' in derselben Bedeutung wie oben, so ist daher u eine lineare homogene Function von $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\psi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$, $\frac{d^2\psi'}{dx^2}$, deren Coëfficienten willkürliche Constanten sind. Aber das eine Ende des Stabes soll frei und für dasselbe z unendlich klein sein; es muss daher für ein unendlich kleines x

$$x^4\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}x^4\frac{d^2u}{dx^2}$$

verschwinden; das erfordert, dass die Coëfficienten von $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$ und $\frac{d^2\psi'}{dx^2}$ gleich Null gemacht werden. Man hat daher:

$$u = A\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Für das zweite Ende des Stabes sei wieder $u = 0$, und $\frac{du}{dx} = 0$, d. h.:

$$A\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0; \qquad A\frac{d^3\varphi}{dx^3} + B\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0;$$

es muss dann für dasselbe auch:

$$A\frac{d\varphi}{dx} - B\frac{d\psi}{dx} = 0,$$

mithin: $\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$ oder $\frac{d}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx} = 0$

sein. Aus der für $\varphi\psi$ gegebenen Entwickelung folgt aber:

$$-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx} = 1 - \frac{x^2}{1!2!3!} + \frac{x^4}{2!3!5!} - \frac{x^6}{3!4!7!} + \cdots;$$

die für das befestigte Ende zu erfüllende Gleichung ist also:

$$0 = \frac{1}{2!3!} - \frac{x^2}{1!3!5!} + \frac{x^4}{2!4!7!} - \frac{x^6}{3!5!9!} + \cdots$$

Wird wiederum die kleinste, also dem Grundtone des Stabes entsprechende Wurzel dieser Gleichung durch x_0 bezeichnet, so ergibt sich:

$$x_0 = 8{,}718.$$

Ist wieder l der Werth von z für das befestigte Ende des Stabes, so ist auch hier:

$$l\lambda\sqrt{\frac{q}{k}\frac{\mu}{E}} = x_0.$$

Bezeichnet man durch q_0 und k_0 die Werthe von q und k für $z = l$, so hat man:

$$\frac{q}{k} = \frac{q_0}{k_0} l^2.$$

Daraus folgt dann:

$$\lambda = 8{,}718 \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} \frac{1}{l^2}.$$

Auch hier ist also die Schwingungszahl des Grundtones mit dem Quadrat der Länge umgekehrt proportional, falls der Querschnitt am befestigten Ende sich gleich bleibt. Bei einem cylindrischen, einseitig befestigten Stabe, bei dem q und k die Werthe q_0 und k_0 haben, und der die Länge l besitzt, ist für den Grundton:

$$\lambda = 3{,}516 . \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} \frac{1}{l^2},$$

sodass die Schwingungszahlen der Grundtöne des conischen und des cylindrischen Stabes sich wie 8,718 : 3,516 verhalten.

Was die Dilatationen in dem conischem Stabe betrifft, so ist das Maximum derselben in irgend einem Querschnitt:

$$\frac{a x_0}{l^2} x \frac{d^2 u}{dx^2},$$

wenn a bedeutet das Maximum des Abstandes in der Richtung der Schwingungen eines Punktes im Umfange des befestigten Querschnitts vom Schwerpunkte dieses. Das Maximum hiervon findet bei einem Werthe von x statt, der der Gleichung:

$$0 = \frac{d}{dx} x \frac{d^2 u}{dx^2}$$

genügt. Für $x = x_0$ ist:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 19{,}024, \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0{,}099\,534,$$

man hat daher:

$$u = C\left(0{,}09953 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 19{,}024 \frac{d^2\psi}{dx^2}\right),$$

und jene Gleichung ist:

$$0 = 0{,}09953\left(\frac{1}{4!} + \frac{2x}{1!5!} + \frac{3x^2}{2!6!} + \cdots\right) + 19{,}024\left(\frac{1}{4!} - \frac{2x}{1!5!} + \frac{3x^2}{2!6!} - \cdots\right).$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist:

$$x = 4{,}464.$$

Für diesen Werth von x ist:

$$\frac{1}{C} x \frac{d^2u}{dx^2} = 1{,}388.$$

Für $x = x_0$ ist derselbe Ausdruck $= 0{,}9734$. Bedeutet wieder ε das Maximum der Dilatation, so hat man also:

$$\varepsilon = C \cdot \frac{a x_0}{l^2} \cdot 1{,}388.$$

Ist U die grösste Elongation des freien Enden des Stabes, so ist:

$$U = C \cdot 9{,}562,$$

daher:

$$U = \varepsilon \cdot \frac{l^2}{a x_0} \cdot 6{,}889,$$

oder, da:

$$\frac{l^2}{x_0} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}},$$

$$U = \varepsilon \frac{1}{\lambda} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} \cdot 6{,}889.$$

Für einen cylindrischen Stab, dessen befestigtes Ende dieselben Dimensionen besitzt, ist beim Grundton:

$$U = \varepsilon \frac{1}{\lambda} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}},$$

sodass bei gleichem Material und gleicher Schwingungsdauer der conische Stab etwa siebenmal so grosse Excursionen des freien Endes geben kann, als der cylindrische.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1880. ANNALEN № 8.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND X.

I. *Ueber electrische Ausdehnung; von G. Quincke.*

(Fortsetzung von p. 414.)

V. Analogieen thermischer und electrischer Ausdehnung. Doppelbrechung electrisirter Körper.

§ 27. Unwahrscheinlichkeit einer electrischen Compression. Man könnte denken, dass durch die Anziehung der entgegengesetzten Electricitäten auf beiden Condensatorbelegungen die Glasdicke verkleinert und durch diese „electrische Compression" indirect das Volumen der Thermometerkugel vergrössert würde.

Die mittlere Schicht der Glaskugel vom Radius ϱ bleibt bei der Compression ungeändert. Ist:

ε die Wanddicke der Glaskugel,

$R = \varrho - \frac{\varepsilon}{2}$ der Radius des Hohlraums der Glaskugel,

v das Volumen des Hohlraums der Glaskugel,

δ die von der electrischen Compression bewirkte Längendilatation von ε,

so wird nach der Compression ε in $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, v in $v + \Delta v$ übergehen, und man hat:

$$\varepsilon + \Delta\varepsilon = \varepsilon(1 - \delta) \qquad v = \tfrac{4}{3}\left(\varrho - \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 \pi$$

$$\Delta\varepsilon = -\varepsilon . \delta \qquad \Delta v = -2\left(\varrho - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi \Delta\varepsilon .$$

$$\frac{\Delta v}{v} = 3 \cdot \delta \cdot \frac{\varepsilon}{R} ,$$

δ müsste bei gleicher Glasdicke und gleicher electrischer Spannungsdifferenz der Belegungen dasselbe sein und unabhängig vom Radius der Thermometerkugel. Die Volumen-

dilatation $\frac{\Delta v}{v}$ dagegen müsste proportional dem Durchmesser der Thermometerkugel abnehmen, und die grösseren Thermometerkugeln bei gleicher Wandstärke und gleicher electrischer Potentialdifferenz kleinere Volumendilatation zeigen.

Meine in Tab. 5, § 6 und Tab. 10, § 11 zusammengestellten Versuche lassen jedoch keinen Einfluss des Kugeldurchmessers erkennen.

Gegen die Annahme einer electrischen Compression spricht ferner der Umstand, dass weicher und wenig elastischer Kautschuk, der zwei Tage mit Wasser in Berührung war, unter sonst gleichen Umständen etwa dieselbe Volumenänderung zeigt wie das viel elastischere und weniger leicht comprimirbare Glas. (Vgl. § 13.)

Thüringer Glas und Flintglas haben nahezu dieselbe Elasticität, wie ich oben § 26 nachgewiesen habe. Beide Glassorten müssten also bei gleichem Drucke gleiche Dilatation δ erfahren. Bei gleicher Glasdicke ist die anziehende Kraft der entgegengesetzten Electricitäten der Condensatorbelegungen um so grösser, je grösser das electrische Leitungsvermögen oder die sogenannte Dielectricitätsconstante der betreffenden Glassorte. Man hätte also für gleiche Potentialdifferenz der Belegungen bei dem sehr viel besser leitenden Thüringer Glas eine sehr viel grössere Volumenänderung für dieselbe Glasdicke erwarten sollen, als bei dem schlecht leitenden Flintglas.

Die Versuche der Tab. 5 § 6 und Tab. 10 § 11 zeigen im Widerspruche mit dieser Annahme für beide Glassorten nahezu dieselbe Volumenänderung $\frac{\Delta v}{v}$.

Dagegen trat bei derselben Glassorte sofort eine Zunahme der Volumenänderung $\frac{\Delta v}{v}$ auf, sobald man durch Temperaturerhöhung das Leitungsvermögen oder die Dielectricitätsconstante des Glases vergrösserte. (Vgl. § 22.)

Gegen die Annahme einer electrischen Compression spricht ferner das Verhältniss von Volumendilatation $\frac{\Delta v}{v}$ und Längendilatation $\frac{\Delta l}{l}$ bei Condensatoren derselben Wanddicke für

dieselbe Schlagweite oder Potentialdifferenz beider Belegungen.

Eine Vergleichung der Beobachtungen der §§ 11 und 16 zeigt, dass die Volumendilatation $\frac{\Delta v}{v}$ dreimal grösser als die Längendilatation $\frac{\Delta l}{l}$ ist, unter sonst gleichen Umständen.

Die Abweichungen von dieser Beziehung erklären sich hinreichend durch die nicht an allen Stellen gleichmässige Wanddicke der Thermometerkugeln und geringe Veränderungen der Glasmasse bei der Behandlung vor der Glasbläserlampe.

Das Resultat ist insofern überraschend, als daraus folgen würde, dass die Ausdehnung des Glases durch electrische Kräfte wie die Ausdehnung durch die Wärme nach allen Richtungen gleichmässig erfolgt, unabhängig von der Richtung der wirkenden electrischen Kräfte.

§ 28. Verhältniss electrischer Volumen- und Längendilatation. Bei dem theoretischen Interesse, welches sich an das Verhältniss der electrischen Volumen- und Längendilatation knüpft, habe ich versucht, dasselbe auch direct zu bestimmen an ein und demselben Thermometercondensator, indem ich die Kugel der früher beschriebenen Apparate durch Flintglasröhren von 1 bis 2 m Länge ersetzte.

Flintglasröhren von passender Länge und 0,3 mm bis 0,6 mm Wanddicke wurden gewogen, der äussere Durchmesser an fünf verschiedenen Stellen mit einem Tastermassstab gemessen und die Länge l bestimmt.

Das specifische Gewicht σ des Flintglases betrug 3,1856.

Aus dem Gewichte von K^{mg} und dem mittlern Durchmesser $2r$ folgt dann die mittlere Wanddicke aus der Gleichung:

$$D = \frac{K}{\pi . 2r . l . \sigma}.$$

Die Gleichmässigkeit der Wanddicke lässt sich schon aus der geraden Gestalt der Röhren beurtheilen, da sie sonst wie ein Glasfadenelectrometer (§ 18) gekrümmt erscheinen.

An die weite Flintglasröhre AE (Taf. II Fig. 18) wurde

bei A ein Capillarrohr aus Flintglas von etwa 0,5 mm Durchmesser im Lichten angeschmolzen und rechtwinklig umgebogen. 100 mm über der Biegung war in eine erbsengrosse Erweiterung der Capillarröhre ein Platindraht eingeschmolzen. Die Capillarröhre wurde an der Aussenfläche von der Biegung bis zum Platindraht mit geschmolzenem Schellack überzogen, wie bei den früher § 2 beschriebenen Thermometercondensatoren mit Kugel.

Die Flintglasröhre war am andern Ende zu einem hohlen Glasfaden ausgezogen. Auf die Capillarröhre wurde ein Kautschukschlauch geschoben, der ganze Apparat mit frisch ausgekochtem und erkaltetem Wasser gefüllt und der Glasfaden am Ende E der langen, dünnwandigen Flintglasröhre vor der spitzen Flamme der Glasbläserlampe durchgeschmolzen, sodass keine Luftblase zurückblieb.

Taf. II Fig. 18 stellt ein solches Thermometer dar. Auf das Ende C der Capillarröhre CA konnte ein Glasröhrchen mit einem durchbohrten Kork aufgeschoben werden, wie bei den kugelförmigen Thermometercondensatoren.

Um für gewöhnlich die Capillarröhre in verticaler Stellung zu erhalten, wurde das Ende A derselben in einen passend durchbohrten Kork K mit verticalem Schlitz (Taf. II Fig. 18a) geklemmt, der mit Colophoniumkitt auf einer Spiegelglasplatte befestigt war.

Das Ende E des Thermometergefässes ruhte direct auf dem Tische oder einer niedrigen Korkscheibe.

Um die Längenänderungen messen zu können, wurde auf das Ende E des Thermometergefässes ein Ring von Papier oder Leder und darüber ein aufgeschnittener Messingring geschoben. (Taf. II Fig. 18b.) Zwei Lappen zu beiden Seiten der Schnittfläche konnten durch eine Schraube gegeneinander gezogen und damit der Ring auf dem Ende E der Glasröhre festgeklemmt werden.

Der Messingring trug eine verticale Hülse H, in welcher ein rechtwinklig gebogener Glasstab von 8 mm Durchmesser eingekittet war, dessen eben geschliffenes Ende G direct auf den Anschlagstift S (Taf. II Fig. 10) des § 15 beschriebenen Oertling'schen Fühlhebels drückte.

Die horizontale Glasröhre AE schwebte bei den Messungen in einem langen Troge aus Zinkblech von 80 mm Höhe und Breite. Das feste Ende A der Glasröhre war in einen geschlitzten Kork K (Taf. II Fig. 18a) fest eingeschoben, der auf einer Bleiplatte festgekittet war. Die Bleiplatte stiess gegen schwere Gewichtsstücke im Zinktrog oder wurde mit Holzkeilen gegen die Seitenwände des Zinktrogs gedrückt und dadurch festgehalten. Das freie Ende E der Glasröhre AE wurde von dem Glasstabe G getragen, dessen horizontaler Theil auf einer kleinen Elfenbeinrolle R ruhte und 10 mm über dem Rand des Zinktroges, 60 mm über der Axe der langen Glasröhre AE lag.

Die Gabel der Elfenbeinrolle war auf demselben Holzbrette befestigt, wie die drei messingenen Fussplatten des Fühlhebels mit Loch, Schlitz und Fläche.

Das Holzbrett war mit einer Schraubzwinge gegen dieselbe Tischplatte geschraubt, welche den Zinktrog trug und direct an der Wand des Hauses befestigt war. Eine zweite Schraubzwinge hinderte eine Verschiebung der linken Seite des Zinktroges und damit des festen Endes A des Thermometergefässes.

Der Zinktrog war mit Wasser von der Temperatur des Zimmers oder einer Mischung von Schnee und Wasser gefüllt und durch Kupferdrähte mit der Erde (Gasröhren des Hauses) leitend verbunden. Das Wasser im Zinktrog bildete die äussere, Platindraht B und das Wasser im Innern des Thermometers die innere Belegung des Condensators, welcher in der § 2 (Taf. II Fig. 6) beschriebenen Weise durch einen Fallapparat mit der Leydener Batterie von sechs Flaschen verbunden werden konnte.

Volumen des Thermometergefässes und der Capillarröhre wurden, wie bei den Thermometercondensatoren mit Kugel (vgl. § 2) durch Wägung bestimmt und die Kuppe der Flüssigkeit im Thermometer mit einem horizontalen Mikroskop und Ocularmikrometer beobachtet.

Der Rand der Luftblase der beweglichen Libelle des Fühlhebels wurde mit einem verticalen Mikroskope mit Ocularmikrometer beobachtet. 49 Sc. des Ocularmikrometers,

von dem noch Zehntel geschätzt werden konnten, entsprachen 1 Sc. der Libelle oder 0,00399 mm. Der Apparat erlaubte also direct eine Verlängerung von 0,00008 mm zu messen und 0,000 008 mm durch Schätzung zu bestimmen.

Bei der grossen Empfindlichkeit der Apparate und der geringen von den electrischen Kräften bewirkten Verlängerung (die weniger als 10 Sc. des Ocularmikrometers des Mikroskopes betrug) würden die Messungen durch zufällige Störungen sehr beeinflusst sein, wenn nicht die electrische Ausdehnung des Flintglases so kurze Zeit nach der Ladung des Condensators einträte und mit der Entladung wieder verschwände. In der Uebereinstimmung der Angaben der verschiedenen Apparate glaube ich aber ebenfalls einen Beweis für die Zuverlässigkeit der Beobachtungsmethode sehen zu dürfen.

Bei dem Apparate Nr. 56 war die Flintglasröhre AE aussen auf der ganzen Länge mit einer glatten Stanniolbelegung versehen, die mit Eiweiss am Glase befestigt war.

Vor den Versuchen mit der Leydener Batterie wurde mit der 44gliedrigen Chromsäurekette durch einfache Multiplicatorausschläge die Capacität der langen Flintglascondensatoren bei 0° mit dem Thermometercondensator Nr. 17 in Eiswasser verglichen, wie dies oben §10 ausführlich beschrieben worden ist. Die in der Tab. 30 angegebenen Werthe der Capacität beziehen sich auf die Capacität des Apparates Nr. 17 als Einheit.

Tabelle 30.

Electrische Ausdehnung von Flintglas gemessen an Thermometercondensatoren mit langem Gefäss.

Nr.	Temp.	Wandstärke des Gefässes	Durchmesser des Gefässes	Länge des Gefässes	Volumen des Gefässes	Electrische Capacität	Volumenänderung $\frac{\Delta v}{v} 10^6$ bei der Electricitätsmenge 20	40	60	Längenänderung $-\frac{\Delta l}{l} 10^6$ bei der Electricitätsmenge 20	40	60
		mm	mm	mm	ccm			Vol.	Vol.		Lin.	Lin.
57	0°	0,362	10,87	790	88,00	1,210	—	1,715	2,674	—	0,515	0,819
58	0°	0,426	11,80	1072	144,3	1,632	0,355	0,976	1,339	0,108	0,309	0,455
54	15,0°	0,453	11,17	1089	126,10	1,563	0,291	0,764	1,369	0,092	0,244	0,424
59	0°	0,538	11,20	1843	104,0	1,471	—	—	0,754	—	—	0,232
56*	13,5°	0,621	12,04	1905	165,0	2,722	0,129	0,412	0,893	0,037	0,149	0,278

Es wurde die Batterie von sechs Flaschen mit 20, 40 oder 60 Funken der Maassflasche (Kugelabstand 1 mm) geladen und abwechselnd Volumen- und Längenänderung beobachtet. Die in Tab. 30 zusammengestellten Resultate sind das Mittel aus mehreren, gewöhnlich fünf Beobachtungen.

Aus diesen Versuchen folgt, dass stets sehr nahezu:

$$\frac{\Delta v}{v} = 3\frac{\Delta l}{l}$$

ist, die electrische Ausdehnung des Flintglases also nach allen Richtungen gleichmässig, wie die Ausdehnung durch die Wärme, erfolgt.

Eine grössere Uebereinstimmung der Versuche mit dieser Beziehung ist um so weniger zu erwarten, als geringe Unterschiede in der Dicke der Glaswand sofort wie bei dem Glasfadenelectrometer (§ 18) eine Krümmung und damit eine Verkürzung des Thermometergefässes herbeiführen müssen.

Bei Röhren von ungleicher Wanddicke kann sogar die indirecte Verkürzung durch Krümmung die directe electrische Verlängerung an Grösse übertreffen und ganz verdecken.

Die Schwierigkeit, Röhren von genügender Gleichmässigkeit in der Wanddicke zu erhalten, hat mich auch abgehalten, diese Versuche weiter auszudehnen und auch Thüringer Glas in ähnlicher Weise zu untersuchen.

Angenommen, die Volumenänderung des Glascylinders rühre von electrischer Compression her, so wird die mittlere Schicht des Cylinders vom Radius ϱ ungeändert bleiben. Es sei

ε die Dicke der Glaswand,

$R = \varrho - \frac{\varepsilon}{2}$ der Radius des Hohlraums,

v das Volumen des Hohlraums,

l die Länge des Hohlraums,

δ die Längendilatation, herrührend von der electrischen Compression senkrecht zur Wandfläche,

$-\mu\delta$ die Querdilatation parallel der Länge,

μ der Poisson'sche Coëfficient, dessen Werth zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ liegt, so ist:

$$\varepsilon + \Delta\varepsilon = \varepsilon(1-\delta) \qquad l + \Delta l = l(1+\mu\delta)$$
$$\Delta\varepsilon = -\varepsilon.\delta \qquad \Delta l = l.\mu.\delta$$

$$v = \left(\varrho - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi l \qquad \Delta v = \left(\varrho - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi . \Delta l . - \left(\varrho - \frac{\varepsilon}{2}\right) \pi . l . \Delta \varepsilon$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta \varepsilon}{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$= \frac{\Delta l}{l}\left(1 + \frac{1}{\mu}\frac{\varepsilon}{R}\right) = \delta\left(\mu + \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Setzt man entsprechend den Versuchen der Tabelle 30:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\text{mm}, \qquad R = 6\,\text{mm}$$

und nach Everett[1]) und Cornu[2]) für Glas $\mu = \frac{1}{4}$, so wird:

$$\frac{\Delta v}{v} = \tfrac{4}{3}\frac{\Delta l}{l},$$

während die Versuche ergeben:

$$\frac{\Delta v}{v} = 3\frac{\Delta l}{l}.$$

Es spricht dies also ebenfalls gegen die Annahme einer Ausdehnung durch electrische Compression.

Ich habe auch ähnliche Versuche bei verschiedener Schlagweite angestellt, indem in der § 11 beschriebenen Weise die Volumenänderung und mit dem Oertling'schen Fühlhebel gleichzeitig die Verlängerung gemessen wurde. Die in Tab. 31 zusammengestellten Resultate ergaben ebenfalls $\frac{\Delta v}{v} = 3\frac{\Delta l}{l}$.

Tabelle 31.

Flintglasthermometercondensator mit langem Gefäss.
(D = 0,362 mm. l = 790 mm)
in Eiswasser.

		Schlagweite in Millimetern		
		4	5	6
Volumenänderung . . .	$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 0,663	Vol. 1,117	Vol. 1,811
Längenänderung	$\frac{\Delta l}{l} 10^6 =$	Lin. 0,193	Lin. 0,443	Lin. 0,733

1) Everett, Phil. Trans. **1.** p. 369. 1868.
2) Cornu, Compt. rend. **69.** p. 335. 1869.

§ 29. Electrische Ausdehnung von Flüssigkeiten. Die von electrischen Kräften hervorgerufene Ausdehnung lässt sich nicht blos bei festen Körpern, sondern auch bei Flüssigkeiten nachweisen.

Die Flüssigkeit wurde in ein gewöhnliches Voltameter mit Platinelectroden gebracht, dessen Gasleitungsrohr durch eine verticale Capillarröhre ersetzt war.

Ein Glasrohr R von 20 bis 25 mm Durchmesser und 100 mm Höhe (Taf. II Fig. 17) erweiterte sich in seinem obern Theile zu einem Trichter, in dessen Hals die Capillarröhre eingeschliffen war. Auf das obere Ende der Capillarröhre wurde, wie bei den gewöhnlichen Thermometercondensatoren (vgl. § 2) ein kleines Glasröhrchen mit einem durchbohrten Korke aufgesteckt. Durch zwei im obern Theile des Glasrohres R eingeschmolzene Platindrähte wurde die Electricität zu zwei Platinplatten geführt von 35 mm Höhe, 11 mm Breite und 12 mm Abstand von einander. Um ein Ueberschlagen der Electricität durch die Luft oder den Schnee zu verhindern, mit dem der Apparat umgeben wurde, waren über die Platindrähte zwei dickwandige Glasröhren von 80 mm Länge geschoben, und mit Siegellack an der Aussenwand des Glasrohrs R festgekittet. Die äussere Fläche der Glasröhren war mit geschmolzenem Schellack bekleidet. Als Fuss des Apparates diente ein Korkring K, der auf einer Bleiplatte festgekittet war.

Das Voltameter wurde durch den Trichter mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllt, das Capillarrohr fest in den ausgeschliffenen Theil des Trichters eingesetzt, das Glasröhrchen am obern Ende der Capillarröhre mit derselben Flüssigkeit gefüllt, die etwa noch in der Capillarröhre zurückgebliebene Luft durch Erwärmen ausgetrieben und das ganze Voltameter in einen isolirten Metallbecher B mit schmelzendem Schnee gestellt, so dass die Zuleitungsdrähte der Platinbleche weit über den Schnee herausragten.

Kork und Glasröhrchen wurden abgenommen, nachdem die Flüssigkeit die Temperatur 0^0 angenommen hatte. Der obere Theil der Flüssigkeit im Capillarrohre wurde durch Saugen oder Erwärmen entfernt und ein horizontales Mikro-

skop mit Ocularmikrometer von passender Vergrösserung auf die Flüssigkeitskuppe im Capillarrohre eingestellt. Bei grösseren Verschiebungen wurde der Stand der Flüssigkeitskuppe direct an einer Millimeterscala abgelesen.

Wird die eine Platinplatte mit der innern, die andere mit der äussern Belegung einer Leydener Batterie leitend verbunden, so beobachtet man eine Volumenvermehrung der Flüssigkeit. Nach Entladung der Batterie geht die Flüssigkeit auf die frühere Stellung in der Capillarröhre zurück.

Bei den gut isolirenden Flüssigkeiten, wie Schwefelkohlenstoff und den ätherischen Oelen, bleibt die Batterie Minuten lang geladen, und die Volumenvermehrung ebenso lange bestehen. Die Volumenänderung tritt aber allmählich ein und verschwindet auch langsam nach der Entladung der Batterie.

Bei den besser leitenden Flüssigkeiten, wie Glycerin, Alkohol und Wasser, steigt die Flüssigkeitskuppe fast momentan. Die Leydener Batterie ist aber auch sofort entladen.

Dieselbe Menge positiver oder negativer Electricität in der Batterie gibt nahezu dieselbe Volumenänderung der Flüssigkeit. Die Verschiebung der Flüssigkeitskuppe oder die Volumendilatation ist nahezu proportional mit $\frac{q^2}{s}$, wenn q die Anzahl der Funken der Maassflasche, s die Anzahl der Leydener Flaschen oder die Oberfläche der Batterie bedeuten.

Bei den gut isolirenden Flüssigkeiten kann man die Platinelectroden des Voltameters statt mit den Belegungen der Leydener Batterie direct mit den Electroden einer Holtz'schen Maschine verbinden. Bei den gut leitenden Flüssigkeiten konnte ich für diese Anordnung keine Volumenänderung nachweisen, weil sich die Electricität zu schnell durch die Flüssigkeit entlud. Ich zweifle aber nicht, dass sie mit einer ergiebigeren Electricitätsquelle, als die von mir benutzte Holtz'che Maschine war, nachzuweisen sein wird.

Bei zu starken Ladungen der Leydener Batterie geht zwischen den Platinelectroden des Voltameters ein Funken über und zertrümmert den Apparat. Es konnten daher die

verschiedenen Flüssigkeiten nicht alle in demselben Apparate untersucht werden.

In der folgenden Tabelle ist das Volumen des benutzten Apparates in Cubikcentimetern bei jeder Flüssigkeit angegeben. Im allgemeinen zeigt ein kleinerer Apparat bei derselben Ladung der Leydener Batterie für dieselbe Flüssigkeit eine grössere Volumendilatation. Dies Verhalten erklärt sich durch die grösseren electrischen Kräfte, denen die einzelnen Flüssigkeitstheilchen in dem kleineren Apparate ausgesetzt sind.

Für jede Flüssigkeit sind in Tab. 32 in der ersten Horizontalreihe die Verschiebungen der Flüssigkeitskuppe in Millimetern oder Scalentheilen des Beobachtungsmikroskops gegeben und darunter die Volumenänderungen in Milliontel des ursprünglichen Volumens. Die Temperatur war, wenn es nicht anders angegeben ist, stets 0^0.

Tabelle 32.

Voltameter mit Platinelectroden.
Volumenänderung durch Entladung der Leydener Batterie.

	$s = 6$			$s = 3$		
$q =$	± 20	± 40	± 60	± 10	± 20	± 30
	Schwefelkohlenstoff (58,5 ccm).					
$\Delta v =$	mm 4,2	mm 18	—	—	—	—
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 5,23	Vol. 22,43	—	—	—	—
	Schwefelkohlenstoff (116,7 ccm). Kupferelectroden.					
$\Delta v =$	mm 1,0	mm 4,07	mm 12,20	—	—	mm 7,6
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 0,74	Vol. 3,00	Vol. 9,01	—	—	Vol. 5,61
	Alkohol (21,6 ccm).					
$\Delta v =$	mm 2,01	mm 10,52	mm 15,0	mm 1,77	mm 6,77	mm 12,87
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 6,80	Vol. 35,50	Vol. 50,63	Vol. 5,97	Vol. 22,85	Vol. 43,44
	Alkohol (48,79 ccm).					
$\Delta v =$	mm 1,66	mm 9,08	mm 22,4	mm 1,25	mm 5,29	mm 12,35
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 2,48	Vol. 13,56	Vol. 33,47	Vol. 1,86	Vol. 7,91	Vol. 18,45

$q =$	$s = 6$ ± 20	± 40	± 60	$s = 3$ ± 10	± 20	± 30
Steinöl (21,5 ccm).						
$\Delta v =$	mm 5,66	—	—	mm 3,56	—	—
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 19,28	—	—	Vol. 12,09	—	—
Terpentinöl (21,5 ccm).						
$\Delta v =$	mm 0,5	mm 12,5	—	—	—	—
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 1,70	Vol. 42,45	—	—	—	—
Glycerin (60 ccm).						
$\Delta v =$	Sc. 8,55	Sc. 46,2	Sc. 97,9	Sc. 51,8	Sc. 26,05	Sc. 51,12
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 0,59	Vol. 3,19	Vol. 6,76	Vol. 0,36	Vol. 1,80	Vol. 3,53
Wasser bei 0° (68,4 ccm).						
$\Delta v =$	Sc. −0,6	Sc. −1,6	Sc. −5,0	Sc. −0,2	Sc. −1,0	Sc. −2,87
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. −0,03	Vol. −0,09	Vol. −0,28	Vol. −0,01	Vol. −0,05	Vol. −0,16
Wasser + Spur Salzsäure bei 0°.						
$\Delta v =$	Sc. −1,05	Sc. −5,5	Sc. −11,45	Sc. −0,5	Sc. −2,95	Sc. −7,5
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. −0,06	Vol. −0,30	Vol. − 0,63	Vol. −0,03	Vol. −0,16	Vol. −0,41
Wasser mit 0,124 Proc. Salzsäure bei 0°.						
$\Delta v =$	Sc. −0,62	Sc. −5,12	Sc. −13,57	Sc. −0,08	Sc. −1,44	Sc. −5,72
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. −0,03	Vol. −0,36	Vol. − 0,75	Vol. −0,01	Vol. −0,08	Vol. −0,31
Wasser bei 8°.						
$\Delta v =$	Sc. 1,2	Sc. 4,2	Sc. 11	Sc. 1,28	Sc. 2,85	Sc. 8,82
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 0,07	Vol. 0,23	Vol. 0,61	Vol. 0,07	Vol. 0,16	Vol. 0,49
Wasser + Spur Salzsäure bei 9,8°.						
$\Delta v =$	Sc. 2,42	Sc. 7,65	Sc. 15,2	Sc. 1,18	Sc. 4,5	Sc. 9,45
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 0,13	Vol. 0,42	Vol. 0,84	Vol. 0,06	Vol. 0,25	Vol. 0,52
Wasser mit 0,124 Proc. Salzsäure bei 13,2°.						
$\Delta v =$	Sc. 1,25	Sc. 10,2	Sc. 24,4	Sc. 0,92	Sc. 2,05	Sc. 10,05
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	Vol. 0,07	Vol. 0,56	Vol. 1,35	Vol. 0,05	Vol. 0,11	Vol. 0,55

Man könnte geneigt sein, den Grund der Volumenvermehrung in einer von der electrischen Entladung hervorgerufenen Erwärmung zu suchen, um so mehr, als destillirtes Wasser von 0° eine Volumenverminderung, destillirtes Wasser von 8° eine Volumenvermehrung zeigt.

Gegen diese Annahme spricht aber einmal die lange Dauer der Volumenänderung bei isolirenden Flüssigkeiten und dann die merkwürdige Thatsache, dass die Volumenänderung (Abnahme oder Zunahme) vermehrt wird durch Zusatz von Säuren zum destillirten Wasser, welche das electrische Leitungsvermögen der Flüssigkeit um mehr als das Tausendfache vermehren.[1]) Würde die Voltameterflüssigkeit erwärmt, wie bei der gewöhnlichen metallischen Leitung der Electricität, so wäre bei einer bedeutenden Abnahme des Leitungswiderstandes auch eine bedeutende Abnahme der entwickelten Wärmemenge oder der Temperaturerhöhung[2]) zu erwarten.

Ganz unhaltbar wird aber diese Anschauung, sobald die electrischen Kräfte eine Volumenabnahme, die Erwärmung eine Volumenzunahme herbeiführen.

§ 30. Eine electrische Contraction habe ich bei Rüböl, Mandelöl und Olivenöl nachweisen können.

Die fetten Oele waren wie die früher (§ 29) untersuchten Flüssigkeiten in einem Voltameter mit Platinelectroden enthalten, das bis zum Trichterhals mit Schnee umgeben war. Die fetten Oele besitzen bei 0° eine sehr geringe Fluidität und erfordern zur Verschiebung in einer engen Capillarröhre bedeutende Druckkräfte. Um daher kleine Veränderungen des Flüssigkeitsvolumens beobachten zu können, wurde die Capillarröhre mit Alkohol gefüllt (wie bei den Beobachtungen mit Glycerin) und dann auf das bis zum Trichterhals mit dem fetten Oele gefüllte Voltameter aufgesetzt, ohne dass eine Luftblase an der Trennungsstelle beider Flüssigkeiten zurückblieb.

Werden die Platinelectroden mit den Belegungen der

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 6. 1878.
2) Riess, Reibungselectricität I. § 470.

Leydener Batterie verbunden, so erfolgt häufig zuerst eine kleine Volumenzunahme (bis zu 5 Sc.) und dann eine starke Volumenabnahme. Bei der Entladung der Leydener Batterie geht die Flüssigkeitskuppe in der Capillarröhre sofort, aber langsam, nach ihrer früheren Stellung zurück. Die kleine Volumenzunahme ist sehr veränderlich und mag von der Erwärmung besser leitender Staubtheilchen, die im Innern des fetten Oeles suspendirt waren, hergerührt haben.

Uebrigens isolirten die fetten Oele vortrefflich, und blieb die Leydener Batterie Minuten lang geladen. Schon bei verhältnissmässig kleinen Ladungen der Leydener Batterie geht zwischen den Platinelectroden ein Funken über, und der Apparat wird zertrümmert.

Die Oeltheilchen werden von der ersten Platinelectrode mit freier Electricität abgestossen, und es findet eine Electricitätsleitung durch Ueberführung der Flüssigkeitstheilchen[1]) statt, die in dem zähen Oele mit Wirbelbewegungen verbunden sein muss. Je nach der Art dieser Flüssigkeitsbewegungen sind die electrischen Kräfte im Innern des fetten Oeles verschieden gross, und eine grosse Uebereinstimmung der Resultate der einzelnen Versuche ist daher nicht zu erwarten.

Wird die zweite Platinelectrode des Voltameters durch einen empfindlichen Spiegelmultiplicator zur Erde abgeleitet, so beobachtet man eine constante Ablenkung der Multiplicatornadel, wie bei den Thermometercondensatoren aus Thüringer Glas oder Flintglas (§ 5).

Positive und negative Electricitäten in der Leydener Batterie erzeugen entgegengesetzte Ablenkung der Multiplicatornadel, aber nahezu dieselbe Volumenabnahme der Flüssigkeit.

In der folgenden Tabelle sind in der ersten Horizontalreihe die Verschiebungen der Flüssigkeitskuppe im Capillarrohr, in der zweiten Horizontalreihe die daraus berechneten Volumenänderungen der Flüssigkeit in Milliontel des ursprünglichen Volumens gegeben; in der dritten Horizontalreihe die

1) Faraday, Carrying discharge, Exp. res. § 1562. 1838.

Zeit, in welcher die angegebene Volumenänderung eintrat; in der vierten Horizontalreihe die Stromstärke im Multiplicator in Scalentheilen der Spiegelablesung.

Tabelle 33.

Volumenabnahme der fetten Oele bei Entladungen der Leydener Batterie.

	q =	$s = 6$ ± 20	$s = 6$ ± 30	$s = 3$ ± 10
Rüböl mit Alkoholsäule (48,8 ccm).				
Volumenabnahme . . .	Δv	Sc. −90,5	Sc. −86	—
Volumendilatation . . .	$\frac{\Delta v}{v} 10^6$	Vol. −18,24	Vol. −17,33	—
Zeit in Secunden . . .		150″	85″	—
Stromstärke		39 Sc.	83 Sc.	—
Mandelöl mit Alkoholsäule (48,8 ccm).				
Volumenabnahme . . .	Δv	Sc. −34	Sc. −98	Sc. −24
Volumendilatation . . .	$\frac{\Delta v}{v} 10^6$	Vol. − 6,85	Vol. −17,94	Vol. − 4,84
Zeit in Secunden . . .		100″	128″	70″
Stromstärke		26 Sc.	60 Sc.	—

Die Volumenabnahme tritt um so schneller ein und ist um so grösser, je grösser die Dichtigkeit der freien Electricität auf der innern Belegung der Leydener Batterie ist. Abgesehen vom Vorzeichen, scheint die Volumenänderung der fetten Oele durch electrische Kräfte denselben Gesetzen, wie bei den andern schlecht leitenden Flüssigkeiten zu folgen.

§ 31. Volumenänderung des Aethers. Anomalien der electrischen Ausdehnung.

Geringe Verunreinigungen einer Flüssigkeit können bekanntlich das electrische Leitungsvermögen derselben beträchtlich ändern. Das bekannteste Beispiel dafür ist destillirtes Wasser (vgl. § 29).

Aehnliche Aenderungen des electrischen Leitungsvermögens zeigen auch fette Oele, Aether und andere schlecht leitende Flüssigkeiten.

Wird dieselbe Flüssigkeit in ähnlichen Apparaten untersucht, die in derselben Weise mit den Belegungen der Leydener Batterie verbunden werden, so bleibt die Leydener

Batterie bald mehrere Minuten, bald nur wenige Secunden oder noch kürzere Zeit geladen. Mit der Aenderung der Entladungszeit ändert sich dann aber auch stets die Volumenänderung der Flüssigkeit.

So zeigte schlecht leitendes Olivenöl in einem Voltameter mit Platinelectroden eine Volumenabnahme beim Electrisiren; gut leitendes Olivenöl (das aus derselben Flasche entnommen und also verunreinigt war) in einem Voltameter mit Kupferelectroden eine Volumenzunahme.

Am auffallendsten waren die Verschiedenheiten bei Aether, der sogar in demselben, scheinbar ungeänderten Apparat an verschiedenen Tagen verschiedene Volumenänderungen zeigte. Bei guter Isolation und langer Entladungszeit der Leydener Batterie eine Volumenabnahme; bei schlechter Isolation und kurzer Entladungszeit eine Volumenzunahme.

Dabei ist freilich zu bemerken, dass im erstern Falle das Rohr des Voltameters nach Beendigung der Versuchsreihe einen kleinen Sprung zeigte, durch welchen Flüssigkeit beim Electrisiren der Platinelectroden nach aussen gegangen sein könnte.

Auch der Aether zeigte unter Umständen zuerst eine kleine Volumenabnahme und später eine grosse Volumenzunahme, ähnlich wie bei den fetten Oelen, nur in entgegengesetztem Sinne.

Des Beispiels wegen gebe ich einige Versuchsreihen in Tabelle 34.

Tabelle 34.

Aether bei 0° (48,8 ccm).

	$s = 6$		$s = 3$		
$q =$	± 10	± 20	± 5	± 10	± 15
Δv	mm −18,6	mm −31,75	mm −28,9	mm −36,7	—
$\frac{\Delta v}{v}16^{q}$	Vol. −27,8	Vol. −47,45	Vol. −43,19	Vol. −54,86	—
Zeit	120″	120″	95″	120″	—
Stromstärke	266 Sc.	436 Sc.	260 Sc.	423 Sc.	—

q =	$s = 6$ ± 10	$s = 6$ ± 20	$s = 3$ ± 5	$s = 3$ ± 10	$s = 3$ ± 15
Ausgekochter Aether bei 0° (16,61 ccm). Kupferelectroden, Capillarrohr angeschmolzen.					
Δv	Sc. +1,95	Sc. 15,25	—	Sc. 5,11	Sc. 28
$\frac{\Delta v}{v} 10^6$	Vol. 0,49	Vol. 3,83	—	Vol. 1,28	Vol. 7,03
Zeit	8″	9″	—	8″	—

Bei einem andern Apparat mit Platinelectroden von 23 ccm Hohlraum wurde die innere Belegung der Leydener Batterie von 6 Flaschen mit der Holtz'schen Maschine und der einen Platinelectrode des Voltameters, die andere Platinelectrode mit der Erde leitend verbunden. Die äussere isolirte Belegung der Leydener Batterie war in gewöhnlicher Weise mit der Maassflasche verbunden, deren Kugeln 1 mm Abstand hatten.

Beim Drehen der Holtz'schen Maschine entlud sich ein Theil der zugeführten Electricität sofort durch den Aether; der andere Theil sammelte sich in der Batterie an und entsprach einer bestimmten Anzahl Funken der Maassflasche. Der Spannungsunterschied der Belegungen war also grösser, als der Funkenzahl der Maassflasche entsprach. Der Aether zeigte Volumenzunahme, und es war die Volumendilatation:

	bei 20 Funken	bei 40 Funken
$\frac{\Delta v}{v} 10^6 =$	17,33 Vol.	64,46 Vol.

Bei $\frac{\Delta v}{v} 10^6 = 121{,}5$ Vol. wurde der Apparat mit Funkenentladung zertrümmert.

Es scheint, dass bei diesen Flüssigkeiten verschiedene Wirkungen der electrischen Kräfte gleichzeitig auftreten, die in verschiedener Weise mit dem electrischen Leitungsvermögen der Flüssigkeiten sich ändern: eine (von der electrischen Erwärmung herbeigeführte?) Volumenzunahme und eine electrische Contraction, wie sie die fetten Oele zeigen.

§ 32. Gase zeigen unter dem Einfluss electrischer Kräfte keine Volumenänderung.

Die Gase wurden in eine Faraday'sche Luftflasche (Taf. II Fig. 19) gebracht, deren innere Kugel 73,5 mm Durchmesser hatte. Die äussere Kugelschale, von 123 mm Durchmesser im Innern, wurde von zwei dickwandigen messingenen Halbkugeln gebildet, ähnlich wie die sogenannten Magdeburger Halbkugeln für den bekannten Luftpumpenversuch von Otto von Guericke. In die conische Oeffnung O an der Kuppe der obern Halbkugel war von innen eine Messinghülse eingeschliffen, in welcher ein Rohr aus gut isolirendem Glase und ein Messingdraht mit Schellack luftdicht eingekittet waren. An das untere Ende des Messingdrahtes war die innere Kugel der Luftflasche, auf das obere Ende eine kleine Messingkugel, der Knopf der Luftflasche aufgeschraubt. Die conische Messinghülse trug oben ein Schraubengewinde und konnte durch eine ausserhalb der Halbkugel gelegene Schraubenmutter M fest gegen die Schlifffläche der Halbkugel gedrückt werden.

Im obern Theile der obern und im untern Theile der untern Halbkugel waren zwei Bleiröhren von 5 mm Durchmesser angelöthet, welche in Messinghähne endeten. Durch diese Bleiröhren konnte der Hohlraum zwischen den Kugelflächen der Luftflasche mit verschiedenen Gasen gefüllt werden.

In eine zweite conische Oeffnung O_2 der obern Halbkugel war von aussen ein Messingröhrchen eingeschliffen, und in dieses eine horizontale Capillarröhre eingekittet, welche in eine U-förmige weitere und oben offene Glasröhre G endete. Die Schlifflächen schlossen mit etwas Fett vollkommen luftdicht. Der ganze Apparat stand auf drei angelötheten Füssen in einem grossen, in der Zeichnung nur durch punktirte Linien angedeuteten, Metallgefäss mit schmelzendem Schnee, aus welchem der Knopf der Luftflasche und die aussen mit geschmolzenem Schellack bekleidete Glasröhre herausragten.

Das oben offene Glasrohr am Ende der Capillarröhre und ein Theil der letzteren enthielt Alkohol, dessen Kuppe mit einem Mikroskop und Ocularmikrometer beobachtet wurde. 1 Sc. des Ocularmikrometers, von dem noch Zehntel

geschätzt werden konnten, entsprach 0,000 000 003 des Hohlraums zwischen den Kugelflächen, welche vollkommen voneinander isolirt waren, da die Glasröhre auch im Innern des Hohlraums bis zur innern Messingkugel mit geschmolzenem Schellack bekleidet war.

Obwohl die Temperatur lange Zeit constant blieb, so war der Apparat doch so empfindlich, dass kleine Schwankungen des Barometerstandes, wie sie die Aenderung der Windstärke vor dem Fenster mit sich brachte, die Alkoholkuppe im Capillarrohr fortwährend hin- und herschoben. Diese Schwankungen wurden durch den hydrostatischen Druck der Alkoholsäule im Capillarrohr compensirt, indem diesem Capillarrohr durch die Stellschrauben des Brettes, auf welchem der Eisbehälter und somit der ganze Apparat ruhte, eine passende Neigung gegen die Horizontale gegeben wurde.

Die eine Messingkugel wurde mit der innern, die andere mit der äussern Belegung der Leydener Batterie von sechs Flaschen verbunden, welche mit ± 20 oder ± 40 Funken der Maassflasche geladen war. Bei noch grösseren Electricitätsmengen entlud sich die Leydener Batterie durch den Hohlraum der Luftflasche.

Bei der Verbindung der Belegungen der Luftflasche mit den Belegungen der Leydener Batterie konnte ich keine Volumenänderung bemerken, wenn die Luftflasche mit trockener atmosphärischer Luft oder Leuchtgas gefüllt war.

Ist eine solche electrische Volumenänderung vorhanden, so muss sie weniger als $\frac{1}{3\,000\,000\,000}$ des ursprünglichen Luftvolumens betragen.

Bei Kohlensäure habe ich für die Electricitätsmenge 40 in der Leydener Batterie von 6 Flaschen eine Contraction von 0,000 000 000 5 des ursprünglichen Volumens beobachtet. Bei grösserer Dichtigkeit sprang ein Funken im Innern der Luftflasche über.

Bei der geringen Grösse der Volumenänderung und der Schwierigkeit, zufällige Fehler auszuschliessen, möchte ich

auf das Resultat dieser einen Versuchsreihe kein zu grosses Gewicht legen.

§ 33. Electrische Durchbohrung von Glas. Electrische Kräfte wirken, wie aus den vorstehend beschriebenen Versuchen (§ 27—31) hervorgeht, ähnlich, aber in anderer Weise wie die Zufuhr von Wärme. Im allgemeinen werden die Stoffe dadurch ausgedehnt.

Wie man durch ungleiche Zufuhr von Wärme an den verschiedenen Stellen eines Körpers denselben zersprengen kann, so kann man dies auch durch ungleiche Einwirkung electrischer Kräfte.

Gleichmässige Ausdehnung durch Erwärmung oder gleichmässige Ausdehnung durch electrische Kräfte zersprengen Glas nicht, wohl aber ungleiche thermische oder electrische Ausdehnung, und zwar um so eher, je grösser die dadurch im Innern des Glases hervorgerufenen electrischen Spannungen sind.

Was von Glas gilt, gilt auch von anderen Substanzen. Dicke Massen und solche, welche Wärme oder Electricität schlecht leiten, müssen eher zersprengt werden, als dünne Massen und solche, welche Wärme oder Electricität gut leiten.

Ist der Zusammenhang der materiellen Theilchen unterbrochen und die Unterbrechungsstelle mit Gasen gefüllt, in denen die electrische Schlagweite grösser ist, als in festen Körpern oder Flüssigkeiten unter sonst gleichen Umständen, so gleichen sich die Electricitäten an dieser Stelle zwischen den Electroden oder den Belegungen mit Funkenentladung aus, die Substanz ist „von dem electrischen Funken durchgeschlagen."

Die ungleiche electrische Ausdehnung kann dabei durch Inductionsströme oder Schwankungen der electrischen Kräfte beim Auftreten des electrischen Zustandes wesentlich gefördert werden.

Damit steht die Erfahrung in Uebereinstimmung. Kleine Mengen Oel auf Metallelectroden in Wasser und wässerigen

Salzlösungen können, wie Riess[1]) gefunden hat, die Funkenentladung hervorrufen, die ohne Oel ausbleibt.

Nach den Versuchen von Holtz[2]) gelingt die Durchbohrung einer Glasplatte am leichtesten, wenn eine dicke Glasröhre mit einem spitzen Stahldraht im Innern auf die Glasplatte fest aufgekittet wird. Wird der Metalldraht mit einem Leiter hoher electrischer Spannung (Conductor der Electrisirmaschine) verbunden, und die andere Seite der Glasplatte zur Erde abgeleitet, so werden besonders die Theile der Platte unter dem Metalldraht starken electrischen Kräften ausgesetzt und stark ausgedehnt. Der übrige Theil der Glasplatte, der mit der aufgekitteten Röhre einen Glasblock bildet, kann nicht folgen, und die Glasplatte wird zersprengt.

Es ist auch verständlich, dass der Erfolg ausbleibt, wenn Luftblasen im Kitt zwischen Glasplatte und dicker Glasröhre ein Ausweichen der electrisch dilatirten Glasmasse gestatten.

§ 34. Aenderung des Brechungsexponenten durch electrische Kräfte. Ich habe im Jahre 1862 folgende Versuche angestellt.

Eine von den Herren C. A. Steinheil Söhne in München angefertigte vollkommen homogene Crownglasplatte von 5,8 mm Dicke wurde auf ihren rechteckförmigen Seitenflächen von 40 mm Höhe und 101,4 mm Länge mit Stanniolstreifen belegt, wie eine gewöhnliche Franklin'sche Tafel. Die Stanniolstreifen hatten 95,2 mm Länge und 29,6 mm Höhe. Die ganzen Seitenflächen, besonders der unbelegte Theil derselben, waren sorgfältig mit geschmolzenem Siegellack bekleidet. Unter dem Siegellack lagen auf den Stanniolbelegungen 2 Kupferplatten, von denen 2 angelöthete und mit Guttapercha bekleidete Kupferdrähte durch die Siegellackkittung nach aussen führten. Die 5,8 mm breiten Flächen der Glasplatte waren von Siegellack frei, polirt und mit genau planparallelen Flächen versehen. Diese Franklin'sche Tafel

1) Riess, Berl. Monatsber. p. 250. 1856; Abhdl. zur Reibungselectr. p. 123. 1867.

2) Holtz, Pogg. Ann. **130**. p. 118. 1867.

konnte bis zu einer Schlagweite von 34 mm geladen werden, ohne dass Funken zwischen den Stanniolbelegungen übersprangen.

Diese Franklin'sche Tafel wurde in den Interferenzapparat eingeschaltet, den ich in meinen optischen Experimentaluntersuchungen § 80[1]) beschrieben habe. Bei diesem Apparat interferiren 2 von 2 gleich dicken Planparallelgläsern reflectirte Strahlenbündel und bilden ein reines Spectrum mit Fraunhofer'schen Linien, das von dunklen Interferenzstreifen durchzogen ist.

Der Abstand der beiden interferirenden Strahlenbündel wurde durch passende Wahl des Einfallswinkels an den dicken Glasplatten so gewählt, dass das eine Strahlenbündel möglichst nahe der positiven, das andere möglichst nahe der negativen Belegung im Glase der Franklin'schen Tafel lag.

Das Einschalten der Franklin'schen Tafel in den Interferenzapparat verschob zwar die Interferenzstreifen etwas wegen kleiner Unvollkommenheiten des Glases, doch blieben die Streifen noch vollkommen scharf und deutlich sichtbar.

Bei Verbindung der Belegungen mit Conductor und Reibzeug einer kräftigen Electrisirmaschine oder mit den Belegungen einer grössern bis 34 mm Schlagweite geladenen Leydener Batterie konnte keine Verschiebung der Interferenzstreifen beobachtet werden.

Wenn der Brechungsexponent des Glases in der Nähe der positiven Belegung von dem des Glases in der Nähe der negativen Belegung um $\frac{1}{2\,000\,000}$ verschieden gewesen wäre, so hätten sich die Interferenzstreifen nach dem rothen oder violetten Ende des Spectrums um $^1/_{10}$ Streifenbreite verschieben müssen. Die Empfindlichkeit des Apparates erlaubte aber noch geringere Verschiebungen wahrzunehmen.

Aehnliche negative Resultate erhielt ich mit einem Jamin'schen Interferenzapparat, bei welchem die von den dicken Glasplatten reflectirten interferirenden Strahlenbündel breite farbige Interferenzstreifen erzeugten.

Ebenso wenig wurde eine Verschiebung der Interferenz-

1) Quincke, Pogg. Ann. **182.** p. 53 u. Taf. II Fig. 13. 1867.

streifen erhalten beim Electrisiren der Franklin'schen Tafel, wenn diese um 90° gedreht wurde, und das eine Strahlenbündel zwischen den beiden Stanniolbelegungen lag, das andere ausserhalb der Belegungen am Rande des Glases, wo dieses nahezu unelectrisch war.

Die Franklin'sche Tafel wurde ferner zwischen gekreuzte und mit horizontalem Sonnenlicht beleuchtete Nicol'sche Prismen geschaltet, so dass das Licht eine Strecke von 95 mm zwischen den Stanniolbelegungen zu durchlaufen hatte. Obwohl die Siegellackkittung mit Sorgfalt aufgelegt war, war doch eine geringe Spannung im Glase zurückgeblieben und das Gesichtsfeld dadurch erhellt. Durch gleichzeitiges Einschalten einer Glimmerplatte von $\frac{\lambda}{4}$ in geeigneter Lage und Drehen des analysirenden Nicol'schen Prismas konnte die Dunkelheit wieder hergestellt werden.

Es war keine Aenderung der Helligkeit zu bemerken, wenn die Stanniolbelegungen mit Conductor und Reibzeug einer kräftigen Electrisirmaschine oder mit den Belegungen einer bis zu 34 mm Schlagweite geladenen Leydener Batterie leitend verbunden wurden.

Das auf die Franklin'sche Tafel auffallende Licht konnte dabei in einem beliebigen Azimuth polarisirt sein.

Wurde zwischen die Franklin'sche Tafel und das analysirende Nicol'sche Prisma ein empfindlicher Babinet'scher Compensator[1]) eingeschaltet, so blieb der dunkle Streifen im Compensator ebenfalls ungeändert.

Das Glas der Franklin'schen Tafel wurde also bei dem Electrisiren der Belegungen nicht doppeltbrechend.

Aehnliche Versuche mit polarisirtem Licht und gleichem negativen Resultat hat 1876 J. E. H. Gordon[2]) an einer grössern Franklin'schen Tafel erhalten mit einer Glasdicke von 20 mm und Stanniolbelegungen von 400 mm Länge, welche mit einem Inductionsapparat bis zu 300 mm Schlagweite geladen werden konnte, und 1877 J. J. Mackenzie[3])

1) Quincke, Pogg. Ann. **127.** p. 211. 1866.
2) Gordon, Phil. Mag. (5) **2.** p. 203. 1876.
3) Mackenzie, Wied. Ann. **2.** p. 356. 1877.

an einer Franklin'schen Tafel von 161 mm Länge und 12 mm Glasdicke.

§ 35. Electrische Doppelbrechung. Durch ungleiche Zuführung von Wärme können bekanntlich feste durchsichtige Substanzen ungleich dilatirt und optisch doppelbrechend werden.

In analoger Weise können durch ungleiche electrische Ausdehnung Substanzen ungleichförmig dilatirt und optisch doppelbrechend werden.

Diese Bemerkung erklärt die von Dr. Kerr[1]) beschriebene Doppelbrechung, welche Glas, Quarz, Harz und isolirende Flüssigkeiten unter dem Einfluss electrischer Kräfte zeigen, und den scheinbaren Widerspruch dieser Angaben mit den in § 34 beschriebenen Versuchen anderer Beobachter.

Wird eine Franklin'sche Tafel stark electrisirt, so zeigt das Glas keine Doppelbrechung, da es an allen Stellen nahezu gleichen electrischen Kräften ausgesetzt und also gleichmässig dilatirt ist. Es ist ebensowenig doppelbrechend, wie gleichmässig erwärmtes Glas.

Ersetzt man aber die eine Stanniolbelegung einer Franklin'schen Tafel durch Quecksilber in einer Glasröhre von 30 mm äusserem uud 14 mm innerem Durchmesser, deren abgeschliffenes Ende sorgfältig mit Kitt aus Schellack und Canadabalsam auf die Glasplatte gekittet ist, so wird nur das Glas unter dem Quecksilber electrisch ausgedehnt. Das seitlich gelegene Glas kann wegen der aufgekitteten Glasröhre nicht ausweichen und wird durch die ungleiche elastische Spannung doppelbrechend.

Wird einer Flüssigkeit von einem eingetauchten festen Metalldraht schneller Wärme an einzelnen Stellen zugeführt, als durch Leitung und Bewegung der Flüssigkeitstheilchen seitlich abfliessen kann, so wird dieselbe optisch doppelbrechend, wie ungleich erwärmtes Glas.

Analog wird eine Flüssigkeit zwischen zwei Metallelectroden doppelbrechend, wenn dieselben auf ungleicher elec-

1) Kerr, Phil. Mag. (4) **50.** p. 337—348, 446—558, 1877; (5) **8.** p. 85—102, 229—245, 1879; (5) **9.** p. 157—174, 1880.

trischer Spannung erhalten werden. Die ungleiche electrische Dilatation hängt ab von der Geschwindigkeit, mit der sich die Electricität oder die electrischen Kräfte in der Flüssigkeit verbreiten und die electrische Ausdehnung hervorrufen.

Die Ausdehnung ist nahezu proportional dem Quadrate der an der betreffenden Stelle des Isolators wirksamen electrischen Kraft. Die Ausdehnung muss also auf der kürzesten electrischen Kraftlinie zwischen den Metallelectroden am grössten sein.

Stoffe, deren Brechungsexponent bei thermischer Ausdehnung zunimmt, wie Glas[1]) und solche, deren Brechungsexponent durch thermische Ausdehnung abnimmt, wie Schwefelkohlenstoff[2]), werden sich verschieden verhalten, wenn sie beide durch electrische Kräfte ausgedehnt werden, und wenn thermische und electrische Ausdehnung in gleicher Weise die optischen Eigenschaften ändern.[3])

In der That zeigen Spiegelglas und Schwefelkohlenstoff nach den Beobachtungen von Dr. Kerr entgegengesetzte electrische Doppelbrechung. Ich fand bei meinen Versuchen dies auch für Flintglas und Schwefelkohlenstoff bestätigt.

Wenn ferner Substanzen gegen electrische Kräfte sich entgegengesetzt verhalten, wie Schwefelkohlenstoff und Rüböl, durch thermische Ausdehnung aber beide[4]) den Brechungsexponenten verkleinern, so müssen sie auch entgegengesetzte electrische Doppelbrechung zeigen.

Auch dies ist in Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Die Schwierigkeit der Versuche liegt in der Schwierigkeit der genügenden Isolation der Metallelectroden, damit die electrischen Kräfte möglichst stark auf den Isolator einwirken. Die Flüssigkeit darf daher keine Staubtheilchen enthalten, welche die Electricität besser leiten als die Flüssigkeit. Diese

---

1) F. E. Neumann, Abh. d. Berl. Akad. **2.** p. 7. 1841; Fizeau, Pogg. Ann. **119.** p. 106 u. 112. 1863.

2) Gladstone u. Dale, Berl. Ber. **14.** p. 241. 1858; Phil. Trans. **148.** p. 888. 1858.

3) Vgl. Jamin, Brechungsexponent des Wassers bei verschiedenem Druck, Ann. d. chim. et de phys. (3) **52.** p. 171. 1858.

4) Müttrich, Pogg. Ann. **121.** p. 408. 1864.

Staubtheilchen stellen sich in die Richtung der electrischen Kraftlinien und bilden aneinander gereiht eine leitende Verbindung zwischen den Metallelectroden, deren electrische Spannungsdifferenz dadurch herabgesetzt wird, sobald nicht hinreichend schnell der Electricitätsverlust der Electroden ersetzt wird.

Aehnlich wie die Staubtheilchen kann die Substanz des Glases wirken, welches die isolirende Flüssigkeit umgibt und die Metallelectroden oder deren Zuleitungsdrähte isolirt. Ich habe aus diesem Grunde früher mit Trögen aus deutschem Spiegelglas oder mit vor der Lampe geblasenen Apparaten aus Thüringer Glas keine electrische Doppelbrechung wahrnehmen können.

Die Erscheinung war aber sofort wahrzunehmen, als ich besser isolirendes Glas benutzte.

Am einfachsten lässt sich eine leere Eau de Cologne-Flasche (Taf. II Fig. 20) mit zwei gegenüberliegenden ebenen Seitenflächen von 80 mm Höhe und 20 mm Breite für den Versuch herrichten, wenn diese ebenen Flächen zwischen gekreuzte und mit Sonnenlicht erleuchtete Nicol'sche Prismen gebracht, das Gesichtsfeld dunkel lassen. Die Aussenseite der Flasche wird bis auf den mittlern Theil der ebenen Flächen mit geschmolzenem Schellack bekleidet. Ein in den Boden gebohrtes Loch von 25 mm Durchmesser und der Hals der Flasche sind mit gut schliessenden Korken verstopft, durch welche Messingdrähte zu einer angelötheten schwach gewölbten Messingplatte von 15 mm Durchmesser (Uniformknopf) und einer Messingkugel von 10 mm Durchmesser führen. Die beiden Electroden, Kugel und Platte, hatten einen Abstand von 3 bis 5 mm.

Die Flasche wird, den Hals nach unten, soweit mit Schwefelkohlenstoff oder Rüböl gefüllt, dass die obere Kugelelectrode halb oder ganz von der Flüssigkeit bedeckt ist.

Der Apparat hat den Vortheil, dass in ihm, sobald er nicht gebraucht wird, sich die Staubtheilchen am Hals der Flasche ablagern und beim Electrisiren der Electroden erst allmählich in den von den Sonnenstrahlen getroffenen Theil der Flüssigkeit gelangen.

Stehen nur geringe Flüssigkeitsmengen zur Disposition, so empfiehlt sich folgende Vorrichtung.

Eine dickwandige Röhre aus französischem Glas von 38,8 mm Länge, 32 mm äusserem und 13,4 mm innerem Durchmesser (Taf. II Fig. 21) war an den Enden eben geschliffen, aussen mit geschmolzenem Schellack bekleidet und durch zwei runde planparallele Glasplatten von 32 mm Durchmesser und 4 mm Dicke geschlossen. In zwei Durchbohrungen an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen auf der Mitte der Röhre waren von aussen conische Messingstücke von etwa 4 mm Durchmesser eingeschliffen. Auf die conischen Messingstücke wurden im Innern der Glasröhre zwei Halbkugeln aus demselben Metall aufgeschraubt und dadurch der Hohlraum der Glasröhre flüssigkeitsdicht geschlossen. In die Aussenfläche eines jeden Messingconus wurde ein dünner Messingdraht von 100 mm Länge eingeschraubt, eine mit geschmolzenem Schellack bekleidete Glasröhre darüber geschoben und mit Siegellack in der Durchbohrung der dickwandigen Glasröhre festgeschmolzen. Die schwach gewölbten Enden der messingenen Halbkugeln hatten 10 mm Durchmesser und 2 mm Abstand und bildeten die Electroden, welche die Electricität der Flüssigkeit im Innern der Glasröhre zuführten.

Die dickwandige Glasröhre wurde auf eine runde Glasplatte gestellt, mehrere mal mit reinem Aether ausgespült und, nachdem dieser verdampft war, ganz mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt. Die zweite runde Glasplatte wurde aufgelegt, ohne dass eine Luftblase zurückblieb. Durch zwei Brettchen mit kreisförmigen Oeffnungen und vier Schrauben konnten die runden Glasplatten gegen die Endflächen der dickwandigen Glasröhre flüssigkeitsdicht aufgepresst werden.

Die Röhre wurde mit zwei isolirenden Ständern zwischen zwei gekreuzte und mit horizontalem Sonnenlicht beleuchtete Nicol'sche Prismen gestellt, deren Hauptschnitte mit der kürzesten Linie zwischen den verticalen Endflächen der Halbkugeln oder der kürzesten horizontalen electrischen Kraftlinie Winkel von 45° einschlossen.

Das dunkle Gesichtsfeld wurde zuweilen, wenn die runden Glasplatten zu stark gepresst waren, durch das Einschalten derselben erhellt. Durch gleichzeitiges Einschalten einer Glimmerplatte von $\frac{\lambda}{4}$ in geeigneter Lage und Drehen des analysirenden Nicol'schen Prismas konnte die Dunkelheit wieder hergestellt werden.

Wurden die beiden Electroden der dickwandigen Glasröhre mit den Electroden einer kräftigen Holtz'schen Maschine verbunden, deren eine Electrode zur Erde abgeleitet war, so wurde das Gesichtsfeld zwischen den Electroden erhellt. Das gleichzeitige Einschalten einer passend dilatirten Stelle eines mit der Hand gebogenen Spiegelglasstreifens von 146 mm Länge, 13 mm Höhe und 7,5 mm Dicke (Taf. II Fig. 22) bei *o* oder *u*, oberhalb oder unterhalb der durch die punktirte Linie angedeuteten neutralen Schicht führte dann wieder Dunkelheit herbei. Der convexe oder gedehnte Theil *o* des Spiegelglasstreifens verhält sich wie ein optisch positiver Krystall mit der optischen Axe $\doteqdot$ der neutralen Schicht; der concave oder zusammengedrückte Theil *u* wie ein optisch negativer Krystall (Kalkspath) mit der optischen Axe $\doteqdot$ der neutralen Schicht.

Statt den Glasstreifen zu biegen, kann man ihn auch an den Enden mit beiden Händen fassen und dehnen oder zusammendrücken.

Bei Schwefelkohlenstoff compensirt Einschalten der concaven Seite, bei Rüböl Einschalten der convexen Seite des gebogenen horizontalen Glasstreifens die von den electrischen Kräften hervorgerufene Doppelbrechung der Flüssigkeit.

Schwächere electrische Doppelbrechung, aber in demselben Sinne wie Rüböl zeigten Mandelöl, noch schwächere Olivenöl. Reiner Aether zeigte eine Wirkung, die zwischen Mandelöl und Olivenöl lag.

Dieselbe electrische Doppelbrechung wie Schwefelkohlenstoff, nur schwächer, zeigten Terpentinöl und Steinöl.

Bei Glycerin und Alkohol konnte ich keine Doppelbrechung durch electrische Kräfte hervorrufen. Wegen des bessern electrischen Leitungsvermögens liess sich bei diesen

Flüssigkeiten keine grosse Spannungsdifferenz der Metallelectroden erreichen.

Einschalten der convexen Seite des gebogenen Glasstreifens compensirte, wie bei Rüböl, die oben beschriebene electrische Doppelbrechung im Spiegelglas der Franklin'schen Tafel unter dem Quecksilber der aufgekitteten dicken Glasröhre, wenn die neutrale Schicht des gebogenen Glasstreifens parallel der kürzesten electrischen Kraftlinie lag. Dasselbe war der Fall bei Flintglas. Ich benutzte eine planparallele Flintglasplatte von 30 mm Länge und 20 mm Höhe, in deren quadratische Endflächen Löcher von 4 mm Durchmesser eingebohrt waren. Die halbkugelförmigen Enden der Bohrungen hatten 2,5 mm Abstand voneinander und waren mit Quecksilber gefüllt, welches die Electroden bildete. Die Zuleitungsdrähte waren durch 100 mm lange mit geschmolzenem Schellack bekleidete Glasröhren isolirt, deren unteres Ende in das Flintglasstück eingekittet war.

Um eine dieser electrischen Doppelbrechung analoge Erscheinung durch Erwärmung zu erhalten, brachte ich eine horizontale kreisförmige Stanniolplatte von 20 mm Durchmesser mit 2 Stanniollappen von 5 mm Breite an beiden Seiten (Taf. II Fig. 23) zwischen zwei aufeinandergestellte homogene Glaswürfel. Die Glaswürfel standen zwischen gekreuzten und mit horizontalem Sonnenlicht erleuchteten Nicol'schen Prismen, deren Hauptschnitte unter 45° gegen die Stanniolplatte geneigt waren. Wurde der electrische Strom eines Bunsen'schen Chromsäureelementes durch die beiden Lappen der Stanniolplatte ein und aus geleitet, so wurde die Stanniolplatte erwärmt und das Glas zu beiden Seiten optisch doppelbrechend, als ob es $\perp$ zur Stanniolplatte dilatirt und $\mp$ der Stanniolplatte comprimirt wäre. Das Glas verhält sich wie ein negativer Krystall (Kalkspath) mit der optischen Axe $\mp$ der erwärmten Stanniolplatte.

Der Linie grösster Erwärmung $\mp$ der Stanniolplatte oder der optischen Axe eines negativen Krystalls[1]) muss bei der electrischen Doppelbrechung die kürzeste electrische

1) F. E. Neumann, Abh. d. Berl. Akad. 1841. II. p. 6.

Kraftlinie im Glase zwischen den Metallelectroden entsprechen, wie es in der That Dr. Kerr[1]) angegeben hat, und ich bestätigt gefunden habe. Ueberhaupt müssen sich die Stellen des electrischen Isolators in der Nähe der kürzesten electrischen Kraftlinie für die von Dr. Kerr als „negativ" bezeichneten Substanzen (Glas, fette Oele u. s. w.) verhalten wie ein optisch negativer Krystall mit optischer Axe ∓ der kürzesten electrischen Kraftlinie; die als „positiv" bezeichneten Substanzen (Schwefelkohlenstoff u. s. w.), wie ein optisch positiver Krystall mit der optischen Axe ∓ der kürzesten electrischen Kraftlinie.

Genauer betrachtet hätte man aber die festen und flüssigen Isolatoren zwischen den Metallelectroden als ungleichförmig dilatirte Körper aufzufassen, die optisch wirken wie ein Aggregat von sehr vielen kleinen Krystallindividuen.

Das von Dr. Kerr als clear ambra resin bezeichnete Harz (Colophonium?) verhält sich bei electrischer Doppelbrechung umgekehrt wie Glas und wird voraussichtlich unter dem Einfluss electrischer Kräfte sein Volumen verkleinern, wie die fetten Oele.

Die optischen Eigenschaften bestätigen also vollständig die auch mit andern Methoden nachweisbare Volumenänderung (Ausdehnung und Contraction) welche schlecht leitende Stoffe unter dem Einfluss electrischer Kräfte zeigen.

§ 36. Die Aenderung des Brechungsexponenten mit der Temperatur wurde von Hrn. G. Olds im Heidelberger Laboratorium für die von mir in Bezug auf electrische Doppelbrechung untersuchten Flüssigkeiten bestimmt.

Die Flüssigkeiten wurden in ein Steinheil'sches Hohlprisma mit planparallelen Gläsern von 60° brechendem Winkel gebracht, und die Minimalablenkungen für die Fraunhofer'schen Linien CDF bestimmt, indem man den Spalt eines Spectralapparates mit Natronlicht oder einer von Inductionsströmen durchflossenen Geissler'schen Röhre erleuchtete, die verdünntes Wasserstoffgas enthielt.[2])

1) Kerr, Phil. Mag. (4) **50.** p. 337. 1875.

2) Vgl. Landolt, Pogg. Ann. **117.** p. 355 sqq. 1862.

Die Ablenkungswinkel liessen sich an der Kreistheilung mit zwei diametral gelegenen Nonien bis auf 10 Secunden genau bestimmen. In die Flüssigkeit des Hohlprismas tauchte ein in Zehntelgrade getheiltes Thermometer mit sehr kleinem Quecksilbergefäss. Die Minimalablenkung wurde bestimmt, nachdem die Flüssigkeit und die Kreistheilung die constant gehaltene Zimmertemperatur angenommen hatten, welche zwischen 0^0 und 20^0 C. schwankte.

Es zeigte sich, dass für diesen Temperaturabschnitt der Brechungsexponent durch die Formel:

$$n = n_0 (1 + \nu t) \tag{1}$$

darstellbar war, wo n und n_0 den Brechungsexponenten bei t^0 und 0^0 bezeichnen. Bei derselben Flüssigkeit wurde für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien sehr nahe derselbe Werth von ν gefunden, sodass in der folgenden Zusammenstellung das arithmetische Mittel der verschiedenen Bestimmungen angegeben ist.

Nennt man n_1, $n_2 \ldots n_p$ den Werth des Brechungsexponenten bei 0^0 C. für die Wellenlänge λ_1 $\lambda_2 \ldots \lambda_p$ der betreffenden Farbe in Luft, so liess sich der Brechungsexponent durch die Cauchy'sche Formel [1]) ausdrücken:

$$n_p = \alpha + \frac{\beta}{\lambda_p^2}. \tag{2}$$

Sind eine Reihe Brechungsexponenten n $n_1 \ldots n_p$ durch die Beobachtung bekannt, so lassen sich die Constanten α und β aus diesen Gleichungen (2) mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnen.

Da bei Rüböl nur das rothe Ende des Spectrums bis zur Fraunhofer'schen Linie b sichtbar war, so wurden bei dieser Flüssigkeit die Constanten α und β aus den beiden Beobachtungen für C und D abgeleitet.

Die mit Hülfe der Gl. (2) berechneten Werthe von n_p stimmen bis auf eine kleine Abweichung bei Aether vollkommen mit den beobachteten überein.

---

1) Cauchy, Dispersion de la lumière Prague, p. 56. 1835.

Tabelle 35.

	Brechungsexponenten bei 0° für die Fraunhofer'schen Linien			$n_0 = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$		$n = n_0(1 + \nu t)$
	F	D	C	α	$\beta . 10^{14}$	ν
Rüböl	1,4839[1]	1,4802	1,4773	1,4653	51716	−0,000 2407
Mandelöl	1,4847	1,4782	1,4755	1,4644	48131	2463
Olivenöl	1,4825	1,4763	1,4738	1,4632	45558	2463
Steinöl	1,4644	1,4573	1,4545	1,4424	51911	2977
Terpentinöl	1,4884	1,4811	1,4782	—	—	3181
Aether	1,3693	1,3643	1,3629	1,3548	34127	4327

§ 37. Vergleichung von thermischer und electrischer Ausdehnung. Obwohl der Grund der electrischen Ausdehnung nicht in einer Erwärmung zu suchen ist, so hat es doch ein Interesse, zu untersuchen, welche Temperaturerhöhung genügen würde, um eine Ausdehnung von gleicher Grösse hervorzurufen wie die electrischen Kräfte.

Zu dem Ende sind in der folgenden Tabelle die Volumenänderungen in Milliontel des ursprünglichen Volumens angegeben, welche einer Temperaturerhöhung der Substanz um 1° C. entsprechen; daneben die von electrischen Kräften herbeigeführte Volumenänderung, wenn die Condensatorbelegungen (Platinelectroden) mit einer geladenen Leydener Batterie von 6 Flaschen verbunden wurden.

In der zweiten und dritten Spalte stehen die Brechungsexponenten für die Fraunhofer'sche Linie D und die relative Aenderung des Brechungsexponenten bei einer Temperaturerhöhung um 1° C. (vgl. § 36.)

Die electrische Volumenänderung der beiden Glassorten wurde aus den Beobachtungen der Tabelle 5 § 6 berechnet unter der Voraussetzung, dass die Volumenänderung proportional dem Quadrate der Wanddicke abnimmt, und dass die letztere 12 mm war, entsprechend dem Abstande der Platinelectroden der Voltameter. (§ 29—31.)

Die Angaben der thermischen Ausdehnung sind meist den bekannten Bestimmungen von H. Kopp entnommen. Für Glycerin liegt eine Angabe von Wüllner vor.

1) Für Fraunhofer'sche Linie E.

Die thermische Ausdehnung des Thüringer Glases habe ich selbst an einem mit Quecksilber gefüllten Gewichtsthermometer bestimmt.

Die mittlere Ausdehnung von Steinöl, Rüböl, Mandelöl zwischen 0° und 100° bestimmte Hr. Dr. E. Less im Heidelberger physikalischen Laboratorium an Gewichtsthermometern aus Flintglas, welche mit den betreffenden Flüssigkeiten gefüllt waren. Die Ausdehnung des Flintglases an einem ähnlichen mit Wasser gefüllten Apparate.

Tabelle 36.

Substanz	Brechungsexponent Linie D	$\nu \cdot 10^6$	Volumendilatation $\frac{\Delta v}{v} \cdot 10^6$ durch Temperaturerhöhung um 1° C.	durch die Electricitätsmenge ±20	±40
ether (unrein) . . bei 0° . . .	1,3643	−443	1484	(17,33)	(64,46)
hwefelkohlenstoff[1]) ., ., . . .	1,6442	−557	1141	5,23	22,43
kohol[1]) . . . . . ,, ,, . . .	(1,3701)	−316	1042	6,80	35,50
einöl . . . . . ,, ,, . . .	1,4644	−298	1032	5,66	—
rpentinöl . . . . . ,, ,, . . .	1,4811	−318	902	1,70	42,45
ycerin[2]) . . . . . ,, ,, . . .	(1,4600)	−187	512	0,59	3,19
stillirtes Wasser . ., 8°[1]) . .	1,3328	− 37,5	92	0,07	0,23
sser + Spur Salzsäure bei 10° .	,, ,,	,,	,,	0,13	0,42
sser mit 0,124% Salzsäure bei 13°	,, ,,	,,	,,	0,07	0,56
stillirtes Wasser bei 0°[1]) . . .	1,3330	− 18	−20	− 0,03	−0,09
sser + Spur Salzsäure bei 0° .	,, ,,	,,	,,	− 0,06	−0,30
sser mit 0,124% Salzsäure bei 0°	,, ,,	,,	,,	− 0,03	- 0,36
ringer Glas[3]) bei 0°	1,5100	+ 1,1[3])	32	0,003	0,010
ntglas[3]) bei 0°	1,6180	+ 1,6[3])	26	0,002	0,009
ther (rein) bei 0°	1,3643	−443	1484	−47,45	—
böl ,, ., ...	1,4802	−241	773	−18,24	—
ndelöl ,, ,, ...	1,4782	−246	777	− 6,85	—
venöl ,, ., ...	1,4763	−246	773	− 0,38	—

Wenn auch, wie schon oben hervorgehoben wurde, die Zahlen für die electrische Ausdehnung nicht direct miteinander vergleichbar sind, insofern sie sich auf Apparate mit

1) Gladstone und Dale, Phil. Trans. **148.** p. 888. 1858.
2) Wüllner, Pogg. Ann. **133.** p. 16.a. 1868.
3) Fizeau, Pogg. Ann. **119.** p. 106. 1863.

etwas verschiedenen Dimensionen beziehen, so erscheint doch die ähnliche Reihenfolge der Substanzen auffallend, mögen sie nach der thermischen oder electrischen Ausdehnung geordnet werden, und unabhängig von dem electrischen Leitungsvermögen.

Ausgenommen wäre die Gruppe der fetten Oele, die eben ein besonderes Verhalten zeigt.

Temperaturänderungen von einigen Hundertel Grad würden genügen, um eine ebenso grosse, wie die von den electrischen Kräften herrührende Volumendilatation herbeizuführen.

Je grösser die thermische Ausdehnung ist, um so mehr ändert sich auch der Brechungsexponent mit der Temperatur, um so grösser ist ν.

§ 38. Abhängigkeit der electrischen Ausdehnung von der Grösse der electrischen Kräfte. Der mathematische Ausdruck für die electrische Capacität eines Condensators ist bis auf einen constanten Factor derselbe wie für die Intensität eines constanten electrischen Stromes, der bei der Potentialdifferenz 1 der Belegungen durch die isolirende Substanz des Condensators hindurchgehen würde.

Mit wachsender Temperatur nimmt die Dielectricitätsconstante oder das electrische Leitungsvermögen des Flintglases zu, und gleichzeitig die nach der Entladung des Flintglascondensators zurückbleibende electrische Volumenänderung oder Verlängerung (§ 20—22), während dieser Rückstand für niedrige Temperaturen verschwindend klein ist.

Das Flintglas nähert sich also in seinem Verhalten demjenigen des Thüringer Glases bei niedriger Temperatur um so mehr, je höher die Temperatur steigt, und es ist der Analogie nach auch bei Flintglas für diese hohen Temperaturen ein Polarisationsstrom zu erwarten, wie er oben (§ 5) für Thüringer Glas direct nachgewiesen wurde.

Dieser Polarisationsstrom lässt sich in der That in ähnlicher Weise wie für niedrige Temperaturen bei Thüringer Glas, für hohe Temperaturen auch bei Flintglas mit dem Multiplicator beobachten.

Es deutet dies auf einen engen Zusammenhang der Erscheinungen des electrischen Ausdehnungsrückstandes mit der innern Polarisation des Glases; um so mehr, als dieser Rückstand mit der Dauer und Anzahl der vorhergegangenen Ladungen des Condensators zunimmt (§ 3 und 20—22).

Auch die bei schnellem Umlegen des Commutators (§ 2 Taf. II Fig. 6) auftretende Volumenabnahme bei Thüringer Glas, statt der zu erwartenden Volumenzunahme (die durch die von den Inductionsströmen herrührende Erwärmung noch vermehrt werden müsste) möchte hiermit in Zusammenhang stehen.

Was aber die Aenderung der Dimensionen betrifft, welche plötzlich mit dem Auftreten und Verschwinden der electrischen Kräfte auftritt und verschwindet, so ist diese unabhängig von der Richtung der electrischen Kräfte und erfolgt nach allen Seiten gleichmässig wie eine Ausdehnung durch Temperaturerhöhung (§ 28).

Diese plötzliche Aenderung der Dimensionen ist auch vom Vorzeichen der Electricität unabhängig (§ 2), und es wäre zu erwarten, dass sie wie die Erwärmung eines Metalldrahtes vom Widerstande W durch einen constanten electrischen Strom von der Intensität J proportional wäre mit:

(1) $$J^2 W = \frac{P^2}{D} . \lambda . O,$$

wenn P die electrische Potentialdifferenz der Condensatorbelegungen,

O Oberfläche . . . . . } der isolirenden
D Dicke . . . . . } Substanz
λ electrisches Leitungsvermögen }

bedeuten.

Möglicherweise könnte auch die Wirkung proportional dem Quadrate der an jeder Stelle des Isolators wirksamen electrischen Kraft, d. h. proportional mit:

(2) $$\frac{P^2}{D^2}$$ sein.

Mit dem Ausdruck (1) wäre die mit Erhöhung der Temperatur eintretende Zunahme der electrischen Ausdehnung in Uebereinstimmung, da λ mit Erhöhung der Temperatur zunimmt.

Die von mir ausgeführten Messungen bestätigen aber weder die erste noch die zweite Annahme, ja es zeigt sich nur in seltenen Fällen, am ehesten für kleine Potentialdifferenzen P der Belegungen, die electrische Volumenänderung oder Ausdehnung proportional mit P^2 (§ 11 und 18).

Sehr häufig, z. B. bei Glimmer (Tab. 11 § 12), nimmt die Volumenänderung oder Verlängerung langsamer zu, als P^2 und nähert sich mit wachsender electrischer Kraft einem Maximalwerthe.

In dieser Beziehung sind diese electrischen analog mit bekannten magnetischen Erscheinungen, und man möchte geneigt sein, den Grund der electrischen Ausdehnung in einer Richtung der Molecüle des Isolators (Dielectricums) zu suchen, die sich, damit ihr electrisches Moment ein Maximum wird, mit der grössten Länge in die Richtung der Resultante der wirkenden electrischen Kräfte zu stellen streben und dann einen grösseren oder kleineren Raum einnehmen, wie vorher.

Dass kleine, in schlecht leitenden Flüssigkeiten suspendirte Theilchen von Glas und anderen Isolatoren in der That eine solche Lage annehmen, ist von Th. Weyl [1]) nachgewiesen worden. Sind die Theilchen, statt in einer Flüssigkeit, in einer nicht vollkommen starren Masse vertheilt, so müssen ähnliche Aenderungen der Lage, nur langsamer, auftreten.

Die Wirkung müsste unter sonst gleichen Umständen um so grösser sein, je grösser die Beweglichkeit der Theilchen ist. In der That nimmt die electrische Ausdehnung der festen Körper mit der Erhöhung der Temperatur zu und ist bei Flüssigkeiten grösser als bei festen Körpern.

Auch die Aenderung der Elasticität fester Körper durch eine solche electrische Drehung der kleinsten Theilchen würde mit anderen Erfahrungen übereinstimmen, z. B. mit den von G. Wiedemann [2]) untersuchten Aenderungen der Elasticität durch magnetische Kräfte.

1) Weyl, Du Bois und Reichert Arch. p. 721. 1876.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **100.** p. 235. 1857; **106.** p. 169. 1859; **117.** p. 195. 1862.

Eine regelmässige, durch electrische Kräfte herbeigeführte Anordnung der kleinsten Theilchen, wie bei einem Krystall, würde darum noch nicht zu erwarten sein, weil andere Kräfte, wie Cohäsion und Molecularbewegungen, der electrischen Drehung entgegenwirken werden.

Diese letztere Auffassung wird dadurch unterstützt, dass die electrische Ausdehnung fester Körper, so weit meine Versuche reichen, nach allen Seiten gleichmässig erfolgt (§ 28); dass sich bei Gasen keine electrische Volumenänderung mit Sicherheit nachweisen lässt (§ 32), und dass gleichmässig electrisirtes Glas keine electrische Doppelbrechung zeigt (§ 34—35).

Eine grosse Schwierigkeit der Untersuchung speciell der Auffindung des Gesetzes, wie die electrische Ausdehnung von den wirkenden electrischen Kräften abhängt, besteht aber darin, dass man durchaus nicht berechtigt ist, diese Kraft an allen Stellen der isolirenden Schicht zwischen den Condensatorbelegungen gleich gross anzunehmen.

Die electrische Kraft an einer Stelle des Glases würde proportional der Stärke des electrischen Stromes an der betreffenden Stelle des Glases sein.

Diese Stromstärke ist aber, wenn die electrischen Kräfte nicht viele Minuten lang in gleicher Stärke wirken, nicht in allen Schichten des Glases dieselbe und kann bei constanter Potentialdifferenz der Belegungen sogar bald positiv, bald negativ sein.

Am besten lässt sich dies mit dem Entladungsstrom nachweisen, der von der äussern Belegung eines Condensators zur Erde fliesst (vgl. § 5).

Wird entsprechend der Anordnung der Versuche in § 2 und 5 (Taf. II Fig. 6) die eine Belegung eines Flintglascondensators durch eine Wassersäule und einen äusserst empfindlichen Multiplicator mit astasirter Magnetnadel zur Erde abgeleitet, während die Belegungen der Leydener Batterie mit der andern Condensatorbelegung und der Erde leitend verbunden sind, so zeigt die Multiplicatornadel zuerst eine positive Ablenkung, die allmählich abnimmt, Null wird und

dann in eine negative Ablenkung übergeht. Die letztere verschwindet auch wieder allmählich.

Der Entladungsstrom ist oft 5 bis 10 Minuten und länger zu beobachten. Die negative Ablenkung tritt um so eher ein und ist um so grösser, je dünner die Glaswand des Condensators ist. Mit der Electricitätsmenge in der Leydener Batterie nehmen positive und negative Ablenkungen zu.

Tabelle 37.

Entladungsstrom bei Condensatoren aus englischem Flintglas und Glimmer.

Apparat Nr.	Glasdicke	Temp.	Stromintensität für die Electricitätsmenge 20 in 6 Flaschen.	
		Kugelförmige Thermometercondensatoren.		
	mm			
30	0,142	0°	− 21 Sc. in 20″	−26,7 Sc. in 30″
„	„	28°	− 2 „ in 20″	−18 Sc. in 30″ bis 45″
„	„	100°	+478 „ in 20″	nur positiv
23	0,271	25°	− 11 „ in 20″	−13 Sc. in 30″
22	0,286	0°		−12 Sc. in ?
		Gerade hohle Glasfäden, innen und aussen versilbert.		
	mm			
3b	0,091	17°	34 Sc. in 20″	−20 Sc. in 70″
7	0,092	„	20 „ in 20″	− 7 „ „ 70″
8	0,164	„	39 „ in 20″	− 2 „ „ 180″
29	0,194	„	120 „ in 20″	+ 4 „ „ 180″
		Glimmercondensator.[1])		
	mm			
2	0,030	24°	200 Sc. in ?	−30 Sc. in 20″
—	—	—	—	−35 „ „ 35″

Man sieht aus diesen Versuchen, dass der negative Strom um so später und um so kleiner eintritt, je dicker das Glas und je höher die Temperatur ist, je besser das Glas die Electricität leitet. Bei hoher Temperatur verhält sich wieder Flintglas wie Thüringer Glas bei niedriger Temperatur.

Ausser von der Glasdicke scheint der Entladungsstrom auch von den übrigen Dimensionen des Condensators und von der Beschaffenheit der Leydener Batterie abzuhängen.

Es ist hiernach anzunehmen, dass nicht blos die an die

1) Electricitätsmenge 10 in 6 Flaschen.

äussere Belegung grenzende Glasschicht, sondern auch die im Innern gelegenen Schichten bald positiven, bald negativen electrischen Strom haben; dass im allgemeinen zu derselben Zeit in den verschiedenen Schichten des Innern der isolirenden Substanz eines Condensators die wirkenden electrischen Kräfte verschieden gross sind; dass sie bei gleicher Potentialdifferenz der Belegungen zu verschiedenen Zeiten an derselben Stelle der isolirenden Substanz verschiedene Werthe haben; dass von der Art des Schliessungsbogens oder der Zuführung der Electricität zu den Condensatorbelegungen der Werth der electrischen Kraft an einer bestimmten Stelle des Isolators zu einer bestimmten Zeit abhängen muss (vgl. § 4).

Was von Glas gilt, gilt auch von anderen Stoffen, Glimmer, Schellack, Kautschuk, Schwefelkohlenstoff, Terpentinöl, Luft u. s. w.

Der Vorgang im Isolator ist also ein sehr complicirter, und man kann nicht erwarten, eine einfache Beziehung zwischen electrischer Volumen- oder Längenänderung und der Potentialdifferenz der Belegungen oder der Glasdicke zu finden — wie dies in der That meine Versuche zeigen.

Resultate.

1. Feste und tropfbar flüssige Körper ändern ihr Volumen, wenn man sie in ähnlicher Weise wie das Glas einer Leydener Flasche electrischen Kräften aussetzt.

2. Diese Volumenänderung rührt nicht von Erwärmung her und ist meist eine Ausdehnung. Doch kann sie auch in einer Contraction bestehen, wie dies z. B. bei den fetten Oelen der Fall ist.

3. Bei Gasen habe ich keine Volumenänderung durch electrische Kräfte beobachten können. Wenn eine solche vorhanden ist, so muss sie kleiner als $\frac{1}{3\,000\,000\,000}$ des ursprünglichen Luftvolumens sein.

4. Die Volumenänderung erfolgt momentan bei Flintglas, in längerer Zeit bei dem die Electricität besser leitenden Thüringer Glas. Bei Entladung der Belegungen kugelförmiger oder röhrenförmiger Condensatoren nimmt das Glas

nahezu wieder das ursprüngliche Volumen an; momentan bei Flintglas, langsamer bei Thüringer Glas.

5. Gleichzeitig mit dem Volumen ändert sich auch die Länge eines röhrenförmigen Condensators.

6. Volumen- und Längenänderung sind um so grösser, je grösser die electrische Potentialdifferenz der Belegungen und je geringer die Dicke der isolirenden Substanz des Condensators ist.

Nahezu, aber nicht genau, sind sie proportional dem Quadrate des Verhältnisses von Potentialdifferenz und Dicke.

7. Volumen- und Längenänderung sind unter sonst gleichen Umständen, je nach der Natur der isolirenden Substanz des Condensators, verschieden.

8. Nach der Entladung der Condensatorbelegungen bleibt ein Rückstand im Sinne der ursprünglichen electrischen Volumenänderung oder Verlängerung zurück, der bei Flintglas sehr klein, bei Thüringer Glas grösser ist und mit der electrischen Polarisation der Glasmasse zusammenzuhängen scheint.

9. Die Volumen- und Längenänderung rühren nicht von einer electrischen Compression der isolirenden Substanz her.

10. Bei Flintglas erfolgt die electrische Ausdehnung nach allen Richtungen gleichmässig, wie die Ausdehnung durch Temperaturerhöhung, unabhängig vom Vorzeichen und der Richtung der electrischen Kräfte.

11. Electrische Volumenänderung und Verlängerung nehmen bei Glas nahezu in derselben Weise mit Erhöhung der Temperatur zu, wie die Dielectricitätsconstante oder das electrische Leitungsvermögen des Glases.

12. Unter dem Einfluss electrischer Kräfte nimmt die Elasticität von Flintglas, Thüringer Glas und Kautschuk ab; vom Glimmer und Guttapercha zu.

13. Die electrische Durchbohrung von Glas und anderen Substanzen ist eine Folge der an den verschiedenen Stellen des Isolators ungleichen electrischen Dilatation.

14. Durch ungleiche electrische Ausdehnung können feste und flüssige Substanzen ungleichförmig dilatirt und optisch doppelbrechend werden, ähnlich wie durch ungleiche

Zuführung von Wärme feste und flüssige durchsichtige Substanzen ungleich dilatirt und optisch doppelbrechend werden.

15. Durch electrische Kräfte gleichförmig dilatirtes Glas zeigt keine electrische Doppelbrechung.

16. Das Verhalten der Substanzen mit „positiver" und „negativer" electrischer Doppelbrechung, auf welches Dr. Kerr zuerst aufmerksam gemacht hat, erklärt sich durch die Art und Weise, in der die verschiedenen Substanzen den Brechungsexponenten mit der Dichtigkeit und das Volumen unter dem Einfluss electrischer Kräfte ändern.

17. Bei constanter Potentialdifferenz der Belegungen eines Condensators ist nach der Ladung desselben längere Zeit hindurch die electrische Kraft verschieden gross in den verschiedenen Schichten der isolirenden Substanz zu derselben Zeit, oder an derselben Stelle der isolirenden Substanz zu verschiedenen Zeiten.

Heidelberg, den 3. April 1880.

II. *Das Clausius'sche Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume; von E. Budde.*

Die Autoren, welche sich bis jetzt mit dem neuen electrodynamischen Grundgesetze von Clausius beschäftigt haben, verhalten sich, so viel mir bekannt geworden ist, alle ablehnend gegen dasselbe. Die Herren Zöllner und Lorberg werfen ihm im wesentlichen vor, dass es zu „unwahrscheinlichen" Forderungen führe, mit anderen Worten, dass es gegen hergebrachte Hypothesen verstosse. Dagegen wäre zu bemerken, dass die Einführung der „absoluten" Geschwindigkeiten in die Physik, wenn sie sich als berechtigt ausweisen sollte, einen so wichtigen Fortschritt darstellen würde, dass man sich durch Bedenken gegen radicale Neuerung gewiss nicht abhalten lassen darf, sie wenigstens aufmerksam zu

prüfen. Ein anderer Autor, Hr. Fröhlich[1]), hat im letzten Heft dieser Annalen[2]) andere Gründe gegen Hrn. Clausius ins Feld geführt, die, wenn sie richtig wären, allerdings durchschlagen würden. Er wendet das Clausius'sche Gesetz auf einen Fall an, der durch die Bewegung der Erde gegeben ist, nämlich auf die electrodynamischen Wirkungen zwischen einem Stromkreise s und einer freien electrischen Ladung q, welche dadurch entstehen, dass s und q eine gemeinsame Translation im Raume besitzen.

Er findet für den Fall, dass s und q relativ in Ruhe sind, 1) im allgemeinen eine so grosse Kraft zwischen s und q, dass dieselbe auch der rohesten Beobachtung nicht hätte entgehen können; 2) in einem speciellen Falle eine unsinnige, weil von willkürlichen Coordinaten abhängige Kraft. Er erklärt dann den scheinbaren Widerspruch zwischen seinen Ergebnissen und der Clausius'schen Ableitung daraus, dass Hr. Clausius bei der Begründung seiner Formel die an relativ ruhenden Leitern gewonnenen Versuchsergebnisse auf absolut ruhende übertragen habe. Dass dies geschehen, ist allerdings richtig, würde sich aber wohl mit schwer wiegenden Gründen vertheidigen lassen; auf die haben wir indessen hier nicht einzugehen. Was nun die zweite Folgerung des Hrn. Fröhlich angeht, so spricht dieselbe wohl mehr gegen seine Rechnung als gegen das Clausius'sche Gesetz. Denn es ist ohne weiteres klar, dass man aus lauter bestimmten, eindeutigen Elementarkräften, in denen nur endliche Factoren neben den Differentialen auftreten, keine willkürliche Kraft- oder Momentensumme herausintegriren kann.

Auf Grund längerer Beschäftigung mit dem von Hrn. Fröhlich behandelten Problem muss ich aber auch seiner ersten Folgerung widersprechen. Die Kräfte zwischen geschlossenen Strömen und freier Electricität, welche das Clausius'sche Gesetz vermöge der Bewegung der Erde im Raume verlangt, sind nicht so beschaffen, dass sie der rohesten Beobachtung auffallen müssten. Für ihre Feststel-

1) S. auch die unter Nr. VI in diesem Heft folgende Abhandlung des Hrn. Clausius. Die Red.

2) Fröhlich, Wied. Ann. 9. p. 261. 1880.

lung ist erforderlich, dass man einen Punkt berücksichtige, den Hr. Fröhlich vernachlässigt hat. Ein Stromkreis influenzirt nämlich nicht blos äussere Punkte, sondern auch seine eigenen Theile; er ladet sich infolge dessen selbst, und es zeigt sich, dass diese statische Ladung eine ganze Classe von Kräften, welche zwischen Stromelementen und electrischen Punkten auftreten, neutralisirt, nämlich alle diejenigen, welche reciprok sind. Auch die übrig bleibende Wirkung wird durch einen später zu erwähnenden Umstand neutralisirt.

§ 1. Wirkungen zwischen einem electrischen Punkte und einem Stromelement. Gegeben sei im Punkte xyz eines rechtwinkligen Coordinatensystems das Stromelement ds von der mechanischen Intensität i. Die Menge der in ihm enthaltenen $+E.$ sei h, die der $-E.$ sei $-h$; die Geschwindigkeiten, womit beide im Strome fliessen, seien $+v_1$ und $-v_2$, die Winkel von v_1 mit den Axen $\alpha\beta\gamma$. Ferner sei im Punkte $x'y'z'$ das freie Electricitätsquantum q vorhanden; der Radiusvector von ds nach q heisse r und φ der Winkel zwischen r und ds.

q und ds sollen nun eine gemeinsame Translationsgeschwindigkeit u besitzen, und wir nehmen an, dass die x-Axe in die Richtung von u gelegt sei. Wir betrachten zunächst die Wirkung von $+h$ auf q, deren x-Componente ξ'_+ heissen möge. Nach der Fassung des Clausius'schen Gesetzes, welche neuerdings von dessen Urheber als die maassgebende behandelt worden ist[1]), hat man:

$$(1)\quad \xi'_+ = qh\left\{-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\left[1-k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right]-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right)\right\},$$

wo t die Zeit, und k eine Constante bedeutet.

Nach den Bedingungen unseres Falles wird nun:

$$\frac{dx}{dt}=v_1\cos\alpha+u,\qquad \frac{dy}{dt}=v_1\cos\beta,\qquad \frac{dz}{dt}=v_1\cos\gamma,$$
$$\frac{dx'}{dt}=u,\qquad \frac{dy'}{dt}=0,\qquad \frac{dz'}{dt}=0,$$

In dem Ausdrucke $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right)$ ändern sich r und $\frac{dx}{dt}$ offenbar nur durch das strömende Fortschreiten der $E.$ in ds. Also wird:

1) Clausius, Wied. Ann. **1.** p. 18. 1877.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dx}{dt}\right)=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right)=v_1\frac{d}{ds}\left(\frac{v_1\cos\alpha+u}{r}\right),\quad\text{also:}$$

$$(2)\quad \xi'_+=qh\left\{\frac{x'-x}{r^3}[1-ku(v_1\cos\alpha+u)]-kv_1\frac{d}{ds}\left(\frac{v_1\cos\alpha+u}{r}\right)\right\}.$$

Durch Vertauschung von v_1 mit $-v_2$ und h mit $-h$ ergibt sich die entsprechende Componente der Wirkung von $-h$ auf q:

$$(3)\quad \xi'_-=-qh\left\{\frac{x'-x}{r^3}[1+ku(v_2\cos\alpha-u)]-kv_2\frac{d}{ds}\left(\frac{v_2\cos\alpha-u}{r}\right)\right\}.$$

Addirt man (2) und (3), so erhält man einen Rest ξ', der die x-Componente der gesuchten Wirkung von ds auf q darstellt.

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}\xi'=qh\left\{\frac{x'-x}{r^3}(-ku)(v_1+v_2)\cos\alpha-k(v_1+v_2)\frac{d}{ds}\left(\frac{u}{r}\right)\right.\\ \qquad\left.-k\left[v_1\frac{d}{ds}\left(\frac{v_1\cos\alpha}{r}\right)-v_2\frac{d}{ds}\left(\frac{v_2\cos\alpha}{r}\right)\right]\right\}.\end{array}\right.$$

In dem letzten Posten dieser Gleichung kann man $v_2=cv_1$ setzen, und es ist dann c für den Stromkreis s eine Constante, sobald der Strom in s stationär ist, weil, wenn das nicht der Fall wäre, nicht jedes Element desselben so viel $+E.$ wie $-E.$ enthalten könnte. Demgemäss kann man, unter der Voraussetzung, dass ds einem geschlossenen stationären Stromkreise angehöre, statt $v_2\frac{d}{ds}\left(\frac{v_2\cos\alpha}{r}\right)$ schreiben $c^2v_1\frac{d}{ds}\left(\frac{v_1\cos\alpha}{r}\right)$, und dadurch reducirt sich Gl. (4) auf:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l}\xi'=qh\left\{\frac{x'-x}{r^3}(-ku)(v_1+v_2)\cos\alpha-k(v_1+v_2)\frac{d}{ds}\left(\frac{u}{r}\right)\right.\\ \qquad\left.-k(1-c^2)v_1\frac{d}{ds}\left(\frac{v_1\cos\alpha}{r}\right)\right\}.\end{array}\right.$$

Hierin ist $h(v_1+v_2)=hv_1(1+c)=i\,ds$.

Die beiden letzten Glieder der rechten Seite werden also:

$$-qik\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{u}{r}\right)ds+(1-c)\frac{d}{ds}\left(\frac{v_1\cos\alpha}{r}\right)ds\right\},$$

ein Ausdruck dessen Integral, über einen geschlossenen Stromkreis genommen, verschwindet. Berücksichtigen wir also nur die Kräfte, welche von geschlossenen Strömen ausgehen, so bleibt:

$$(6)\quad \xi'=-kqui\,ds\frac{x'-x}{r^3}\cos\alpha.$$

Ganz ebenso finden sich die beiden anderen Componenten; die Zusammenstellung ergibt:

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}' = qkuids\frac{x-x'}{r^3}\cos\alpha, \\ \mathfrak{y}' = qkuids\frac{y-y'}{r^3}\cos\alpha, \\ \mathfrak{z}' = qkuids\frac{z-z'}{r^3}\cos\alpha. \end{cases}$$

Es resultirt also eine nach r gerichtete Kraft, welche Anziehung ist, wenn das Stromelement mit der Translationsrichtung einen spitzen Winkel bildet.

Da das Clausius'sche Gesetz die Reciprocität der Einwirkungen nicht verbürgt, ist die Action von q auf ds durch die vorstehenden Gleichungen nicht unmittelbar gegeben. Man findet durch Wiederholung der Rechnung, wobei im letzten Glied der Gleichung (1) u statt $(v_1\cos\alpha + u)$ einzusetzen ist, für die Componente $\mathfrak{x}$:

$$(8)\qquad \mathfrak{x} = -kuqids\left\{\frac{x-x'}{r^3}\cos\alpha + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}.$$

Nun verschwindet zwar auch hier das Glied $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)ds$ bei der Integration über einen geschlossenen Stromkreis, aber da diese Integration nicht die Gesammtwirkung auf den Kreis darstellt, darf es deshalb nicht vernachlässigt werden. Setzen wir fest, dass bei Bestimmung des Winkels φ r von ds nach q hin gerechnet werde, so ist:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

und wir erhalten:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = kquids\left(\frac{x'-x}{r^3}\cos\alpha - \frac{\cos\varphi}{r^2}\right), \\ \mathfrak{y} = kquids\frac{y'-y}{r^3}\cos\alpha, \\ \mathfrak{z} = kquids\frac{z'-z}{r^3}\cos\alpha. \end{cases}$$

In $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ tritt kein Zusatzglied auf. Die Wirkung eines freien Quantums q auf ein Element eines geschlossenen Stromes setzt sich demnach aus zwei Componenten zusammen. Die erste ist die zu (7) reciproke, nach r gerichtete Anzie-

hung; wir bezeichnen sie abgekürzt mit A; die zweite $kquids\frac{\cos\varphi}{r^2}$ ist nach der Translationsrichtung thätig; sie drückt diejenigen Elemente ds rückwärts (gegen u), in welchen der Strom nach q hinfliesst. Abgekürzt heisse sie B. Es sei bemerkt, dass sie nach der ältern, 1875 veröffentlichten Fassung des Clausius'schen Gesetzes nicht auftreten würde. Wir wollen die Kräfte A und B, um eine kurze Benennung für sie zu haben, als „geokinetische" bezeichnen.

§ 2. Satz: Die aus der Componente A und ihrer Reciproken hervorgehenden Kräfte sind principiell nicht wahrnehmbar.

Beweis. Nach Gleichung (7) kann man sich irgend ein Stromelement ds (dasselbe kann auch Element eines Stromfadens in einem körperlichen Leiter sein), in dem der Strom i fliesst, mit einem fingirten Quantum f von freier Eletricität $f = -ku\cos\alpha ids$ erfüllt denken; die drei Componenten der Anziehung, welche dieses Hülfsquantum auf irgend einen Punkt des Raumes ausübt, sind dann identisch mit den drei Componenten (7) der geokinetischen Wirkung von ds auf denselben Punkt des Raumes.

Ist ein Stromkreis s gegeben, so denke man sich in jedem seiner Elemente die fingirte Ladung $f = -ku\cos\alpha ids$ angebracht; der ganze Stromkreis hat dann vermöge dieser Ladung electrostatisch auf jeden Punkt des Raumes dieselbe Wirkung, welche er geokinetisch vermöge seines Stromes übt. Nun wirkt er aber nicht blos auf äussere electrische Massen, sondern auch auf seine eigenen Theile, und da ein Stromkreis nothwendig ein Leiter ist, so ist das Ergebniss dieser Einwirkung eine Scheidung der beiden Electricitäten im Stromträger. Diese Scheidung muss so weit gehen, dass die dadurch erhaltene reelle Ladung des Kreises s auf jeden Punkt des Leiters Kräfte ausübt, welche mit den Kräften der fingirten Ladung im Gleichgewicht stehen. Ein solches Gleichgewicht ist erreicht, wenn jedes Element ds die Ladung $-f$ angenommen hat. Das ist also der Endzustand des Kreises: er ladet sich an jeder Stelle mit der reellen Ladung $-f$; dazu hat er an jeder Stelle die fingirte Ladung

$+f$, welche seine geokinetische Action repräsentirt. Beide heben einander nicht blos in ihrer Wirkung auf das Innere von s, sondern auch in ihrer Wirkung nach aussen jederzeit auf. Q. e. d.

NB. Es ist nicht blos die Componente A, sondern auch die statische Ladung f dem Experiment unzugänglich; denn wie jene durch diese, so wird diese durch jene in all ihren Wirkungen neutralisirt. Physikalisch ist nur zu verlangen, dass die Dichtigkeit von f nirgends unendlich werde, eine Bedingung, der offenbar genügt ist.

§ 3. Die Componente B verschwindet gleichfalls für jeden Stromkreis und für jeden leitenden Magnet. Nach dem Vorigen verschwindet aus der Wirkung eines Punktes q auf einen Stromkreis s die Componente A ohne weiteres. Durch eine andere Art der Neutralisation verschwindet nun aber auch die Componente B.

Denn diese, deren Werth $-kqui\frac{\cos\varphi}{r^2}ds$ ist, stimmt völlig überein mit der in die Richtung von ds fallenden Componente der electrostatischen Anziehung, womit q auf ein an der Stelle von ds angebrachtes Hülfsquantum $kuids$ von freier E. wirkt. Sind also statt eines Punktes q beliebig vertheilte Electricitätsmengen Q thätig, so berechnet sich deren Gesammtwirkung auf ds gerade so, wie die ds-Componente ihrer Gesammtanziehung auf jenes Hülfsquantum. Daraus folgt sofort, dass die geokinetische Gesammtwirkung B von Q in jedem Raume verschwindet, in welchem die Potentialfunction von Q constant ist. Stellt man nun aber einem Stromkreis oder Magnet s ein freies electrisches Quantum q gegenüber, so influenzirt dies bekanntlich die leitende Masse von s in der Art, dass die Potentialfunction im ganzen Innern von s constant wird. Demnach ist die Gesammtwirkung (von q plus der durch Influenz erzeugten Ladung) auf das Innere des Stromes s gleich Null.

Zu grösserer Deutlichkeit stelle ich im Folgenden sämmtliche Wirkungen zusammen, welche an einem Stromkreise auftreten, dem ein geladener Punkt q gegenübergestellt wird. Dabei werde die durch electrostatische Influenz auf s er-

zeugte Ladung p genannt, und es bedeute A_q die von q ausgeübte A-Componente u. s. w. Die freie Ladung, welche das Stromelement ids annimmt, heisse wie oben $-f$. Wir erhalten ausser der directen electrostatischen Anziehung von p auf q das Folgende:

1) die directe geokinetische Wirkung von q auf ids $= A_q + B_q$
2) die statische Anziehung von q auf $-f$ $= -A_q$
3) die geokinetische Wirkung von p auf ids $= A_p + B_p$
4) die statische Wirkung von p auf $-f$ $= -A_p$
5) die geokinetische Wirkung von ids auf p $= -A_p$
6) die zu 4) reciproke Wirkung von $-f$ auf p $= +A_p$.

Da $B_q + B_p$ nach dem Obigen gleich Null, ist die Gesammtsumme dieser Actionen gleich Null.

Somit ist die Beobachtung relativ ruhender Ströme und Ladungen auf der bewegten Erde für Verification des Clausius'schen Gesetzes überhaupt nicht zu gebrauchen.

III. *Ueber die Abhängigkeit der electrischen Leitungsfähigkeit der Kohle von der Temperatur; von W. Siemens.*

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissensch. zu Berlin, 5. Jan. 1880; mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Matthiessen machte zuerst[1]) auf die merkwürdige Eigenschaft der Kohle aufmerksam, bei höherer Temperatur die Electricität besser zu leiten als bei niedriger. Er fand für die am besten leitende und zugleich schwerste und festeste Modification derselben, die Gasretortenkohle, welche durch Zersetzung des überhitzten Leuchtgases entsteht und an den Wandungen der Retorten der Gasbereitungsanstalten abgesetzt wird, die specifische Leitungsfähigkeit (Quecksilber = 1 gesetzt) 0,0236 bei 25° C. und zwischen 0 und 140° eine Verminderung des Widerstandes um 0,00245 für jeden Grad C.

1) Matthiessen, Pogg. Ann. **103**. p. 428. 1858.

Beetz fand die Thatsache der Zunahme der Leitungsfähigkeit bei steigender Temperatur nur bei sogenannter künstlicher Kohle bestätigt, die aus Kohlenpulver mit einem geringen bindenden Zusatze von Theer oder Zuckerlösung zusammengepresst und darauf erhitzt wird, wodurch die Zuckerlösung in entweichendes Gas und Kohle zerlegt wird, aber nicht für Kohlenstäbe, die aus Retortenkohle geschnitten waren. Bei diesen konnte er keine Zunahme der Leitungsfähigkeit bei Erhöhung der Temperatur beobachten. Die Zunahme der Leitungsfähigkeit der sogenannten künstlichen Kohle erklärte Beetz durch einen stärkeren Druck, welchen die nur lose zusammenhängenden Kohlentheilchen aufeinander ausüben müssten, wenn sie durch Erwärmung ausgedehnt werden. Ich selbst hatte öfters Gelegenheit, mich bei anderweitigen Versuchen zu überzeugen, dass Matthiessen's Angabe richtig war. Um so auffallender war mir das Resultat einer neueren Arbeit von Felix Auerbach, vorgelegt von Riecke der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, Jan. 1879, dahin gehend, dass die Gasretortenkohle sich hinsichtlich der electrischen Leitungsfähigkeit wie die Metalllegirungen verhalte, indem ihr Leitungswiderstand bei wachsender Temperatur in steigendem Verhältniss zunehme. Dass ein so exacter Beobachter, wie Matthiessen, sich so vollständig geirrt haben sollte, konnte ich kaum annehmen, obschon auch Beetz bei der Gasretortenkohle keine Zunahme der Leitungsfähigkeit finden konnte; die Versuche Auerbach's waren jedoch andererseits offenbar mit Sorgfalt und mit guten Instrumenten durchgeführt. Leider hatten alle drei Beobachter ihre Versuche nicht detaillirt genug beschrieben, um durch eine kritische Untersuchung derselben den Grund der Verschiedenheit ihrer Resultate ermitteln zu können. Bei der allgemeinen Anordnung der Auerbach'schen Versuche liess sich im wesentlichen nur die Art der Erhitzung der Kohlenstäbe und der geringe Widerstand derselben bemängeln. Die gleichmässige Erwärmung der ca. 6 mm dicken und 122 mm langen Stange in einer lufterfüllten Kammer bis zu einer bestimmten Temperatur dürfte sich nur sehr schwer ausführen lassen. Wie

die Erwärmung der Luft ausgeführt wurde, ist aus der Beschreibung der Versuche nicht zu erkennen. Die Annahme, dass die Temperatur des Stabes mit der des Thermometers übereingestimmt habe, wenn keine weitere Veränderung des Widerstandes am Galvanometer zu bemerken war, dürfte für exacte Messungen wohl nicht zulässig sein. Da nur Mittel aus mehreren Messungen für jede Temperatur angegeben sind, ohne Angabe der Abweichung der einzelnen Messungen voneinander, so fehlt jede Controle der Richtigkeit der vorausgesetzten Temperaturen der Kohlenstäbe. Immerhin ist die Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Resultate gross genug, um den Gedanken auszuschliessen, dass das Endresultat der Messungen des Hrn. Auerbach nur auf Beobachtungsfehlern beruhen könnte. Da eine unzweifelhafte Entscheidung der Frage, ob und in welchem Grade der Widerstand der Kohle bei Temperaturänderungen zu- oder abnimmt, nicht nur wissenschaftlich von grösstem Interesse ist, sondern auch eine grosse technische Wichtigkeit erlangt hat, so entschloss ich mich zu einer eingehenden Untersuchung derselben.

Ich liess mir cylindrische Kohlenstäbe verschiedener Dicke und Länge anfertigen. Dieselben wurden an den Enden etwa 15 mm weit galvanisch verkupfert. Dann wurden die Drähte einer Kupferlitze an die verkupferten Enden gelegt und dieselben mit feinem Kupferdrahte einige Male umwunden, um sie dadurch an der Kohle zu befestigen. Das so vorbereitete Kohlenende wurde nun wieder in die Kupferlösung gebracht, und so viel Kupfer darauf niedergeschlagen, dass die Kupferdrähte mit der ersten Verkupferung und dadurch auch mit der Kohle fest verwachsen waren. Die Erwärmung der so vorbereiteten Kohlen geschah in dem Bade einer nicht leitenden Flüssigkeit. Für niedrige Temperaturen bis 60° C. benutzte ich ein schweres Petroleum, für höhere bis 270° C. geschmolzenes Paraffin. Die Flüssigkeit befand sich in einem Blechtroge und konnte durch untergesetzte Brenner erhitzt oder durch Einsetzen des Troges in Schnee abgekühlt werden. Der ca. 260 mm lange, 75 mm breite und 80 mm hohe Trog wurde durch eine Schieferplatte

bedeckt, die von zwei kupfernen Bolzen durchbohrt war, welche an beiden Enden geeignete Klemmen trugen. In die unteren Klemmen wurden die Kupferenden der Kohle eingespannt und darauf zu noch grösserer Sicherheit mit denselben verlöthet. Vermittelst der oberen Klemmen des Schieferdeckels des Troges wurde die Kohle in eine Brückencombination eingeführt, welche aus zwei genau abgeglichenen Widerständen im Verhältniss 1 : 100 und einer Widerstandsscala, die $^1/_{10}$ bis 10 000 Q.-E. einzuschalten gestattete, bestand. Als Galvanometer diente ein empfindliches Spiegelgalvanometer mit vier Drahtrollen und einem astatischen Magnetnadelpaare. Zur Controle der Einrichtung und Constatirung seiner Empfindlichkeit, sowie der Genauigkeit der Messungen wurde zunächst anstatt der Kohle eine zweite Widerstandsscala eingeschaltet, und constatirt, dass beim Gleichgewicht die Widerstände der beiden Scalen sich immer im Verhältniss 1 : 100 befanden, wenn der Widerstand der Zuleitungen, der auf 0,033 Q.-E. bestimmt wurde, in Rechnung gezogen wurde. Die Einschaltung von $^1/_{10}$ Q.-E. im grossen Brückenzweige über oder unter das Gleichgewicht bewirkte eine Ablenkung des Spiegels um ca. 20 Scalentheile, wenn 1 Einheit im kleinen Brückenzweige eingeschaltet war. Die Temperatur des Bades wurde mittelst zweier verglichener Fuess'scher Thermometer abgelesen, von denen das eine Temperaturen von -30 bis $+70$ mit $0{,}1^\circ$ Theilung, das andere Temperaturen von 10 bis 300° mit Gradtheilung abzulesen gestattete. Das Thermometer wurde durch einen seitlichen Schlitz in der Schieferplatte in das Bad eingeführt, welcher gestattete, dasselbe in der Nähe des Kohlenstabes in der ganzen Länge des Bades hin- und herzuführen, um dadurch eine gleichmässige Temperatur desselben und die Uebereinstimmung der Temperaturen des Thermometers und der Kohle zu bewirken. Es gelang mir auf diese Weise leicht, eine beliebige Temperatur hervorzubringen und so lange zu erhalten, bis mein Sohn Wilhelm, der mir bei diesen Versuchen assistirte, die Einstöpselung des Gleichgewichtswiderstandes vollendet hatte. Es wurden gewöhnlich mit derselben Kohle die Temperaturen von 0° bis 250° C.

ein oder auch mehrere male in auf- und absteigender Reihenfolge durchgemessen.

Nr. der Kohle	Temperatur	Abgelesener Widerstand	Widerstand − Zuleitung	Temp.-Differenz	Widerstands-Differenz	do. für 1° C.	Coëfficient
		E	*E*		*E*	*E*	
1	270	1,223	1,190				
	260	1,226	1,193	10°	−0,003	−0,0030	0,00025
	240	1,233	1,200	20	−0,007	−0,0035	0,00029
	220	1,242	1,209	20	−0,009	−0,0045	0,00038
	200	1,249	1,216	20	−0,007	−0,0035	0,00029
	180	1,255	1,222	20	−0,006	−0,0030	0,00025
	160	1,259	1,226	20	−0,004	−0,0020	0,00016
	140	1,267	1,234	20	−0,008	−0,0040	0,00033
	120	1,273	1,240	20	−0,006	−0,0030	0,00024
	100	1,283	1,250	20	−0,010	−0,0050	0,00040
	80	1,292	1,259	20	−0,009	−0,0045	0,00036
	60	1,313	1,280	20	−0,021	−0,0105	0,00087
	40	1,321	1,288	20	−0,008	−0,0040	0,00031
	25	1,326	1,293	15	−0,005	−0,0033	0,00026
	3	1,333	1,300	22	−0,007	−0,0032	0,00025

Mittlerer Coëfficient = 0,000 331

Der Widerstand der Zuleitungsdrähte betrug bei sämmtlichen Messungen 0,033 Q.-E.; derselbe ist in Verticalcolumne 4 von dem abgelesenen Widerstande in Col. 3 abgezogen. In Col. 8 ist die procentische Zunahme der Leitungsfähigkeit zwischen zwei benachbarten Messungen für 1° Temperatur berechnet. Die Messungen derselben Kohle wichen an verschiedenen Tagen erheblich voneinander ab, was sich zum Theil aus Temperaturschwankungen der Zimmerluft erklärt, welche das Verhältniss des Widerstandes der Brückenzweige etwas veränderte. Genaue Versuche mit höherer Erhitzung als 270° (die noch durch ein Paraffinbad zu erreichen ist) sind nur schwierig anzustellen, da es an einer sichern Erhitzungsmethode, sowie an bequemen Mitteln, die Temperatur der Kohle mit Genauigkeit zu bestimmen, fehlt. Um jedoch Gewissheit darüber zu erlangen, ob der Widerstand der Kohle auch bei Erhitzungen zur Glühhitze noch stetig abnimmt, liess ich ein ca. 200 mm langes Kupferrohr von ca. 200 mm lichter Weite anfertigen. Vermittelst zweier durchbohrter Gypspfropfen, durch welche die Kupferansätze der Kohlen-

enden hindurchgeführt waren, ward der Kohlenstab so ziemlich in der Mitte des Kupferrohres schwebend erhalten. Das so vorbereitete Kupferrohr ward nun auf einen kleinen offenen Chamotteofen gelegt und durch ein in demselben angefachtes gleichmässiges Holzkohlenfeuer erhitzt. Der Widerstand der Kohle war bei Lufttemperatur vor der Erhitzung = 1,452 Q.-E. Während der Erhitzung verminderte sich der Widerstand fortdauernd. Als das Kupferrohr so weit erhitzt war, dass kleine Zinnstückchen in Berührung mit seiner Oberfläche schmolzen, war der Widerstand = 1,375 Q.-E., und als auch Zinkstückchen schmolzen, war er 1,298 Q.-E. Nimmt man die Schmelztemperatur des Zinnes zu 230° C. und die des Zinkes zu 423° C. an, so ergibt dies, die Zimmertemperatur zu 20° C. angenommen, zwischen ihr und der Zinnschmelztemperatur eine procentische Zunahme der Leitungsfähigkeit von 0,00025 und zwischen dieser und der Zinkschmelztemperatur eine Zunahme von 0,00029 für jeden Temperaturgrad. Wahrscheinlich hatte die Kohle noch nicht vollständig die Temperatur der Röhre angenommen. Es wurde darauf die Erhitzung bis zur dunkeln Rothgluth des Kupferrohrs fortgesetzt. Der Widerstand der Kohle veränderte sich dabei sehr unregelmässig und schwankend. Als die Temperatur des Rohres jedoch einige Minuten in der Rothgluth erhalten war, wurde er constant und auf 1,300 bestimmt. Es wurden nun die Kohlen schnell aus dem Ofen entfernt und das Rohr schnell abgekühlt. Dabei nahm der Widerstand der Kohle stetig zu, bis er, als das Rohr die Zimmertemperatur wieder angenommen hatte, auf 1,685 stehen blieb. Die beobachtete bedeutende Vergrösserung des Widerstandes, den die Kohle nach erfolgter Abkühlung im Vergleich mit der Messung bei Beginn des Versuches zeigte, ist wohl wesentlich dem Umstande zuzuschreiben, dass der im Rohre enthaltene Sauerstoff einen Theil der Kohle verzehrt und ihren Widerstand dadurch dauernd vergrössert hatte. Dafür spricht auch die Vergrösserung des Widerstandes während der langsamen Erhitzung von der Zinkschmelzhitze bis zur Rothgluth. Während der schnellen Abkühlung von dieser bis zur Zimmertemperatur konnte keine in Betracht

kommende weitere Verbrennung der Kohle eintreten. Nimmt man die Rothgluth zu 900° C. an, so ergibt die Widerstandszunahme während der Abkühlung eine procentische Verminderung der Leitungsfähigkeit von 0,00033 pro Grad, eine Uebereinstimmung mit den bei niedrigen Temperaturen gefundenen Werthen, die bei der Unsicherheit der Temperaturannahme wohl nur zufällig ist. Als erwiesen ist aber durch diesen Versuch anzusehen, dass die Leitungsfähigkeit der Kohle bis zur Gluthhitze hin zunimmt.

Der Umstand, dass ich wie Matthiessen die Verbindung der Kohlenenden mit den Zuleitungsdrähten durch galvanische Verkupferung hergestellt hatte, während Auerbach sie dadurch bewirkte, dass er die Kohlenenden in geschmolzenes Loth tauchte und darin erkalten liess, machte es mir wahrscheinlich, dass hierin der hauptsächliche Grund der unrichtigen Ergebnisse der Versuche des letztern zu suchen sei. Ich habe bereits im Jahre 1860[1]) auf die Beobachtung hingewiesen, dass Metalldrähte, wenn sie ohne vorherige Amalgamirung in ein Quecksilberbad getaucht werden, einen Uebergangswiderstand zeigen, der wohl unzweifelhaft von einer schlecht leitenden, auf der Oberfläche der Metalle durch Molecularanziehung verdichteten Luftschicht, die der Strom durchlaufen muss, herrührt. Da die Kohlenstäbe, welche Auerbach benutzte, bei geringer Länge verhältnissmässig stark (etwa 6 mm im Quadrat) waren, mithin nur wenig Widerstand hatten, so konnte der Widerstand einer ähnlichen Luftschicht, die auf der Oberfläche der Kohle wegen ihrer viel grössern Verdichtungskraft für Gase auch viel stärker sein wird als bei den Metallen, einen überwiegenden Einfluss auf seine Messungsresultate ausgeübt haben. Zur Prüfung dieser Vermuthung brach ich einen Kohlenstab, der bereits zu Messungen gedient und eine entschiedene Vergrösserung der Leitungsfähigkeit bei wachsender Temperatur gezeigt hatte, etwa 20 mm von dem Kupferüberzuge des einen Endes ab und tauchte das freie Ende nach Auerbach's Methode in geschmolzenes Loth, an

1) W. Siemens, Pogg. Ann. **110.** p. 11. 1860.

welches nach der Erkaltung der andere Zuleitungsdraht zur Brücke festgelöthet wurde. Der Erfolg war ein überraschender. Der Widerstand des jetzt etwa 10 mm langen Kohlenstabes vergrösserte sich ganz entschieden bei steigender Temperatur! Ein anderer Versuch mit einem längern Kohlenstabe, dessen eines Ende ebenfalls nach Auerbach's Methode durch Loth mit dem Brückendrahte verbunden wurde, ergab zwar noch eine Zunahme der Leitungsfähigkeit bei wachsender Temperatur, doch war der Coëfficient derselben ein weit kleinerer gewoden. Eine genaue Messung erwies sich als unthunlich, da der Widerstand, namentlich bei höheren Temperaturen, zu schwankend war.

Endlich wurde noch ein Gasretortenkohlenstab von quadratischem Querschnitte, von 63 qmm Durchschnittsfläche und 120 mm Länge, zunächst an den Enden mit Loth umgossen, und dann der Widerstand bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Die Messungen waren sehr inconstant, doch war ein entschiedenes Ansteigen des Widerstandes bei steigender Temperatur zu beobachten. Darauf wurden die Lothkappen entfernt und die Enden galvanisch verkupfert. Es ergab sich jetzt bei steigender Temperatur eine ebenso entschiedene und ganz regelmässige Verminderung des Widerstandes.

Durch diese Versuche ist wohl unzweifelhaft erwiesen, dass bei der von Auerbach benutzten Methode der Umgiessung der Kohlenenden mit Loth keine directe Verbindung der Kohle mit dem Metalle erzielt wird, dass im Gegentheil wie beim Eintauchen eines nicht direct amalgamirbaren Metalles in Quecksilber eine die Kohle und das umhüllende Metall trennende Schicht verdichteter Luft auch nach der Erkaltung des Lothes fortbesteht, und dass die abweichenden Resultate Auerbach's hierdurch ihre vollständige Erklärung finden.

Es ist hiermit aber die Frage noch nicht entschieden, ob die den Leitungswiderstand vergrössernde Luftschicht selbst die Eigenschaft besitzt, ihren Leitungswiderstand bei wachsender Temperatur in dem beobachteten Maasse zu vergrössern. Es ist auch denkbar, dass die ungleiche Ausdeh-

nung des Metalls und der Kohle eine Lockerung der Verbindung und eine Verminderung der Zahl der wirklichen Berührungspunkte zwischen Kohle und Metall herbeiführt. Dass bei der galvanischen Verkupferung eine trennende Luftschicht nicht auftritt, ist wohl namentlich dem Umstande zuzuschreiben, dass die Flüssigkeit das auf der Kohlenoberfläche condensirte Gas auflöst, bevor der Kupferniederschlag beginnt. Es empfiehlt sich aus diesem Grunde auch, die Kohlenenden vor Beginn der Verkupferung auszukochen oder doch einige Zeit in der erhitzten Verkupferungsflüssigkeit stehen zu lassen. Anstatt der Verkupferung habe ich mich auch mit gutem Erfolge der Vergoldung der Kohlenenden in einer heissen Cyangoldlösung bedient. Mit der Goldschicht wurden dann die kupfernen Zuleitungen durch Kupferniederschlag in der beschriebenen Weise metallisch verbunden.

Mit einem auf diese Weise mit Zuleitungen versehenen runden Kohlenstabe von 2,43 mm Dicke und 148 mm Länge zwischen den Kupferansätzen, welche aus einem ausgewählten, sehr dichten und feinkörnigen Stück Berliner Gasretortenkohle geschnitten waren, wurde dann die folgende Versuchsreihe erzielt. Bei dieser sowie bei den späteren Versuchsreihen wurde sowohl der Widerstand gemessen, als auch die Temperatur längere Zeit constant gehalten, als bei den früheren Versuchen.

Berliner Gasretortenkohle.

Widerstand gemessen	Widerstand wirklich	Temperatur	Differenz des Widerstandes	Differenz der Temperatur	Coëfficient der Zunahme pro Grad	Bemerkungen
2,2443	2,2095	75				
			0,0183	25	−0,000329	
2,2260	2,1912	100				Die Kohle wurde zum ersten male benutzt.
			0,0190	25	−0,000347	
2,2070	2,1722	125				
			0,0206	26	−0,000364	
2,1864	2,1516	151				
			0,0205	24	−0,000397	
2,1659	2,1311	175				
2,1660	2,1312	173,5				
			0,0156	22,5	−0,000323	
2,1816	2,1468	151				Am folgenden Tage gemessen.
			0,0184	24,5	−0,000346	
2,2000	2,1652	126,5				
			0,0192	25,3	−0,000347	
2,2192	2,1844	101,2				
			0,0193	25,2	−0,000347	
2,2385	2,2037	76				

Widerstand gemessen	Widerstand wirklich	Temperatur	Differenz des Widerstandes	Differenz der Temperatur	Coëfficient der Zunahme pro Grad	Bemerkungen
2,2385	2,2037	76				
			0,0189	25	−0,000343	
2,2196	2,1848	101				
			0,0168	24	−0,000320	
2,2028	2,1680	125				
			0,0171	24,5	−0,000323	
2,1857	2,1509	149,5				
			0,0183	25,5	−0,000334	
2,1674	2,1326	145				
			0,0182	26,5	−0,000322	
2,1492	2,1144	201,5				

Die specifische Leitungsfähigkeit der Gasretortenkohle ist hiernach bei 0° C. 0 0136 (Quecksilber = 1) und der Coëfficient der Zunahme der Leitungsfähigkeit 0,000 345 pro Grad Celsius.

Die sogenannte künstliche Kohle, welche jetzt vorzugsweise zur Erzeugung des electrischen Lichtes benutzt wird, wird in der Regel aus gepulverter Gasretortenkohle mit Theer oder concentrirter Zuckerlösung als Bindemittel gepresst und durch wiederholtes Glühen und Tränken dicht und gut leitend gemacht. Für diese hatte Beetz eine beträchtliche Zunahme der Leitungsfähigkeit bei wachsender Temperatur constatirt, während er eine solche bei Kohlenstäben, die aus Gasretortenkohlen geschnitten waren, nicht fand. Es erschien nicht unwahrscheinlich, dass die aus zersetztem Theer oder Zucker entstandene Kohle, welche die Gaskohlenpartikelchen trennt, andere Eigenschaften besitzt als die Gasretortenkohle, da die aus festen Kohlenwasserstoffen reducirte Kohle sehr hartnäckig auch noch bei starker Erhitzung Wasserstoff zurückhält und dann ein sehr schlechter Leiter ist, wie z. B. die nicht sehr stark und anhaltend geglühte Holzkohle. Eine solche schlecht leitende Zwischenschicht konnte auch den Coëfficienten der Zunahme der Leitungsfähigkeit wesentlich beeinflussen. Der Versuch hat dies jedoch nicht bestätigt. Es wurden zwei verschiedene französische, künstliche, runde Kohlenstäbe in der beschriebenen Weise mit Zuleitungen versehen und ihr Widerstand bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Es ergaben sich dabei folgende Tabellen:

Kunstkohle Nr. 1

Länge 148 mm, Querschnitt 4,8208 qmm.

Gemessener Widerstand	Kohlenwiderstand	Temperatur	Differenz der Widerstände	Differenz der Temperatur	Coëfficient	Bemerkungen
1,4091	1,3850	230				
			0,0142	30	−0,000338	
1,4233	1,3692	200				
			0,0211	50	−0,000298	Der Widerstand der Zuleitungen betrug 0,8241.
1,4444	1,4203	150				
			0,0209	50	−0,000288	
1,4653	1,4412	100				
			0,0231	50	−0,000317	
1,4884	1,4643	50				
			0,0118	24,6	−0,000429	
1,5002	1,4761	25,4				
				Mittel	−0,000314	

Kunstkohle Nr. 2

Länge 155 mm, Querschnitt 4,465 qmm.

1,5035	1,4692	75				
			0,0097	25,5	−0,000261	
1,4948	1,4595	100,5				
			0,0108	24,5	−0,000302	
1,4830	1,4487	125				
			0,0118	25	−0,000326	
1,4712	1,4369	150				
			0,0114	26	−0,000306	
1,4598	1,4255	176				
			0,0098	23	−0,000299	Der Widerstand der Zuleitungen betrug 0,0343.
1,4500	1,4157	199				
			0,0099	24	−0,000289	
1,4506	1,4163	190				
			0,0100	25	−0,000278	
1,4605	1,4262	175				
			0,0110	25	−0,000320	
1,4705	1,4362	150				
			0,0114	25	−0,000312	
1,4821	1,4478	125				
			0,0114	24,8	−0,000312	
1,4935	1,4592	100				
				Mittel	−0,000301	

Es folgt hieraus, dass die künstlichen, durch Pressung aus Kohlenpulver erzeugten Kohlenstangen, ebenso wie die aus Gasretortenkohle geschnittenen, bei wachsenden Temperaturen eine grössere Leitungsfähigkeit zeigen, und dass die Zunahme nicht ganz so gross ist wie bei der Gasretortenkohle. Die von anderen Beobachtern gefundenen abweichenden Resultate werden wahrscheinlich ebenfalls auf mangelhafte Verbindung der Enden zurückzuführen sein.

Bei den beschriebenen Versuchen stellt sich keine bestimmte Vergrösserung oder Verminderung des Zunahmecoëfficienten mit der Temperatur heraus. Ich nehme auch um so mehr Anstand, aus den mitgetheilten Messungen in dieser Hinsicht eine bestimmte Ansicht auszusprechen, als sie überhaupt nicht so bestimmte und sichere Resultate angegeben haben, wie die angewendete Methode sie erwarten

liess. Ob diese bisher nicht erklärlichen Unregelmässigkeiten darin zu suchen sind, dass die leitende Verbindung auch bei der galvanischen Verkupferung noch nicht als vollkommen zu betrachten ist, oder ob die Kohle ähnlichen, ihre Leitungsfähigkeit ändernden Einflüssen unterliegt, wie das Selen, muss einer eingehenderen Untersuchung vorbehalten bleiben. Die Erklärung, welche Beetz für die Erscheinung der Zunahme der Leitungsfähigkeit der Kohle bei steigender Temperatur gegeben hat, würde nur auf Kohlenpulver oder lose zusammenhängende Kohle anwendbar sein, welche von festen, sich weniger wie die Kohle ausdehnenden Wänden umschlossen war. Da das Gesammtvolumen des Körpers in demselben Verhältniss wächst, wie das seiner Theile, so kann eine vergrösserte Pressung der Theile bei gleichmässiger Temperaturerhöhung bei nicht eingeschlossenen Körpern auch nicht eintreten. Beetz führt zur Unterstützung seiner Hypothese einige Versuche an, die er mit Metallspähnen angestellt hat. Sowohl durch äussere Compression als durch Erhitzung verminderte sich der Leitungswiderstand derselben. Dass dies eintreten muss, wenn wirklich eine Compression des Pulvers auftritt, ist wohl unzweifelhaft und auch durch Versuche vielfach bestätigt. Wenn das Pulver von Gefässwänden theilweise umschlossen war, konnte daher sehr wohl eine Verminderung des Widerstandes eintreten. Wahrscheinlich ist aber auch die auf der Oberfläche der Theilchen des Pulvers condensirte Luft von Einfluss gewesen. Der Rückschluss vom Pulver auf eine zusammenhängende Masse ohne umschliessende Wände, wie die geformte Kohle, kann aber nicht zugestanden werden. Dass selbst ein starker Druck die Leitungsfähigkeit der geformten Kohle nicht ändert, ist durch einen einfachen Versuch nachzuweisen. Versieht man die Enden eines Kohlencylinders durch galvanische Verkupferung mit sicheren, angelötheten Zuleitungen, und setzt dann den Kohlenstab in der Richtung seiner Axe einer starken Pressung aus, so verändert sich der Leitungswiderstand desselben nicht im mindesten, wenn man selbst den Druck bis zur Zertrümmerung der Kohle steigert. Es zeigt dies, dass die gut imprägnirte und gebrannte geformte Kohle

als fester, wenn auch noch poröser Körper und nicht mehr als nur lose zusammenhängendes, verschiebbares Pulver zu betrachten ist. In noch viel höherem Grade gilt dies von der ungepulverten, festen Gasretortenkohle. Der Bildungsprocess dieser Kohle geht in ähnlicher Weise vor sich, wie die galvanische Abscheidung der Metalle, da, wie schon hervorgehoben wurde, die Kohle in unmittelbarer Berührung mit der Fläche der Retortenwand frei wird und sich durch Molecularanziehung im Augenblick des Freiwerdens aneinander legt. Die Gasretortenkohle ist mithin nicht als zusammengebackenes Pulver, sondern als eine feste Kohlenmasse zu betrachten. Dass das specifische Gewicht der Gasretortenkohle ein verschiedenes ist, wird wohl mehr eine Folge eingeschlossener kleiner Hohlräume und der Einschliessung fremder Körper als einer Verschiedenheit der Masse selbst zuzuschreiben sein. Die allgemein gültige Eigenschaft der Kohle, in höherer Temperatur besser zu leiten, muss daher als eine Eigenschaft der Kohlenmaterie selbst und nicht als eine Folge ihrer Structur aufgefasst werden.

Eine Analogie für dies Verhalten der Kohle bildet das der Electrolyte — zu denen nach Hittorf auch Einfachschwefelkupfer und andere zusammengesetzte feste Körper zu rechnen sind — und von einfachen Körpern Tellur und Selen. Letzteres ist bei schneller Abkühlung aus dem geschmolzenen Zustande ein Nichtleiter — wie auch der Diamant. Wird es bis 100° C. erwärmt, so wird es krystallinisch und leitet dann die Electricität, wie die Kohle, in der Weise, dass seine Leitungsfähigkeit bei wachsender Temperatur zunimmt. Das Selen verliert bei der Erwärmung auf 100° C. latente Wärme; es ist daher wahrscheinlich, dass diese Verminderung der latenten Wärme es zu einem Leiter der Electricität gemacht hat. Wenn man schnell erstarrtes, sogenanntes amorphes Selen bis in die Nähe seines Schmelzpunktes, d. i. bis über 200° C. erhitzt und längere Zeit in dieser Temperatur erhält, so verliert es noch mehr latente Wärme und nimmt dann, wie ich gezeigt habe[1]), eine weit grössere

1) Siemens, Pogg. Ann. **159.** p. 127. 1876.

Leitungsfähigkeit an. Es leitet die Electricität aber jetzt wie ein Metall, d. i. seine Leitungsfähigkeit nimmt bei Erhöhung der Temperatur ab. Es erscheint daher wahrscheinlich, dass die Eigenschaft des krystallinischen, noch latente Wärme haltenden Selens, die Electricität wie die Electrolyte und die Kohle in der Weise zu leiten, dass die Leitungsfähigkeit mit der Temperatur zunimmt, daher rührt, dass es noch latente Wärme enthält. Da latente wie freie Wärme ein Hinderniss der Electricitätsleitung bilden oder wahrscheinlich sogar die Ursache des Leitungswiderstandes sind, und da die Stabilität allotroper Zustände, welche Wärme gebunden halten, durch Erhitzung sich vermindert oder ganz verloren geht, wobei dann die latente Wärme entweicht, so muss das Hinderniss, welches die letztere dem Durchgange des electrischen Stromes entgegensetzt, bei erhöhter Temperatur geringer werden. Die bessere Leitungsfähigkeit der Kohle bei höherer Temperatur lässt sich daher wie beim krystallinischen Selen erklären, wenn man annimmt, dass die Kohle wie dieses eine latente Wärme enthaltende, allotrope Modification eines hypothetischen metallischen Kohlenstoffs ist.

Für diese Annahme spricht auch das Verhalten der Kohlenstäbe, zwischen denen ein Davy'scher Lichtbogen gebildet wird. Das electrische Licht hat bekanntlich seinen Sitz namentlich auf der hell glühenden Oberfläche der positiven Kohle. Von dieser geht nun auch der Transport der Kohle zur negativen Kohle aus. Stellt man zwei nicht zu starke Kohlenstäbe mit ebenen parallelen Grenzflächen einander dicht, etwa 1 mm voneinander, gegenüber und lässt einen sehr starken Strom zwischen ihnen übergehen, so findet ein schnelles Uebergehen der Kohle von der positiven zur negativen Kohle statt, und die letztere wächst eben so schnell, als die obere verzehrt wird. Die Folge ist, dass der Zwischenraum fortwandert, ohne merklich grösser zu werden. Es erklärt sich dies dadurch, dass die Kohle während ihres Transportes durch den Bogen nicht verbrennen kann, weil der schmale Zwischenraum das Eindringen der Luft nicht oder doch nur in sehr geringem Maasse gestattet. Den

durch gleichgerichteten Strom gebildeten electrischen Lichtbogen pflegt man so zu reguliren, dass der Bogen gerade die nöthige Länge hat, um alle transportirte Kohle zu verbrennen. In diesem Falle bemerkt man deutlich durch ein lichtschwächendes Glas, dass es wesentlich die öft wechselnden Stellen der positiven Kohlenoberfläche, von denen der Davy'sche Bogen grösstentheils ausgeht, sind, die sehr hell leuchten. Es ist also nicht, wie wohl angenommen wird, das Aufschlagen der durch den Bogen losgerissenen und transportirten Kohlentheilchen auf die negative Kohle, sondern das Loslösen derselben von der positiven Kohle, was das Licht wesentlich erzeugt. Diese Wärmeerzeugung an der Trennungsstelle der losgelösten von der festen Kohle ist kaum anders zu erklären als dadurch, dass der Kohlenstoff durch den electrischen Strom in metallischer Form fortgeführt wird, dass mithin die latente Wärme der Kohle an der Trennungsstelle frei wird und dadurch diese vorzugsweise hoch erhitzt.

IV. *Ueber die Erscheinungen in Geissler'schen Röhren unter äusserer Einwirkung;* *von Edm. Reitlinger und Alfr. v. Urbanitzky.*

(Aus dem 70. Bande der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien. II. Abth. October-Heft. Jahrg. 1879, mitgetheilt von den Hrn. Verf.)

I. Abtheilung.

Vorbemerkungen.

§ 1. Die Geissler'schen Röhren waren noch nicht lange im Besitze der Physiker, so wurde von Riess und anderen Beobachtern wahrgenommen, dass sich die durch den Ruhmkorff leuchtend gemachte Gassäule in denselben einem genäherten Finger oder guten Electricitätsleiter zubiege. So lange man nur diese Erscheinung kannte, mochte ihr näheres Studium für unwichtig gehalten werden, da es keine Schwie-

rigkeit bot, sie durch Influenzwirkung der electrisch leuchtenden Gassäulen im Innern der Röhre auf die von aussen genäherten guten Leiter nach den bekannten Gesetzen electrischer Vertheilung zu erklären, wie dies durch Riess und andere geschah. Ganz anders stellt sich aber die Sache, wenn man Geissler'sche Röhren findet, bei welchen die leuchtende Gassäule statt sich dem Finger oder genäherten guten Leiter zuzubiegen, vor demselben zurückweicht, also statt von demselben angezogen zu werden, abgestossen wird.

Als wir daher am 9. März 1876 in der Sammlung der zweiten physikalischen Lehrkanzel an der Wiener technischen Hochschule zwei solche Röhren fanden, welche Abstossung statt Anziehung bei Annäherung eines Fingers oder guten Leiters zeigten, so schien uns diese Beobachtung besonderer Beachtung werth, um so mehr, da die Erscheinung sehr auffällig war und von merkwürdigen Nebenumständen begleitet wurde. Die Röhren nämlich, bei denen wir damals die Abstossung fanden, die beiden erwähnten und eine Holtz'sche Trichterröhre, zeigten zugleich mit der Abstossung ein eigenthümliches grünes Licht im Glase an der dem abstossenden Finger oder Leiter abgewandten Seite. Da aber nach späteren Beobachtungen die Abstossung der leuchtenden Gassäulen in Geissler'schen Röhren in weitaus grösserem Umfange auftritt, als das sie bei den anfänglich untersuchten Röhren begleitende grüne Licht, so scheint uns jetzt eine von jener Nebenerscheinung zunächst absehende selbständige Behandlung der Abstossung sowohl der Wichtigkeit der Sache zu entsprechen, als auch für eine unbefangene Würdigung der Thatsachen geeigneter.

Die fragliche Abstossung war aus Anlass einer Untersuchung über die Einwirkung des Magnetes auf die Schichtung des electrischen Lichtes gefunden worden. Hierüber sowohl, als über die bis dahin gemachten Beobachtungen bei den gedachten drei Röhren, betreffend die Abstossung und das sie begleitende grüne Licht, berichtete auf Grundlage unserer gemeinschaftlichen Versuche Professor Reitlinger in einer von der k. Akademie der Wissenschaften in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlung vom 6. April

1876: Ueber einige merkwürdige Erscheinungen in Geissler'schen Röhren.[1]) Schon in dieser Abhandlung ist die Ansicht ausgesprochen, die neue Abstossung sei sowohl für die Theorie der Electricität, als auch für die Frage nach dem Ursprunge der Abstossung der Kometenschweife durch die Sonne von Bedeutung. Wir haben seitdem äusserst zahlreiche Versuche über die Abstossung und Anziehung der leuchtenden Gassäulen in Geissler'schen Röhren durch genäherte Leiter gemacht. Im Folgenden wollen wir der Kürze wegen erstere Electrorepulsion, letztere Electroattraction nennen. Ferner wurden sowohl durch den ursprünglichen Ausgangspunkt: Einwirkung des Magnets auf die Schichtung des electrischen Lichtes, als durch das Streben, Wesen und Bedeutung der neuen Erscheinung zu ergründen, viele Versuche und Beobachtungen veranlasst, welche nicht unmittelbar die Electrorepulsion und Attraction, sondern andere damit mehr oder weniger in Zusammenhang stehende Erscheinungen betrafen. Die Experimente wurden von Anfang März 1876 bis weit in das Studienjahr 1877—1878 fortgesetzt, und drei vorläufige Notizen im Anzeiger der k. Akademie der Wissenschaften gaben von ihren wichtigeren Resultaten Nachricht.[2]) Die vorliegende Abhandlung strebt nun, eine übersichtliche und zusammenhängende Darstellung unserer Resultate unter Mittheilung der interessanteren Einzelheiten unserer Versuche zu liefern. Eine Vollständigkeit in letzterer Hinsicht ist durch die zu grosse Zahl der Versuche ausgeschlossen.

Fundamentalthatsachen der Electrorepulsion und Attraction bei geschlossenem Inductionsstrome.

§ 2. Die beiden Röhren in der Sammlung der zweiten physikalischen Lehrkanzel, an welchen wir die Electrorepulsion zuerst wahrnahmen, waren von Dr. Geissler in Bonn die eine mit Br, die andere mit $SnCl_2$ bezeichnet worden. Ihr Anblick, sowie ihr Spectrum stimmten jedoch überein und

1) Reitlinger, Wien. Ber. **73.** (2) 1876.

2) Anzeiger d. k. Akad. d. Wissensch. Jahrg. 1876, Nr. XIV (18. Mai), Nr. XX (12. Octbr.), Jahrg. 1877, Nr. X (19. April).

legten die Vermuthung nahe, dass der ursprünglich eingefüllte Stoff nicht mehr der Träger der Lichterscheinung sei, sondern entweder von den Electroden absorbirt oder auf den Glaswänden niedergeschlagen wurde. Licht und Spectrum waren nicht sehr hell, und letzteres zeigte auf einem wenig deutlichen Hintergrunde, dessen helle Theile von Luftspuren in den Röhren herrühren mochten, mit hinreichender Schärfe, um ihre Identität festzustellen, die drei Banden jenes Kohlenstoffspectrums, welches man am blauen Rande der Leuchtgasflamme wahrnimmt.

Unter der Voraussetzung, dass die ursprünglich eingefüllten Stoffe absorbirt oder niedergeschlagen worden waren, erklärt sich dieser Befund leicht durch die Einfettung der beim Auspumpen und Füllen der Röhren verwendeten Verbindungsstücke. Sah man nur auf die Aufschrift der Röhren, so lag die Annahme nahe, man habe es mit etwas Aehnlichem zu thun, wie beim Diamagnetismus, wo die sonst zur Anziehung führende magnetische Vertheilungswirkung sich für bestimmte Stoffe, welche in diesem Falle sogar die Mehrzahl bilden, in eine zur Abstossung führende verwandelt. Der Spectralbefund überzeugte uns aber sogleich von der Unzulässigkeit einer solchen Annahme, welche auch durch alle späteren Beobachtungen völlig ausgeschlossen ist; er führte uns vielmehr nach dem oben Gesagten auf die Vermuthung, in den von uns untersuchten Röhren sei der leuchtende Rest, wahrscheinlich bestehend aus Zersetzungsproducten von Fett und von Luftspuren, in einem viel verdünnteren Zustande, als in den gewöhnlich benutzten Geissler'schen Röhren, bei denen man die Anziehung des Lichtes durch genäherte Leiter sah, und eben von dieser höheren Verdünnung rühre die Umwandlung der Anziehung in Abstossung her. Diese Vermuthung hat sich vollständig bestätigt, und durch sie wurde unsere weitere Untersuchung auf den Weg geleitet, der uns zu den ferneren Resultaten führte.

§ 3. Die dritte Röhre aus der uns zu Gebote stehenden Sammlung, welche die Abstossung zeigte, war eine Holtz'sche Trichteröhre. Dementsprechend war sie durch drei Glastrichterchen, welche sämmtlich ihre Spitze mit capillarer

Oeffnung nach derselben Seite kehrten, in vier Abtheilungen oder Kammern getheilt. Wir wollen Poggendorff's ausführlicher Monographie über die Holtz'sche Trichterröhre[1]) folgen und von einer positiven Lage der Röhre sprechen, wenn die positive Electricität des vom Ruhmkorff erzeugten Oeffnungsstromes durch die den Trichterspitzen gegenüber befindliche Drahtelectrode eintritt, von einer negativen aber, wenn dies durch die entgegengesetzte Drahtelectrode geschieht. In der positiven Lage zeigte nun unsere Röhre scharf begrenzte, an ihrem jedesmaligen Orte fest beharrende ziegelrothe Schichten; nur an der negativen Electrode war eine Umfluthung bläulichen Glimmlichtes und an jeder Trichterspitze ein ähnliches bläuliches Licht in Form eines Büschels bemerkbar. In der negativen Lage dagegen war der grösste Theil der Röhre von einem violetten, viel weniger hellen und nebelartigen Lichte mit schwach angedeuteten, platzwechselnden Schichten erfüllt. Nur bei letzterer Lage bekamen wir mit dem Ruhmkorff mittlerer Grösse, den wir bei unseren Versuchen verwandten, eine deutliche Abstossung, welche um so lebhafter wurde, je mehr wir uns der negativen Drahtelectrode näherten, jedoch nur so lange, als wir diesseits des dunklen Raumes blieben. Das negative Glimmlicht war ganz und gar unempfindlich gegen den genäherten Leiter; es wurde weder abgestossen, noch angezogen. Der grössern Helligkeit wegen konnte man diese absolute Unempfindlichkeit des Glimmlichtes an der negativen Electrode in der positiven Lage noch besser wahrnehmen und auch für die bläulichen Büschel an den Trichterspitzen, die wir später gleichfalls als Glimmlicht kennen lernen werden, deutlich constatiren. In dieser Lage erstreckte sich übrigens die Unempfindlichkeit auf das gesammte Licht; auch die ziegelrothen stabilen Schichten wurden vom genäherten Leiter weder abgestossen, noch angezogen. Wir werden erfahren, dass die Unempfindlichkeit des Glimm- oder was dasselbe ist, Kathodenlichtes gegen genäherte Leiter eine ganz ausnahmslose, nach unserer Ansicht bedeutungsvolle Thatsache

1) Poggendorff, Pogg. Ann. **134.** p. 1 ff. 1868.

ist. Da ferner Anblick und spectroskopischer Befund auf eine Füllung der Röhre mit atmosphärischer Luft hinwiesen, so bestätigte sich, dass die Abstossung, die man ja in der negativen Lage ganz deutlich sah, nicht an besondere, seltener in Geissler'schen Röhren befindliche Stoffe gebunden war. Die andere Vermuthung aber, dass sie höherer Verdünnungsgrade, als in den gewöhnlichen käuflichen Röhren bedürfe, war nicht ausgeschlossen; später erfuhren wir auch wirklich, dass wir aus dem ausgedehnteren Glimmlichte und den stabilen Schichten der positiven Lage auf eine höhere Verdünnung in unserer Röhre, als die gewöhnliche, schliessen durften. Zugleich zeigte der Umstand, dass die Abstossung nur bei negativer Lage stattfand, die Abhängigkeit der Electrorepulsion vom Widerstande der Schliessung und der dadurch veränderten Stromstärke, denn bekanntlich ist der Widerstand einer Holtz'schen Trichterröhre je nach der positiven oder negativen Lage sehr verschieden, und rührt vorzüglich hiervon der Unterschied der Erscheinungen in den beiden Lagen her.

§ 4. Da durch die Beobachtungen an fertigen käuflichen Röhren die Vermuthung angeregt worden war, die Electrorepulsion sei an höhere Verdünnungsgrade geknüpft, als in Geissler'schen Röhren gewöhnlich vorhanden sind, so mussten vor allem Versuche wünschenswerth erscheinen, bei welchen man gleichzeitig den Grad der Verdünnung und das Auftreten der Electrorepulsion studiren konnte. Dazu war nöthig, dass wir selbst die Verdünnung in den Röhren besorgten und während deren Verbindung mit der Luftpumpe beobachteten. Zunächst stand uns nur eine zweistiefelige Ventilluftpumpe zu Gebote, mit welcher man bestenfalls eine Verdünnung von 1,5 mm erreichte. Wir veranlassten daher sogleich alles Nöthige, um sobald als möglich die Versuche mit einer Quecksilberluftpumpe fortzusetzen, begannen sie aber vorläufig mit der Ventilluftpumpe. Ein Zweiweghahn aus Messing, dessen Anfertigung nur wenig Zeit erforderte, wurde auf der Luftpumpe festgeschraubt. Das Ansatzrohr, durch welches die Röhre gefüllt und entleert werden konnte, und das bei käuflichen fertigen Röhren abgeschmolzen ist,

wurde an seinem offenen Ende in den Zweiweghahn eingekittet. Durch diesen konnte man also die Röhren entweder mit der Pumpe oder einem Gasometer in Verbindung setzen.[1]) Die verwendeten Röhren waren sogenannte Spectralröhren, bei welchen bekanntlich zwischen zwei weiteren Abtheilungen ein capillares Mittelstück eingeschaltet ist. Sie waren von zweierlei Form: entweder hatten sie, wie die meisten käuflichen Spectralröhren, zwei verticale Zuleitungsdrähte, während das Ansatzrohr an einer Seitenwand der unteren Abtheilung angebracht war; oder das Ansatzrohr bildete die verticale Fortsetzung der unteren Abtheilung, wo sodann von den Zuleitungsdrähten nur der obere vertical, der untere aber horizontal stand. Wir experimentirten mit Luft, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlensäure und Leuchtgas. Mittelst eines zwischen dem Gasometer und dem Zweiweghahne eingeschalteten Chlorcalciumrohres trockneten wir die Gase. Zwar konnten wir nicht hoffen, bei der angewandten Ventilluftpumpe eine grosse Reinheit der von uns in die Röhren eingeführten Gase zu erzielen, und immer machte sich, je weiter man in der Verdünnung fortschritt, die Beimischung von Luft geltend. Dennoch lehrten äusserer Anblick und spectroskopische Untersuchung, dass bei wiederholtem Auspumpen und Füllen, überhaupt bei sorgfältigem Verfahren, die eingeführten Gase überwogen. Zwei bis vier grosse Bunsen'sche oder sechs bis acht Smee'sche Elemente lieferten den primären Strom für den Ruhmkorff, den wir in Gang setzten, noch bevor die Verdünnung den Durchgang der Entladung gestattete. So konnten wir das Verhalten des Lichtes in den Röhren von den höchsten Barometerständen an, bei denen es bemerklich wird, bis zu den niedersten uns zugänglichen

1) Im ganzen war die Anordnung dieselbe, welche Professor Reitlinger in seiner Abhandlung: „Ueber die Schichtung des electrischen Lichtes" (Wien. Ber. **43.** p. 16. 1861) angegeben hat. Nur fehlte am Ansatzrohre das kleine Messingstück mit Hahn, das seinerzeit zum gleichen Zwecke benutzt worden war, wie der Geissler'sche Hahn bei Wüllner'schen Röhren, und am angeführten Orte beschrieben ist. Da wir die Ventilluftpumpe möglichst bald durch die Quecksilberluftpumpe zu ersetzen strebten, für diese aber Wüllner'sche Röhren bei Geissler bestellten, so sahen wir von diesem Zwischenhahne ab.

verfolgen. Bei unserem Ruhmkorff schwankt der Barometerstand, bei welchem sich die ersten Spuren des Leuchtens zeigen, zwischen 40 und 20 mm; je nach dem Gase und der Stärke des Stromes.

Die Lichterscheinungen, welche man wahrnimmt, sind folgende: Zuerst wird an der Spitze der Drahtanode ein feiner, nicht sehr hell leuchtender Faden sichtbar, der bei geringer Fortsetzung der Verdünnung, die Mitte der Röhre einnehmend, bis zur Drahtkathode reicht. Die Ausdrücke „Anode" und „Kathode" beziehen sich selbstverständlich auf die Richtung des im Ruhmkorff inducirten Oeffnungsstromes. Bei fernerer Verdünnung tritt das Glimmlicht an der Kathode auf, und der dunkle Raum fängt an, den gleichzeitig heller und breiter werdenden Lichtfaden von derselben zu trennen. Wie Glimmlicht und dunkler Raum deutlicher werden, so füllt auch immer mehr das von der Spitze der Drahtanode ausgehende Licht die Röhre ihrer ganzen Weite nach aus; es stellt sich der bekannte Anblick der meisten käuflichen Geissler'schen Röhren her. Insofern derselbe durch die drei Bestandtheile: Anoden- oder Büschellicht, dunkler Raum, Kathoden- oder Glimmlicht, charakterisirt wird, beharrt er von seinem Auftreten an bis zu den höchsten, von uns nicht nur mittelst der Ventilluftpumpe, sondern auch der Quecksilberluftpumpe erreichten Verdünnungsgraden; nur dehnten sich Glimmlicht und dunkler Raum mit der Verdünnung immer mehr aus. Ganz besondere Ausnahmsfälle waren es, in welchen der dunkle Raum gänzlich fehlte, oder an seiner Stelle ein eigenthümliches, graugrünes, fahles Licht auftrat; aber auch in diesen Fällen konnte man Büschel- und Glimmlicht deutlich unterscheiden. Auch im weitern Verlaufe dieser Abhandlung werden wir die durch den dunklen Raum geschiedenen beiden Lichterscheinungen stets entweder Büschel- und Glimmlicht, oder Anoden- und Kathodenlicht nennen, dagegen aber die gleichfalls üblichen Ausdrücke positives und negatives Licht vermeiden, weil sie Vorstellungen von hypothetischen Spannungen erwecken, welche nach dem electroskopischen Befund der Seitenwände nicht einmal wahrscheinlich sind. Das Anoden- oder Büschel-

licht selbst bietet je nach den Umständen einen sehr verschiedenen Anblick dar, nicht nur in Farbe und Spectrum, sondern bald bildet es einen continuirlichen Lichtschwall, und bald ist es geschichtet. Im letztern Falle sind die Schichten entweder stabil oder instabil; sie beharren entweder fortdauernd an denselben Stellen der Röhre oder wogen unruhig hin und her. Zwar lehrt der rotirende Spiegel, dass auch im letztern Falle die Schichten bei der einzelnen Ruhmkorffentladung bestimmte Plätze einnehmen, welche nur von Entladung zu Entladung wechseln, und dass einzig und allein hierin der Unterschied der beiden Arten Schichten besteht; dennoch zeigt sich derselbe von solchem Einfluss auf die Electroattraction und Repulsion, dass es uns ohne dessen Beachtung unmöglich wäre, das Gesehene vollständig zu beschreiben. Ueberhaupt erweisen sich die geschilderten Erscheinungsformen des Lichtes als vom höchsten Einflusse auf Electroattraction und Repulsion; je nachdem man Lichtfäden, continuirliches Licht, stabile oder instabile Schichten vor sich hat, ist auch die Einwirkung der genäherten Leiter wesentlich verschieden.

§ 5. Beginnen wir mit den Beobachtungen an Lichtfäden. Man nimmt hier Anziehungen und Abstossungen wahr; nicht nur bei Berührung der Röhren, sondern auch, wenn der Finger oder Leiter mehrere Centimeter von deren Wand entfernt war. So weit unsere Beobachtungen es beurtheilen liessen, fanden wir die chemische Natur des eingeführten Gases von entscheidendem Einfluss. Bei Luft und Wasserstoff bekamen wir im allgemeinen Anziehungen, bei Sauerstoff und Kohlensäure Abstossungen. Bei den letztgenannten Gasen sah man zuweilen zwei Fäden, von denen der eine abgestossen, der andere angezogen wurde. Da die Farbe dieser beiden Fäden verschieden war, so wird man bei der geringen Reinheit des eingeführten Gases, welche die Ventilluftpumpe zu erzielen gestattet, wohl annehmen dürfen, dass mit dem entgegengesetzten Verhalten der beiden Fäden eine chemische Verschiedenheit ihrer leuchtenden Theilchen Hand in Hand ging. Die Unruhe der Fäden einerseits und ihre schwache Lichtentwicklung andererseits erlaubte uns nicht,

diese Annahme spectroskopisch zu prüfen. Wohl aber stellten wir an einer Röhre, welche die eben besprochene Erscheinung zeigte, eine fernere, hierher gehörige Beobachtung an. Die Röhre selbst war eine Spectralröhre von der zweiten, im vorigen Paragraphen angegebenen Form: mit einem verticalen oberen Drahte und einem horizontalen, durch die Seitenwand der unteren Abtheilung eintretenden zweiten Drahte. Das Ansatzrohr bildet hierbei die gerade Fortsetzung der Röhre und liegt genau in derselben Richtung, wie ihr capillares Mittelstück. Als wir nun die Röhre nicht weit von der Anode mit zwei einander gegenüber befindlichen Fingern berührten, traten an die Glaswand zwei Fäden unter den beiden Fingern und zwei Fäden in einer Ebene, senkrecht auf derjenigen, welche man durch die beiden ersterwähnten Fäden legen konnte; die Schnittebene beider Fäden bildete der Draht der Anode. Hier muss man die beiden Fäden unter den Fingern als von diesem angezogen, die beiden anderen als von ihnen abgestossen ansehen. Auch hier ist die Annahme wahrscheinlich, gleichzeitig mit dem verschiedenen Verhalten der beiden Fadenpaare sei eine chemische Differenz derselben vorhanden. Manchmal zeigten auch verschiedene Abtheilungen der Röhre, je nachdem sie der Anode oder Kathode näher lagen, ein verschiedenes Verhalten, und manchmal wurde der leuchtende Faden aus der Ferne abgestossen und bei Berührung der Glaswand angezogen.

Bei Wasserstoffgas wurde der feine, kaum 0,5 mm dicke Faden in dem der Anode zunächst liegenden weiten Theile der Spectralröhre in sehr zahlreiche, schmale und scharf gesonderte Schichten getheilt.

Ihr Anblick erinnerte an die schönen Perlschichten, die ein Gemenge von Wasserstoffgas mit trockener Luft bei einem Drucke von 6—8 mm im capillaren Theile einer Spectralröhre zeigt.[1]) Vermuthlich bildete sich unser geschichteter Faden in einem ähnlichen Gemenge, nur von anderem Mischungsverhältnisse. Der Einwirkung des Leiters oder Fingers stellte diese Schichtung kein Hinderniss entgegen.

1) Wien. Ber. **48.** p. 19. 1861.

§ 6. Bei fernerer Verdünnung tritt, wie schon oben gesagt wurde, an die Stelle des Fadens der gewöhnliche Anblick Geissler'scher Röhren. Bei allen von uns untersuchten Gasen: Luft, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlensäure und Leuchtgas wurde nun zwischen 12 und 4 mm Barometerstand das Anodenlicht, welches sich bekanntlich von der Spitze der Anode bis zu dem vor der Kathode befindlichen dunklen Raum, also beinahe durch die ganze Länge der Röhre erstreckt, vom genäherten Leiter oder Finger in deutlichster Weise angezogen. Dies war die längst gekannte Erscheinung. Sank jedoch der Barometerstand tiefer, so nahm diese Anziehung ab, und nachdem bei einem gewissen Verdünnungsgrade weder Anziehung noch Abstossung sichtbar war, bekam man bei noch grösserer Verdünnung Abstossung. Sie war zwar nicht für alle Theile des Lichtes gleich deutlich und konnte überhaupt nur dann gut constatirt werden, wenn man bis unter 2 mm auspumpte, doch war sie zweifellos bei allen angewandten Gasen mehr oder weniger bemerkbar. Bildete das Anodenlicht einen continuirlichen ungeschichteten Lichtschwall oder Schein, so war dies für Anziehung und Abstossung besonders günstig, doch war beides auch an den instabilen Schichten sichtbar, welche sich bei Einführung von Wasserstoff oder feuchter Luft zeigten. Dagegen nahm man bei allen Gasen und Verdünnungsgraden eine völlige Unempfindlichkeit des Kathoden- oder Glimmlichtes wahr, das sich mit wachsender Verdünnung immer mehr ausbreitet; es wurde durch genäherte Leiter oder Finger weder angezogen noch abgestossen. Bei Füllungen mit Sauerstoffgas unterschieden wir drei verschieden gefärbte Theile, indem der sonst dunkle Raum ein eigenthümliches, graugrünes, fahles Licht ausstrahlte. Bei Annäherung von Leitern war dieses Licht ebenso unempfindlich, wie das Glimmlicht. Der Umstand, dass uns die Röhren zwischen 8 und 4 mm Barometerstand den hellsten und schönsten Anblick darboten, also bei Verdünnungsgraden, wo stets Anziehung und zwar in bemerkbarster Weise auftrat, löste uns eine Frage, die sich uns seit unserer ersten Wahrnehmung der Electrorepulsion wiederholt aufgedrängt hatte. Je mehr

wir in unserer Untersuchung fortschritten, desto häufiger trafen wir auf Electrorepulsion, ja unter 2 mm Barometerstand bei sämmtlichen gewöhnlichen Gasen.

Wie so war dieses Erscheinungsgebiet der Aufmerksamkeit früherer Forscher entgangen? Offenbar weil man die käuflichen Röhren meistens bei jenem Zustande zuschmilzt und versendet, wo sie am besten als Schaustück dienen, und dies ist bei einem Barometerstande der Fall, welcher die Anziehung durch genäherte Leiter oder Finger besonders deutlich zeigt.[1])

§ 7. So waren wir mittelst der Ventilluftpumpe zu der Wahrnehmung gelangt, dass die dem Versuche unterworfenen gewöhnlichen Gase bei 2 mm Barometerstand eine beginnende Abstossung durch den genäherten Leiter oder Finger zeigten, welche jedoch weder so deutlich, noch so lebhaft war, wie bei den in den §§ 2 und 3 besprochenen käuflichen Röhren. Um so mehr mussten wir, entsprechend der Vermuthung, in letzteren herrsche ein höherer Verdünnungsgrad, den Wunsch hegen, unsere Versuche mit der Quecksilberpumpe fortzusetzen. Als wir daher anfangs Juli 1876 eine solche nebst den erforderlichen Wüllner'schen Röhren von Dr. Geissler in einer des berühmten Verfertigers würdigen Ausführung erhalten und in einem Jolly'schen Gestelle passend angebracht hatten, schritten wir unverzüglich zu den Experimenten. Bekanntlich versteht man unter Wüllner'schen Röhren solche, welche an ihren beiden Enden zwei Ansatzröhren mit Geissler'schen Glashähnen besitzen. An die Quecksilberpumpe wurden diese Röhren durch ein gabelförmiges Zwischenstück aus Glas angesetzt. Anfänglich verwandten wir eine Gabel mit zwei Zinken und Wüllner'sche Röhren von der Form der Spectralröhren. Um dieselben luftdicht mit der Gabel zu verbinden, wurden sie meistens in die Zinken eingekittet. Da aber das Ein- und Auskitten mit mancherlei Uebelständen verbunden war und insbesondere nicht ohne Gefahr für die Gabel selbst vollzogen werden konnte, so be-

1) Die in den §§ 4—6 mitgetheilten Beobachtungen lagen bereits unserer vorläufigen, im Anzeiger der k. Akademie vom 18. Mai 1876 veröffentlichten Note zu Grunde.

stellten wir später eine neue Gabel mit eingeschliffenen Wüllner'schen Röhren. Diese zweite Gabel hatte vier Zinken mit Einschliffen, von denen eine durch einen Glasstöpsel verschlossen war, während in die drei anderen die Röhren passten. Von diesen hatte nur eine die Form von Spectralröhren, die beiden anderen waren von einfacherer Form. Je mehr wir glaubten, in der Electroattraction und Repulsion eine fundamentale Erscheinung erblicken zu dürfen, um so mehr mussten wir bemüht sein, sie unter möglichst einfachen Bedingungen zu studiren. Daher liessen wir die beiden anderen Röhren nur aus einem einzigen Cylinder ohne capillaren Theil bestehen. Die Zuleitungsdrähte waren in der Richtung der Axe, die Ansatzröhren mit den Geissler'schen Glashähnen seitwärts an den abgerundeten Enden eingeschmolzen. Die Länge der Röhren betrug 250 mm, ihre Breite 18 mm. Nachdem wir im October 1876 die zweite Gabel bekommen hatten, stellten wir weitaus die meisten unserer späteren, sehr zahlreichen Versuche über Electroattraction und Repulsion mit diesen Röhren von einfachster Form an; zwar pflegten wir auch die Spectralröhre an der Füllung mit dem Gase und an der Verdünnung theilnehmen zu lassen, aber nur zum Zwecke, uns die spectroskopische Prüfung der Reinheit des Gases zu erleichtern.

Hand in Hand mit der Anwendung der Quecksilberpumpe ging unser Bestreben, vollkommen reine Gase unseren Experimenten zu unterwerfen, wobei wir auf sehr grosse Schwierigkeiten trafen. Schon die gänzliche Beseitigung der Spectrallinien des Wasserstoffgases, wenn wir mit irgend einem andern Gase experimentirten, war für uns mit einem grössern Aufwande von Zeit und Mühe verbunden. Wir trockneten die Gase vor ihrem Eintritte in die Luftpumpe mittelst U-förmiger Chlorcalciumröhren, und dies Verfahren erwies sich als ausreichend. Aber in der Luftpumpe selbst, in den Verbindungsstücken zwischen der saugenden Glasbirne und der Gabel mit den Röhren, war ein gefülltes Chlorcalciumrohr als trocknende Substanz unbrauchbar; wir brachten diesfalls nicht nur die Wasserstofflinien nicht zum gänzlichen Verschwinden, sondern auch die Verdünnung selbst liess sich

durch noch so langes Pumpen nicht unter 1,5 mm Druck bringen. Es war, als ob das Chlorcalcium die bei höherem Drucke aufgenommene Feuchtigkeit bei so niedrigem Drucke wieder ausstiesse. Dagegen erwiesen sich sowohl concentrirte Schwefelsäure, als wasserfreie Phosphorsäure in Stangen als geeignete Trockenmittel innerhalb der Luftpumpe, mit deren Hilfe wir bei einiger Ausdauer das Verschwinden der Wasserstofflinien und daher wohl jeder Feuchtigkeit erzielten.

In dem Verbindungsrohre zwischen Luftpumpe und Gabel brachten wir einen dichten Knäuel von Golddrähten an. Er füllte die ganze Weite des Rohres aus und war dazu bestimmt, den Uebertritt von Quecksilberdämpfen aus der Luftpumpe in die Versuchsröhren zu verhindern. Auch liessen wir nicht nur die Gase, welche wir möglichst rein bereiteten, längere Zeit durch die Luftpumpe und die Röhren strömen, sondern wir wiederholten überdies den Act der Füllung und Verdünnung mehrere mal. Trotz all dieser Bemühungen zeigten uns alle Gase, wenn der Druck unter 0,5 mm sank, denselben Anblick: einige wenige, vier bis zehn, ziegelrothe stabile Schichten, die dem genäherten Leiter gegenüber unempfindlich waren, und welche wir auch erhielten, wenn wir mit trockener atmosphärischer Luft experimentirten. Woher dies kam, lehrten uns kleine Luftblasen, welche, wenn man das Toricellische Vacuum in der Glasbirne der Pumpe herstellte, ab und zu im Quecksilber aufstiegen. Offenbar stammten sie daher, dass jedesmal bei der Verdrängung des vom Vacuum angesaugten Gases das Quecksilber gegen einen Raum wirkte, welcher mit der äusseren Luft in Verbindung stand. Um hierbei Staub und Feuchtigkeit abzuhalten, schaltete Geissler zwischen dem Glasrohre, worin das Quecksilber emporsteigt, und der äussern Luft eine Chlorcalciumröhre und eine mit Baumwolle gefüllte Röhre ein. Die Blasen zeigen aber, dass das Quecksilber auch von der über ihm befindlichen Luft selbst Spuren aufnimmt, welche es sodann in das Vacuum ausstösst. Je länger man nun fortpumpt, desto mehr wird nicht nur diese Luft, mit welcher das Quecksilber beim Verdrängungsacte in Berührung kommt, wegen

Verminderung des auszutreibenden Gases der atmosphärischen gleichen, sondern werden auch die vom Quecksilber aufgenommenen Spuren atmosphärische Luft der Versuchsröhre zuführen, da sie sich unaufhörlich erneuern, während das ursprünglich eingefüllte Gas immer weniger wird. Bei genügend langem Pumpen überwiegt also stets die auf dem angegebenen Wege zuerst in die Birne und dann in die Röhre gelangende atmosphärische Luft, um so mehr, als auch die länger dauernde Verbindung zwischen dem Vacuum und der übrigen Luftpumpe, welche bei höheren Verdünnungsgraden erforderlich ist, die Diffusion begünstigt. Nach erkannter Ursache war es jedoch nicht schwer, den Uebelstand zu beheben. Hatte schon Geissler durch Röhren mit Chlorcalcium und Baumwolle dafür gesorgt, dass nur trockene, staubfreie Luft mit dem Quecksilber in Berührung kam, so mussten wir diese Luft durch das Gas selbst, mit welchem wir experimentiren wollten, ersetzen. Wir verlängerten zu diesem Zwecke die von Geissler angebrachte Röhrenleitung und liessen sie statt in die freie Luft unter einem Glockengasometer aus Glas einmünden, der mit dem zum Versuche bestimmten Gase gefüllt war. Hatten wir daher mit diesem Gase die Luftpumpe nebst Röhrenleitung anfänglich gefüllt und sodann die Communication der letzteren mit dem Glockengasometer hergestellt, so kam auch bei dem Verdrängen des angesaugten Gases das Quecksilber stets nur mit dem unvermischten Versuchsgase in Berührung, wir experimentirten gewissermassen in einer aus demselben bestehenden Atmosphäre. Nun erreichten wir wirklich, dass je nach dem Gase selbst bei den stärksten Verdünnungen die Erscheinungen in Farbe und Spectrum verschieden waren und zwar schon beim ersten sorgfältigen Füllen und Auspumpen. Wenn wir daher diese Operationen auch noch mehrmals wiederholten, bevor wir die Beobachtungen begannen, so durften wir wohl annehmen, unsere darauf folgenden Versuche nicht nur bei höherem Barometerstand mit hinreichend reinen Gasen zu beginnen, sondern auch noch bei den stärksten Verdünnungen mit solchen fortzusetzen.

§ 8. Bevor wir noch im Stande waren, mittelst der eben geschilderten Vorbereitungen möglichst reine Gase dem Experimente zu unterwerfen, erweiterten wir bereits unsere Kenntnisse der Electroattration und Repulsion mit Hülfe der Quecksilberpumpe: durch Experimente mit atmosphärischer Luft. Bis zu einem Drucke von 2 mm stimmten die Wahrnehmungen natürlich mit denen überein, die wir schon bei der Ventilluftpumpe an Spectralröhren gemacht hatten, um so mehr, da anfänglich unsere Wüllner'schen Röhren von derselben Form waren. Indem wir aber die Verdünnung unter 2 mm Druck fortsetzten, gaben wir der Repulsion, welche wir schon mit der Ventilluftpumpe bemerkt hatten, eine viel grössere, jeden Zweifel ausschliessende Deutlichkeit. Hier wie dort war es die Abtheilung zwischen Anode und capillarem Theil, wo die Anziehung zwischen Büschellicht und genähertem Leiter bei der Druckverminderung in eine Abstossung verwandelt wurde, während sie in der Abtheilung zwischen dem capillaren Theile und der Kathode nur abnahm, schon durch die immer weitere Ausbreitung des indifferenten blauen Glimmlichtes und des dunklen Raumes zwischen diesem und dem Büschellicht. Die Farbe des Lichtbüschels war anfangs dieselbe wie in käuflichen Stickstoffröhren, ein blasses Violett mit einem röthlichen Stich; sie ging aber mit abnehmendem Druck in ein grünliches Weiss über. Gleichzeitig traten im Spectroskop die Sauerstoff- und Wasserstofflinien immer mehr hervor, während die Helligkeit des Stickstoffspectrums abnahm. Diese Aenderung von Farbe und Spectrum war bemerklicher, wenn man der Luft ihre natürliche Feuchtigkeit gelassen hatte, als wenn sie vor ihrem Eintritt in die Versuchsröhre durch eine Chlorcalciumröhre sorgfältig getrocknet wurde. In beiden Fällen bildete das Büschel, als es vor dem Leiter zurückzuweichen anfing, eine continuirliche Lichtfluth, welche sich von der Anode aus bis zum capillaren Theil immer mehr in der Röhre ausbreitete, und so lange es diese Form behielt, wuchs die Abstossung mit steigender Verdünnung. Bevor aber diese noch sehr weit getrieben war, begannen bereits helle Schichten die Continuität der Lichtfluth zu unterbrechen. Anfangs war

der Helligkeitsunterschied, durch welchen die Schichten bemerklich wurden, nur gering, aber sogleich zeichneten sie sich durch den Umstand aus, dass sie, so lange der Druck derselbe blieb, ganz genau an derselben Stelle der Röhre auftraten. Bei fernerer Verdünnung wurden sie stets heller und deutlicher, während das continuirliche Licht, auf dessen Hintergrund sie sichtbar wurden, immer mehr verblasste. Schliesslich bestand das ganze Büschel zwischen Anode und capillarem Theil nur noch aus einigen stabilen Schichten, welche durch dunkle Zwischenräume getrennt waren. Von dem ersten Auftreten der stabilen Schichten an, welches ungefähr bei 1 mm Druck stattfand, verminderte sich die Electrorepulsion; auch schien sie, so weit sie noch bemerklich blieb, sich weniger auf jene, als auf das noch sichtbare continuirliche Licht zu beziehen. Als das letztere ganz verschwunden war, und sich zwischen den Schichten dunkle Zwischenräume gebildet hatten, da hörte sie auch ganz und gar auf. Die nun in der Röhre leuchtenden Schichten waren ebenso vollständig unempfindlich gegenüber dem genäherten Leiter, wie die stabilen Schichten unserer Trichterröhre, denen sie auch in der Form ganz und gar glichen. Schon vorher war aber auch in der Abtheilung der Kathode, wo sich inzwischen Glimmlicht und dunkler Raum immer mehr ausgebildet hatten, jede Einwirkung genäherter Leiter verschwunden. Als daher, noch ehe der Druck auf 0,30 bis 0,25 mm gesunken war, das Büschellicht in allen weiteren Theilen der Röhre nur noch aus stabilen Schichten bestand, war überhaupt keine Spur von Electroattraction und Repulsion mehr vorhanden, woran auch ferneres Pumpen nichts mehr änderte.

§ 9. Als die im § 7 geschilderten Vorbereitungen getroffen waren, um mit reinen Gasen zu operiren, verfolgten wir ebenso wie in Luft in verschiedenen Gasen die Erscheinungen der Electroattraction und Repulsion vom ersten Aufleuchten eines Fadens an bei 40—20 mm Druck bis zu den hohen, nur mit der Quecksilberpumpe erreichbaren Verdünnungen. Um die Versuche nicht zu verzögern, warteten wir die Wüllner'schen Röhren von einfacherer Form nicht erst

ab, sondern begnügten uns ebenso, wie bei der Luft, mit solchen von der Form der Spectralröhren. Die diesbezüglichen Experimente stellten wir mit Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff und Kohlensäure an. Wir fügten zu den mit der Ventilluftpumpe untersuchten Gasen Stickstoff hinzu, weil uns das Spectroskop gelehrt hatte, bei höheren Verdünnungsgraden seien Schlüsse aus dem Verhalten der Luft auf das des Stickstoffs unzulässig, und andererseits sahen wir vom Leuchtgase ab wegen seiner schwankenden und complicirten Zusammensetzung.

Was nun zunächst die Beobachtungen an Lichtfäden betrifft, so führten sie uns zu keinen Generalisationen, daher wir uns über dieselben nur kurz fassen wollen. Nach den im § 5 beschriebenen Vorversuchen mit der Ventilluftpumpe hatte man allerdings hoffen können, zwischen der chemischen Natur des Lichtfadens und dessen Anziehung oder Abstossung durch den Leiter eine einfache Beziehung zu finden. Dies erwies sich aber als illusorisch, da man in der Wüllner'schen Röhre bei einem und demselben Gase Anziehung und Abstossung bekam. Häufig ging nämlich die Abstossung in Anziehung über, wenn der früher von der Glaswand der Röhre getrennte Leiter diese berührte; öfters fand auch Anziehung oder Abstossung statt, je nachdem der Leiter auf einen der Anode ferner oder näher gelegenen Theil des Lichtfadens einwirkte, und zuweilen wurde schon dadurch Abstossung in Anziehung umgewandelt, dass man, während der Druck und die übrigen Umstände gleich blieben, Widerstand und Stromstärke veränderte. Dennoch war, wie es auch nach den erwähnten Vorversuchen nicht anders sein konnte, der Einfluss der chemischen Verschiedenheit des Lichtfadens auf dessen Verhalten nicht unbedeutend; er war gross genug, um zu verhindern, bezüglich der anderen einwirkenden Factoren, wie Druck Widerstand, Stromstärke, Entfernung des Leiters von Röhre und Faden etc. zu bestimmten allgemeinen Gesichtspunkten zu gelangen.

Ganz anders jedoch verhielt es sich, wenn die Röhre das gewöhnliche Aussehen käuflicher Geissler'scher Röhren

angenommen hatte, also Büschellicht, dunkler Raum und Glimmlicht in derselben deutlich zu unterscheiden waren. Von dem Eintritte dieses Stadiums an liessen sich gemeinsame Grundzüge für den Gang der Erscheinungen bei fortschreitender Verdünnung angeben, welche für alle Gase, inclusive Luft, gelten. Im § 6 haben wir bereits solche Grundzüge bis zu jenen Verdünnungsgraden entworfen, welche unsere Ventilluftpumpe zu erreichen gestattete. Dieselben fanden wir nun durch die Quecksilberpumpe bestätigt. In sämmtlichen Gasen nahmen wir zwischen 12 bis 4 mm Druck eine lebhafte Anziehung durch genäherte Leiter mit und ohne Berührung der Röhre wahr, wie man sie ganz ähnlich bei käuflichen Geissler'schen Röhren sieht, während wir bei ungefähr 2 mm Druck an deren Stelle eine mehr oder weniger deutliche Abstossung bemerkten. Die eine Erscheinung ging in die andere durch eine Zwischenstufe über, bei welcher man weder Anziehung noch Abstossung constatiren konnte. Im allgemeinen war man zu dem Ausspruche berechtigt, dass insolange als die Helligkeit der Röhre mit der Verdünnung zunehme, eine merkliche Anziehung stattfinde, ohne jedoch entscheiden zu können, ob das Helligkeitsmaximum selbst mit einem ausgezeichneten Punkte der Electroattraction, etwa mit deren Maximum oder Zero, zusammentreffe oder nicht. Das Zero, d. i. der neutrale Zustand zwischen Electroattraction und Repulsion, fand, wie aus dem oben Gesagten bereits folgt, bei einem Drucke zwischen 4—2 mm statt; innerhalb dieser Grenzen variirte aber der Druck, bei welchem das Zero in den verschiedenen Gasen eintrat. Dies konnte schon deshalb nicht anders sein, weil der Widerstand der Gase bei demselben Drucke verschieden ist, vom Widerstande jedoch, wie wir später sehen werden, Electroattraction und Repulsion beeinflusst wird. Dadurch erleidet jedoch die Allgemeingültigkeit der in § 6 entworfenen Grundzüge keinen Abbruch, und indem dieselben von der Quecksilberpumpe nach allen den Maassregeln, welche wir für die Reinheit der Gase getroffen haben, bestätigt werden, schwindet jeder Zweifel, ob sie wirklich den untersuchten Gasen von chemisch verschiedener Beschaffenheit gemeinsam seien.

Indem wir nun mit dem Pumpen fortfuhren und grössere Verdünnungen erzielten, als uns mit der Ventilluftpumpe zugänglich gewesen waren, sahen wir zunächst zwischen 2—1 mm Druck in allen Gasen die etwas über oder unter 2 mm bemerkbar gewordene Abstossung des Büschellichtes durch genäherte Leiter eine solche Deutlichkeit und Lebhaftigkeit gewinnen, dass sie nicht mehr wesentlich hinter der bekannten Anziehung desselben in käuflichen Geissler'schen Röhren zurückstand, ja letztere sogar in manchen Fällen übertraf. Hierbei bildete das Büschellicht meistens eine ununterbrochene Lichtfluth, welche sich von der Spitze der Anode aus in der Röhre verbreitete, aber auch dann, wenn es, wie in Wasserstoffgas, in zahlreiche, unruhig wogende und von Entladung zu Entladung platzwechselnde Schichten getheilt war, wich es vor dem Finger unverkennbar zurück. Wie schon gesagt, wurde überhaupt durch diese Art Schichten die Electrorepulsion nicht wesentlich beeinträchtigt. Bei ungefähr 1 mm Druck oder etwas darunter begannen sich jedoch in allen untersuchten Gasen ebenso wie in der Luft stabile, bei den aufeinander folgenden Entladungen an demselben Orte beharrende Schichten zu entwickeln, mit deren Auftreten gleichzeitig die Electrorepulsion schwächer zu werden anfing. Der äusseren Form nach gleichen diese Schichten, wie wir schon aus Anlass der Experimente in Luft bemerkten, ganz und gar den stabilen und gegen genäherte Leiter unempfindlichen Schichten in der Holtz'schen Trichterröhre. Bestand erst das ganze Büschellicht in den weiten Röhrentheilen ausschliesslich aus solchen Schichten, was bei 0,3—0,2 mm Druck der Fall zu sein pflegte, so verhielt sich dasselbe in allen Gasen so, wie nach dem vorigen Paragraphen in Luft: es wurde durch genäherte Leiter weder mehr angezogen, noch abgestossen, sondern war gegen dieselben vollständig indifferent. Durch weiteres Pumpen konnte dann nur mehr die ohnehin geringe Anzahl dieser Schichten noch ein wenig vermindert werden, man änderte aber dadurch nichts an deren Unempfindlichkeit gegen den genäherten Leiter.

Eine solche Unempfindlichkeit besass das Glimmlicht

von seinem ersten Auftreten an. Dasselbe breitet sich bei fortgesetztem Pumpen immer mehr in der Röhre aus und erfüllt schliesslich bei höheren Verdünnungsgraden den ganzen Raum rings um den Kathodendraht bis an die Glaswand. Mochte aber was immer für ein Druck in der Röhre herrschen, so wurde doch niemals das Glimmlicht durch einen genäherten Leiter angezogen oder abgestossen, selbst dann nicht, wenn man die Glaswand berührte. Dieses Verhalten des Glimmlichtes nahmen wir in sämmtlichen untersuchten Gasen wahr, und es ist denselben ebenso gemeinsam wie die vorgeschilderte Aufeinanderfolge von Erscheinungen am Büschellichte.

§ 10. Die Beobachtungen, welche den §§ 6, 8 und 9 zu Grunde liegen, wurden sämmtlich derart angestellt, dass sich im Schliessungsbogen des inducirten Stromes nur die Wüllner'sche Röhre und ihre beiden Zuleitungsdrähte befanden und ausser der Röhre keine zweite Unterbrechungsstelle im Inductionskreise eingeschaltet war. Eine wesentliche Veränderung erlitten die Erscheinungen, wenn man einen Luftwiderstand im Schliessungsbogen anbrachte. Insbesondere konnte dadurch bei hohen Verdünnungsgraden die Electrorepulsion wieder hergestellt werden, nachdem sie schon durch das Auftreten der stabilen unempfindlichen Schichten verschwunden war. Manchmal genügte schon ein zweiter, nur kleiner Funke in freier Luft, um die continuirliche Lichtfluth ganz und gar an die Stelle der Schichten treten zu lassen, manchmal lagerte sie sich nur wie ein Nebel über die Schichten, in beiden Fällen zeigte sich aber lebhafte Electrorepulsion, welche im zweiten Falle dadurch um so sichtbarer wurde, dass es so aussah, als würde der Nebel über den stabilen Schichten hinweggeschoben. Durch Vergrösserung der Unterbrechungsstelle in der Luft konnte man übrigens diese anfänglich noch zurückgebliebenen Schichten zum Verschwinden bringen. Stellte man in solcher Weise durch eine Unterbrechung des Stromkreises in der freien Luft mittelst einer Funkenstrecke die Electrorepulsion wieder her, so war sie meistens von einem sehr deutlichen Auftreten jenes eigenthümlichen grünen Lichtes begleitet, wel-

ches wir bei käuflichen Geissler'schen Röhren, an denen wir die Electrorepulsion zuerst wahrnahmen, als deren steten Gefährten gefunden haben. Mit hohen Verdünnungsgraden erglänzte dieses Licht an der Kathode, brachte man aber sodann die gleichzeitig entwickelten stabilen Schichten durch Luftwiderstand zum Verschwinden, so trat es nicht minder intensiv unter jedem Finger oder Leiter, der die continuirliche Lichtfluth in der Röhre zurückstiess, an der ihm abgewandten Seite der Glaswand auf. Es verhielt sich dabei ganz so, wie wir es in § 2 der Abhandlung: Ueber einige merkwürdige Erscheinungen in Geissler'schen Röhren, angegeben haben.[1]) Als wir Sauerstoff in die Wüllner'sche Spectralröhre einführten, hatten wir zur folgenden interessanten Beobachtung Gelegenheit. So lange keine zweite Unterbrechungsstelle in den Stromkreis eingeschaltet war, erfüllte bei niederem Drucke ein fahler, graugrüner Nebel die Röhre, dessen Nachleuchten wir an einem spätern Orte dieser Abhandlung besprechen werden, und welcher gegenüber dem genäherten Leiter völlig unempfindlich war. Unterbrachen wir aber den Stromkreis an einer zweiten Stelle, so verdrängten wir diesen indifferenten Nebel, ähnlich wie in anderen Fällen die indifferente Schichtung; unter dem Einflusse des Luftwiderstandes trat an dessen Stelle ein beweglicher, grauer und wenig heller Nebel in der Mitte der Röhre, der vor dem Finger lebhaft zurückwich, während die Glaswand, an welche er gedrängt wurde, jenen eigenthümlichen grünen Lichtschimmer ausstrahlte, dessen wir oben gedachten. Derselbe war auch rings um die Kathode sichtbar und besass sowohl hier als auch unter dem Finger an der von letzterem abgewandten Seite grosse Intensität. Ueberhaupt bot die Röhre ganz und gar die Erscheinungen und den Anblick der beiden käuflichen Röhren dar, welche Geissler mit Br und $SnCl_2$ bezeichnet hat, und von denen § 2 dieser Abhandlung handelt. Damit war nun eine der Aufgaben gelöst, zu denen die Auffindung der Electrorepulsion in diesen

1) Reitlinger u. v. Urbanitzky, Wien. Ber. 73. II. Abth. April-Heft. 1876.

Röhren Anlass gab: man konnte die an ihnen sichtbaren Erscheinungen willkürlich reproduciren. Will man aber von der vorgeschilderten Beobachtung Gebrauch machen, um sich von der Entstehung jener beiden käuflichen Röhren Rechenschaft zu geben, so muss man beachten, dass schon die Sauerstoffröhre einen grossen Widerstand leistet, zu dem noch der Luftwiderstand hinzukommt, dass also die Analogie fordert, einen sehr grossen Widerstand der Röhren gegenüber dem Inductionsstrome als Bedingung der Erscheinungen zu betrachten. Bereits im § 2 sprachen wir die Vermuthung aus, es herrsche in den Röhren ein hoher Verdünnungsgrad; das ursprünglich Eingefüllte sei niedergeschlagen oder absorbirt worden, und Spuren von Luft und verdunstetem Fett seien es, welche leuchten. Dies entsprach dem spectroskopischen Befunde und wird nun hier bestätigt; denn gerade dadurch sind die Röhren selbst im Stande, den Widerstand im Schliessungskreise so weit zu steigern, dass in ihnen nur jener Lichtnebel auftritt, welchen wir bei der Wüllner'schen Röhre durch eine zweite Unterbrechung hervorriefen, und welcher um so lebhafter abgestossen wird, je höher der Verdünnungsgrad und je grösser der Widerstand ist. Auch in der Erzeugung des grünen Lichtes an der Kathode und an den Repulsionsstellen unterstützen sich Verdünnung und Widerstand.

Bei der im § 3 besprochenen Holtz'schen Trichterröhre dürfen wir wohl keinen so hohen Verdünnungsgrad voraussetzen als bei den beiden eben erwähnten Röhren, aber auch hier müssen wir einen bei weitem niedrigeren Druck annehmen als in gewöhnlichen käuflichen Spectralröhren. Nach dem Aussehen der stabilen, indifferenten Schichten, welche die Röhre in der positiven Schliessung zeigt, mag der Druck der in ihr befindlichen atmosphärischen Luft nicht allzu viel über oder unter 1 mm betragen. Längst ist bekannt, dass die Holtz'schen Trichterröhren in der negativen Lage dem Inductionsstrome einen viel grösseren Widerstand entgegensetzen, als in der positiven. Man wird daher nach den in diesem Paragraphen mitgetheilten Erfahrungen dem viel grösseren Widerstande in der negativen Lage es zuschreiben,

wenn bei unserer Holtz'schen Trichterröhre die stabilen Schichten, die in der positiven Lage sichtbar sind, in der negativen durch bewegliche ersetzt werden, und gleichzeitig an die Stelle der vollständigen Indifferenz gegen genäherte Leiter eine lebhafte Electrorepulsion tritt.

V. *Vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers und neue Methoden zur Bestimmung der absoluten Horizontalintensität des Erdmagnetismus sowie der Temperatur- und Inductionscoëfficienten der Magnete; von H. Wild.*

(Mélanges physiques et chimiques tirés du Bulletin de l'Academie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. **11.** 15/27 Janvier 1880.)

Gauss hat im Jahre 1837 die beobachtende Physik mit einem neuen „zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmten Instrument", dem sogenannten Bifilarmagnetometer beschenkt[1]), von dem er später auch eine eingehendere Theorie publicirte.[2])

In dieser Theorie hat Gauss einen der influirenden Factoren, die Torsion der Aufhängedrähte, als sehr klein vernachlässigt und einen zweiten, wahrscheinlich ebenfalls als sehr klein vorausgesetzten, nämlich die *Induction* des Erdmagnetismus auf den Magnetismus des aufgehängten Magnets gar nicht berücksichtigt.

Aus einer aufmerksamen Verfolgung der Constanten der Bifilarmagnetometer im physikalischen Centralobservatorium, die viele Jahre hindurch regelmässig jeden Monat aus dem Vergleiche mit den absoluten Messungen der Horizontalintensität des Erdmagnetismus abgeleitet wurden, habe ich indessen schon vor mehreren Jahren erschlossen, dass

1) Resultate aus den Beobachtungen des magnet. Vereins im Jahre 1837. p. 1.

2) Resultate etc. im Jahre 1840. p. 1.

die Torsion der Aufhängefäden, namentlich wenn es Metalldrähte sind, im allgemeinen durchaus kein zu vernachlässigender Factor sei, sondern unter Umständen 5% und mehr des Momentes der Schwere betragen könne.[1]) Damals schon fiel mir auch auf, dass die Relationen, welche die Gauss'sche Theorie für den sogenannten Torsionswinkel und die Schwingungsdauern des Bifilarmagnetometers in der normalen, verkehrten und transversalen Lage ergeben hatte, mit den Beobachtungen nicht in Einklang zu bringen seien. Bei der Unvollkommenheit der Apparate und insbesondere Angesichts der Störungen, welchen die magnetischen Messungen in Petersburg ausgesetzt waren, wagte ich indessen nicht, ein bestimmteres Urtheil in dieser Richtung zu fällen; vielmehr fing ich an, mich der Ansicht zuzuneigen, dass die Bifilarmagnetometer verschiedener Umstände halber nicht sehr zuverlässige Instrumente seien, und dass ähnliche Erfahrungen dabei Lamont bewogen haben möchten, dieselben für die Beobachtungen der Variationen der Horizontalintensität durch andere, theoretisch jedenfalls weniger vollkommene Instrumente, Unifilarmagnetometer mit Deflectoren, zu ersetzen.

Die vollkommeneren Instrumente und Einrichtungen im magnetischen und meteorologischen Observatorium in Pawlowsk und der Ausschluss aller Störungen daselbst erlaubten mir erst, mit voller Sicherheit zu erkennen, dass die Messungsresultate beim Bifilarmagnetometer in der That weit über die Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler hinaus von den erwähnten, durch die Gauss'sche Theorie gegebenen Relationen abweichen. Eine nähere Ueberlegung musste mich zur Annahme führen, dass der Grund dieser Abweichungen ausser in der vernachlässigten Torsion auch noch in der Induction des Erdmagnetismus auf den Magnet zu suchen sei. Demzufolge habe ich die Theorie des Bifilarmagnetometers mit Berücksichtigung dieser beiden Factoren neu entwickelt, und es sind die, wie ich glaube, nicht ganz uninteressanten Resultate dieser vollständigen Theorie, ihrer theilweisen Ver-

1) Siehe Einleitung zum Anhang der Annalen des phys. Centralobservatoriums für 1874. p. 20 ff.

gleichung mit der Erfahrung und weiterer daran angeknüpfter Schlüsse, welche ich in aller Kürze, vor der vollständigen Darlegung des Ganzen in einer längern Denkschrift, heute der Akademie mittheilen möchte.

1. Der Einfluss der Torsion der Aufhängefäden beim Bifilar kann entweder theoretisch aus den Dimensionen derselben und dem Elasticitätscoëfficienten ihrer Substanz oder dann empirisch durch Beobachtungen aus den zu dem Ende nur wenig zu modificirenden Bifilar selbst bestimmt werden. An einem grössern Bifilar habe ich in dieser Weise eine sehr befriedigende Uebereinstimmung zwischen den bezüglichen Resultaten der Theorie und Erfahrung erhalten. Bei diesem Bifilar mit 4 m langen Messingdrähten betrug das Torsionsmoment der letztern in runder Zahl 1 Proc. des Drehungsmomentes der Schwere; dagegen erreichte dasselbe beim Bifilarmagnetometer des Magnetographen in St. Petersburg, bei welchem die Aufhängedrähte von Stahl und blos 0,3 m lang waren, in runder Zahl 7 Proc. des Schweremoments. Ein Bifilar in Pawlowsk aber mit Coconfaden von 1,2 m Länge hatte ein blos 0,3 Procent des Schweremoments betragendes Moment der Torsion beider Fäden. — Es wird überhaupt beim Bifilar das Moment der Torsion der Aufhängefäden gegenüber dem Moment der Schwere um so kleiner, je geringer der Elasticitätscoëfficient der Substanz der Fäden und deren Dicke ist, und je grösser das angehängte Gewicht und die Entfernungen der Fäden werden. Nun hängt die Grösse des Gewichts wieder von der Festigkeit der Fäden, also dem Festigkeitscoëfficienten ihrer Substanz und ihrer Dicke ab, und die Entfernung der Fäden kann, wenn die Empfindlichkeit des Apparates dieselbe bleiben soll, nur zugleich mit einer Vergrösserung der Länge derselben (im quadratischen Verhältniss) vermehrt werden. Will man also zur Vermeidung von Störungen, welche aus der Veränderlichkeit des Torsionsmomentes der Aufhängefäden mit der Zeit, z. B. durch die elastischen Nachwirkungen entspringen können, dieses im Verhältniss zum Moment der Schwere möglichst klein machen, so ist zu den Aufhängefäden eine Substanz zu wählen, deren Festigkeitscoëfficient

im Verhältniss zum Elasticitätscoëfficienten recht gross erscheint, und hat man dieselben möglichst lang zu machen. Der erstern Bedingung genügt am besten die Coconseide; es wurden daher bei allen Bifilarmagnetometern im Observatorium in Pawlowsk Coconfäden statt Metalldraht zur Aufhängung der Magnete verwendet und diese in luftdichte, durch Schwefelsäure ausgetrocknete Gehäuse eingeschlossen, um andererseits Veränderungen durch die hygroscopischen Eigenschaften der Seide zu verhindern.

Der Verlängerung der Aufhängefäden aber wird in der Praxis durch die gegebene Höhe des Beobachtungslocals und den Umstand, dass man den Torsionskreis am obern Ende des Apparats[1]) abzulesen hat, eine Grenze gesetzt. Das Durchbrechen der Decke des Zimmers und Anbringung der Aufhängungsvorrichtung in einem obern Locale zur bessern Erfüllung dieser letztern Bedingung dürfte der alsdann leicht eintretenden Temperaturverschiedenheiten und dadurch bedingten Luftströmungen halber kaum räthlich sein.

Demgemäss ist es nicht wahrscheinlich, dass das Torsionsmoment auf eine beträchtlich kleinere Grösse als 0,3 Proc. des Schweremoments wird reducirt werden können, sodass dasselbe, auch unter Anwendung von Coconfäden bei genauen Untersuchungen nicht neben dem letztern als eine sehr kleine Grösse vernachlässigt werden darf.

2. Bei Berücksichtigung der Induction und Torsion verschwinden die Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung, und man erhält nach den verschiedenen Methoden sehr nahe identische Werthe der die Empfindlichkeit des Bifilarmagnetometers charakterisirenden Grösse, des sogenannten Torsionswinkels, während dieselben nach der angenäherten Theorie bis zu $^1/_3{}^0$ und mehr verschieden ausfielen.

3. Die vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers

1) Die Einrichtung, welche Gauss zur Vermeidung dessen dem Bifilarmagnetometer gegeben hat, indem er nämlich den Torsionskreis unten beim Magnet anbrachte, lässt sich nur bei so schweren Magneten, wie er sie benutzte, mit Erfolg anwenden. Da man den Gebrauch der letztern aus guten Gründen seither verlassen hat, so musste auch der Torsionskreis nach oben verlegt werden.

führte aber auch unmittelbar zu einer vorzüglichen Methode, um aus der directen Beobachtung des Torsionswinkels und der drei Schwingungsdauern des Magnets in der normalen, verkehrten und transversalen Lage die zweierlei Inductionscoëfficienten desselben, nämlich den bei der Schwächung und den bei der Vermehrung des magnetischen Moments durch Induction geltenden, getrennt zu bestimmen.

Die zur Bestimmung des Mittels dieser Coëfficienten gewöhnlich befolgte Methode von Lamont[1]) ist so unsicher, dass sie mir bei wenig variirten Umständen Werthe lieferte, von denen der eine doppelt so gross als der andere war, und noch viel unsicherer erscheint seine Methode zur Bestimmung des Verhältnisses der beiderlei Coëfficienten. Die Methode von W. Weber[2]) aber gibt nur das Mittel beider Coëfficienten und ist in der Ausführung sehr umständlich.

Der Vorzug der neuen Methode besteht hauptsächlich darin, dass dabei nicht die gegenseitige Einwirkung zweier nahen Magnete, der sich nur angenähert berechnen lässt, ins Spiel kommt, und dass man nur mit einem einzigen Instrumente zu operiren hat.

4. Derselbe Vorzug kommt auch der von mir früher schon angegebenen Methode zu, mit dem Bifilarmagnetometer den Temperaturcoëfficienten der Magnete zu bestimmen.[3])

Ich habe dieselbe indessen erst im letzten Sommer im Observatorium in Pawlowsk nach Beseitigung der erwähnten Zweifel an der Tauglichkeit des Bifilars überhaupt zur Ausführung gebracht und dabei Gelegenheit gehabt, mich von der Schärfe der Methode zu überzeugen.

5. Die gegenwärtig allgemein übliche Gauss'sche Methode zur absoluten Bestimmung der Horizontalintensität

1) Lamont, Handbuch des Erdmagnetismus. p. 151. Berlin 1849.

2) W. Weber, Abhandl. der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. **6.** Math. Classe. p. 5. 1854.

3) Wild, Bulletin de St. Petersbourg. **19.** p. 20. 1873.

des Erdmagnetismus[1]) setzt sich aus zweierlei Messungen zusammen, nämlich der Ermittelung der Schwingungsdauer eines unifilar aufgehängten Magnets unter dem Einflusse des Erdmagnetismus, und sodann der Beobachtung von Ablenkungen aus dem magnetischen Meridian, welche er aus bestimmter Entfernung an einem andern unifilar aufgehängten Magnet hervorbringt. Sie leidet demgemäss an zwei kleinen Uebelständen. Die Bestimmung der Schwingungsdauer nimmt, wenn sie genau sein soll, eine längere Zeit ($^1/_2$ bis 1 Stunde) in Anspruch, und doch können die während dieser Zeit erfolgenden Variationen der Intensität nicht wohl in Rechnung gebracht werden, sondern man muss sich mit der Annahme begnügen, dass die erhaltene Schwingungsdauer dem ungefähren Mittel der Horizontalintensität während dieses Zeitintervalls entspreche. Bei der Beobachtung der Ablenkungen sodann hat man zur Reduction der unmittelbar abgelesenen Winkel sowohl die Variationen der Declination als auch die der Horizontalintensität zu berücksichtigen, was die Fehlerquellen nothwendig vermehrt.

Da nach dem Vorigen die dem Bifilarmagnetometer anhaftenden Unsicherheiten als beseitigt zu betrachten sind, so schien es mir eines Versuchs werth, dieses Instrument auch zur absoluten Messung der Horizontalintensität herbeizuziehen. Ich bin so zu folgender neuen Methode der Bestimmung der letztern Grösse gelangt.

Es seien analog wie bei den Ablenkungsbeobachtungen der Gauss'schen Methode zwei Magnete mit den magnetischen Momenten M und M' gegeben, welche sich abwechselnd in genau fixirter Lage in ein bifilar aufgehängtes Schiffchen einlegen lassen. Man lege zuerst den Magnet M in das Schiffchen, bringe ihn in der üblichen Weise in die transversale Lage (senkrecht zum magnetischen Meridian) und lese am Torsionskreise den sogenannten Torsionswinkel z ab.

Darauf werde der Magnet M' ins Schiffchen gelegt, der Magnet M in den magnetischen Meridian durch die Drehungs-

1) Gauss, Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gottingae 1833.

axe des Bifilars seitwärts in bestimmte Entfernung hingelegt, der Magnet M' durch Drehen am Torsionskreise seinerseits in die transversale Lage gebracht und der neue Torsionswinkel z_1 abgelesen.

Kehrt man hierauf den Magnet M um 180° um, sodass er jetzt mit dem Nordpole nach Süden zeigt, wenn er vorher nach Norden gewendet war, so erhält man einen dritten Torsionswinkel z_2, nachdem der Magnet M_1 wieder in die transversale Lage gebracht worden ist.

Aus den drei diese Gleichgewichtslagen repräsentirenden Gleichungen lassen sich alle unbekannten Grössen eliminiren, sodass ausser den durch Rechnung oder auf empirischem Wege ein für alle mal zu bestimmenden Constanten in der Schlussgleichung nur die durch die jeweilige Beobachtung gegebenen drei Torsionswinkel z, z_1, z_2 übrig bleiben, während die Intensitätsänderungen, welche allenfalls von der einen zur andern Ablesung der letztern erfolgt sind, ganz scharf vermittelst gleichzeitiger Ablesungen an einem Variationsbifilarmagnetometer in Rechnung zu bringen, resp. aus dem Resultate zu eliminiren sind. Dabei hat man nur diese Intensitätsvariationen zu berücksichtigen, weil der Magnet stets nahe senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht, und deshalb die gewöhnlichen Variationen des letztern einen sehr geringen Einfluss haben. Es sind also in der That die erwähnten beiden Uebelstände der Gauss'schen Methode hier beseitigt.

Ein weiterer und nicht unerheblicher Vortheil der Methode besteht ferner darin, dass die beiden aufeinander einwirkenden Magnete wegen der grössern Empfindlichkeit des Bifilars zur Erzielung gleich grosser Ablenkungswinkel wie beim Unifilar der üblichen Methode in grössere Entfernung voneinander als dort gebracht werden können, sodass die Wirkung beider Magnete aufeinander mit grösserer Sicherheit zu berechnen ist.

Endlich kann der Umstand die neue Methode auch nur empfehlen, dass bei dem darnach einzurichtenden Instrumente die zwei Hülfsgrössen für absolute magnetische Messungen, nämlich die Temperaturcoëfficienten und die beiden Inductionscoëfficienten, ebenfalls ohne weiteres nach den oben

angegebenen sichersten Methoden dafür gemessen werden können.

Das Torsionsmoment der Aufhängefäden ist mit genügender Genauigkeit aus den Abmessungen am Bifilar- und dem bekannten Elasticitätscoëfficienten zu berechnen, dagegen wird es besser sein, das Schweremoment aus Schwingungsbeobachtungen am Bifilar abzuleiten, bei denen es in verschiedenen Entfernungen von der Drehungsaxe mit Gewichten belastet war. Dieses Verfahren zur Bestimmung dieser Hauptconstanten entspricht dann ganz dem Gauss'schen Verfahren zur Ermittelung des Trägheitsmomentes des Magnets bei der bisherigen Methode der Intensitätsbestimmung.

Vollständige Intensitätsmessungen nach der neuen Methode sind bisher noch nicht ausgeführt worden, sondern ich habe mich nur von der Durchführbarkeit derselben durch Vorversuche überzeugt. Instrumente zur Anstellung regelmässiger Beobachtungen nach derselben, die mindestens als eine sehr willkommene Controle der absoluten Messungen nach der bisherigen Methode werden dienen können, sind gegenwärtig in Construction begriffen.

Zum Schlusse theile ich die Endformeln für die im vorigen erwähnten neuen Methoden mit:

1. Das Torsionsmoment der beiden Aufhängefäden des Bifilars zusammen ist genau genug gegeben durch:

$$\frac{2\pi\varrho^4\varepsilon \operatorname{arc} z}{5l},$$

wenn ϱ den Radius der Fäden, l ihre Länge in Millimetern, ε den Elasticitätscoëfficienten ihrer Substanz, als z. B. für Stahl 18.10^9, für Coconseide 861.10^6 (Millimeter, Milligramme) endlich z den Torsionswinkel repräsentirt.

2. Wenn man der Kürze halber:

$$\frac{G d_0 d'_0}{4 l_0} = D_0 \quad \text{und} \quad \frac{8\pi\varrho^4\varepsilon}{5 G d_0 d'_0} = \tau$$

setzt, wo G das an den Fäden hängende Gewicht in Milligrammen, d_0 ihre untere und d'_0 ihre obere Entfernung, endlich l_0 ihre Länge in Millimetern je bei 0° darstellen, so

erhält man statt der bisherigen Gleichung für die transversale Lage des Magnet bei 0^0:

$$D_0 \sin z = HM_0$$

und statt der bisherigen Relationen zwischen dem sogenannten Torsionswinkel z und den Schwingungsdauern des Magnets T_1 bei normaler, T_2 bei verkehrter und T_3 bei transversaler Lage, nämlich:

$$\sin z = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2} \quad \text{und} \quad T_3^2 = T_2 . T_1$$

mit Berücksichtigung der Torsion der Aufhängefäden und der Induction des Erdmagnetismus folgende genauere Ausdrücke:

$$D_0 \left(1 + \tau \frac{\text{arc } z}{\sin z}\right) \sin z = HM_0,$$

$$\sin z = \frac{(T_2^2 - T_1^2)\left[1 + \tau\left(1 - \frac{\text{arc } z}{\sin z}\right)\right]}{T_2^2 + T_1^2 - H(\nu'' T_2^2 - \nu' T_1^2)},$$

$$T_3^2 = T_2 . T_1 \left\{1 + \frac{H}{2}(\nu' + \nu'') \frac{\text{tg } z}{\cos z} - \left[\frac{H}{2}(\nu' - \nu'') - \tau\left(1 - \frac{\text{arc } z}{\sin z}\right)\right] \text{tg}^2 z\right\},$$

wo H die horizontale Componente des Erdmagnetismus,

M_0 das magnetische Moment des Magnets bei 0^0,

ν' den Inductionscoëfficienten des Magnets bei Verstärkung und

ν'' denjenigen bei Schwächung seines Magnetismus durch Induction

darstellen und die unmittelbar beobachteten Schwingungsdauern bereits auf unendlich kleine Amplituden und eine Bewegung ohne Hindernisse (Dämpfung) reducirt gedacht sind.

3. Aus der directen Messung des Torsionswinkels z am Torsionskreise und der Beobachtung der drei genannten Schwingungsdauern bei normaler, verkehrter und transversaler Lage des Magnets berechnen sich die obigen Inductionscoëfficienten nach den Formeln:

$$\nu' = \frac{1}{H}\left\{1 + \tau\left(1 - \frac{\text{arc } z}{\sin z}\right) - h_1 + (2\varepsilon + \mu')(t_1 - t) + \mu''(t_1^2 - t^2)\right] \frac{T_3^2}{T_1^2 . \text{tg } z}$$

$$- 1 - \left[1 + \tau\left(1 - \frac{\text{arc } z}{\sin z}\right) - h_1 + (\beta + \mu')(t_1 - t) + \mu''(t_1^2 - t^2)\right] \frac{1}{\sin z}\Bigg\},$$

$$\nu'' = \frac{1}{H}\left\{\left[1+\tau\left(1-\frac{\text{arc}\,z}{\sin z}\right)-h_2+(2e+\mu')(t_2-t)+\mu''(t_2^2-t^2)\right]\frac{T_2^2}{T_2^2\,\text{tg}\,z}\right.$$
$$\left.+1-\left[1+\tau\left(1-\frac{\text{arc}\,z}{\sin z}\right)-h_2\,(\beta+\mu')\,(t_2-t)+u''\,(t_2^2-t^2)\right]\frac{1}{\sin z}\right\},$$

wo: $$h_1 = \frac{H_1 - H}{H}, \qquad h_2 = \frac{H_2 - H}{H}$$

und H, H_1 und H_2 die Horizontalintensitäten, wie t, t_1 und t_2 die Temperaturen zu den Zeiten resp. der Einstellung des Magnets in die transversale Stellung — Messung des Torsionswinkels z — und der Schwingungsdauerbeobachtung in dieser Lage des Magnets, sowie der Schwingungsdauerbeobachtung in der normalen Lage (Index 1) und in der verkehrten Lage (Index 2) des Magnets darstellen. Ferner repräsentirt:

μ' den Temperaturcoëfficienten des Magnets für das lineare und

μ'' denjenigen für das quadratische Glied der Temperatur,

e den Ausdehnungscoëfficienten des Stahls (Magnets), der für die Reduction des Trägheitsmoments auf dieselbe Temperatur in Betracht kommt,

δ den Ausdehnungscoëfficienten des untern,

δ' den Ausdehnungscoëfficienten des obern Verbindungsstückes der Fäden,

λ den Ausdehnungscoëfficienten der Substanz der Fäden selbst,

und in der Formel ist abkürzend gesetzt worden:

$$\delta + \delta' - \lambda = \beta.$$

4. Es seien z_1, z_2 und z_3 die in der Transversalstellung des Magnets am Bifilar bei den Temperaturen t_1, t_2 und t_3 beobachteten Torsionswinkel und H_1, H_2 und H_3 die zu diesen Zeiten stattfindenden Horizontalintensitäten, so findet man daraus die Temperaturcoëfficienten und die Ausdehnungscoëfficienten $\delta + \delta' - \lambda = \beta$ nach den Formeln:

$$\mu' + \beta = \frac{1}{t_3 - t_1}\left(\frac{t_3+t_2}{t_1-t_2}\cdot\frac{\sin(z_2-z'_1)}{\text{tg}\,\frac{z_2+z'_1}{2}} - \frac{t_2+t_1}{t_2-t_3}\cdot\frac{\sin(z'_3-z_2)}{\text{tg}\,\frac{z'_3+z_2}{2}}\right)$$

$$\mu'' = \frac{1}{t_3-t_1}\left(\frac{\sin(z'_3-z_2)}{(t_2-t_3)\,\text{tg}\,\frac{z'_3+z_2}{2}} - \frac{\sin(z_2-z'_1)}{(t_1-t_2)\,\text{tg}\,\frac{z_2+z'_1}{2}}\right),$$

wo z'_1 und z'_3 gegeben sind durch die Ausdrücke:

$$\sin z'_1 = \left(2 - \frac{H_1}{H_2}\right) \cdot \sin z_1, \qquad \sin z'_3 = \left(2 - \frac{H_3}{H_2}\right) \cdot \sin z_3.$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Grösse β für sich genau genug mit den für die betreffenden Stoffe geltenden bekannten Ausdehnungscoëfficienten berechnet werden kann.

Wie oben, so sind auch hier die Horizontalintensitäten H_1, H_3 etc. den gleichzeitigen Ablesungen oder Registrirungen eines Variationsinstrumentes zu entnehmen.

5. Bei der oben mitgetheilten neuen Methode der Bestimmung der Horizontalintensität mittelst des Bifilars berechnet man die letztere aus den drei beobachteten Torsionswinkeln z, z_1 und z_2, wobei jeweilen die Temperaturen t, t_1 und t_2, sowie die Intensitäten H, H_1 und H_2 stattgefunden haben mögen, nach der Formel:

$$H^2 = \frac{2 . D_0 \sin z}{E_0^3} \cdot \frac{a . \sin z_1 + b . \sin z_2}{c . \sin z_1 - d . \sin z_2} \left(1 + \beta t + \tau \frac{\text{arc } z}{\sin z} + \frac{x}{E_0^2}\right),$$

wo D_0, β etc. die frühere Bedeutung haben, ferner E_0 die Entfernung der Mittelpunkte beider Magnete und x eine in der bekannten Weise durch Variirung dieser Entfernung bei einigen Fundamentalversuchen ein für alle mal empirisch zu bestimmende Constante darstellen. Ferner ist:

$$a = 1 - \mu' (t_2 - t) - \mu'' (t_2^2 - t^2) - 3 m t_2 + (\beta + \mu'_1)(t_1 - t_2) + \\ + \mu''_1 (t_1^2 - t_2^2) - \nu'' H - \tau_1 \frac{\text{arc } z_1}{\sin z_1},$$

$$b = 1 - \mu' (t_1 - t) - \mu'' (t_1^2 - t^2) - 3 m t_1 + \nu' H - \tau_1 \frac{\text{arc } z_2}{\sin z_2},$$

$$c = 1 + (\beta + \mu'_1)(t_1 - t_2) + \mu_1'' (t_1^2 - t_2^2) + h_2 + \tau_1 \frac{\text{arc } z_1}{\sin z_1},$$

$$d = 1 + h_1 + \tau_1 \frac{\text{arc } z_2}{\sin z_2},$$

und hier repräsentiren μ'_1 und μ''_1 dieselben Coëfficienten wie oben μ' und μ'', nur bezogen auf den Hülfsmagnet M', ebenso τ_1 dieselbe Grösse wie τ mit der einzigen Modification, welche das etwas andere Gewicht des Magnets M' im Schweremoment hervorbringt, endlich m den linearen Ausdehnungs-

coëfficienten der Schiene, auf welche der ablenkende Magnet gelegt wird. h_1 und h_2 werden nach den früheren Ausdrücken aus H, H_1 und H_2 berechnet, und für H in den Ausdrücken a und b genügt es, wegen der Kleinheit der Coëfficienten ν' und ν'', einen angenäherten Werth der Horizontalintensität zu setzen.

Berücksichtigt man, dass diese Formeln bereits alle Reductionsglieder enthalten, so wird man sie nicht complicirter finden als die für die bisherige Messungsmethode geltenden.

VI. *Ueber die Vergleichung der electrodynamischen Grundgesetze mit der Erfahrung;* *von R. Clausius.*

Das neue electrodynamische Grundgesetz, welches ich vor einiger Zeit aus Erfahrungssätzen abgeleitet habe, und welches von dem bekannten Weber'schen und dem später aufgestellten Riemann'schen Grundgesetze in wesentlichen Punkten abweicht, ist seitdem von verschiedenen Autoren besprochen, wobei es sich vorzugsweise darum gehandelt hat, für gewisse der Beobachtung zugängliche Fälle die aus den verschiedenen Grundgesetzen hervorgehenden Folgerungen abzuleiten und mit der Erfahrung zu vergleichen. Es möge mir gestattet sein, über die Resultate dieser Untersuchungen einige Bemerkungen zu machen.

1. Als Grund, weshalb ich das Weber'sche und das Riemann'sche Grundgesetz nicht für richtig halte, und daher geglaubt habe, ein anderes aufsuchen zu müssen, habe ich angeführt, dass diese beiden Gesetze nur dann mit den Thatsachen vereinbar sind, wenn man sich vorstellt, dass die galvanischen Ströme, und ebenso die anderen electrischen Ströme, für welche die electrodynamischen Gesetze gelten, also auch die molecularen Ströme, durch welche man nach Ampère den Magnetismus erklärt, nicht einfache Ströme sind, sondern aus je zwei gleichen und entgegengesetzten Strömen der bei-

den Electricitäten bestehen. Diese Vorstellung scheint mir, besonders für die zuletzt genannten molecularen Ströme, zu complicirt und in mechanischer Beziehung zu schwer erklärlich zu sein, um mich ihr anschliessen zu können.

Ich habe dann weiter gezeigt, dass, wenn man sich dieser Vorstellung von der Doppelströmung nicht anschliessen will, man auch in einem andern Punkte von jenen Autoren abweichen muss. Weber und Riemann haben nämlich angenommen, dass die electrodynamische Kraft zwischen zwei bewegten Electricitätstheilchen nur von ihrer relativen Bewegung abhängen könne, und zwar versteht Riemann dabei die relative Bewegung im gewöhnlichen Sinne des Wortes, nach welchem für jede zur Betrachtung ausgewählte Richtung die Differenz der Geschwindigkeitscomponenten der beiden Theilchen die Geschwindigkeitscomponente der relativen Bewegung darstellt, während Weber die relative Bewegung nur auf die gegenseitige Annäherung oder Entfernung der Theilchen bezieht. Diese Annahme muss man verlassen und muss, statt sich auf die relative Bewegung zu beschränken, auch die beiden einzelnen Bewegungen der aufeinander wirkenden beiden Theilchen in Betracht ziehen.

Der Umstand, dass nicht nur die relative Bewegung, sondern auch die beiden einzelnen Bewegungen die electrodynamische Kraft beeinflussen, erklärt sich sehr leicht aus der von mir und auch schon von anderen vor mir angenommenen Entstehungsart der electrodynamischen Kraft, nämlich dass sie durch ein zwischen den aufeinander wirkenden Theilchen befindliches Medium vermittelt wird. Bei dieser Annahme darf man von zwei Theilchen, welche sich mit gleicher Geschwindigkeit nach gleicher Richtung bewegen, also relativ zueinander in Ruhe sind, nicht erwarten, dass sie sich ebenso verhalten, wie zwei wirklich ruhende Theilchen, denn während die letzteren nicht nur relativ zu einander, sondern auch relativ zum Medium ruhen, befinden sich die ersteren relativ zum Medium in Bewegung.

Mit dem, was ich über den Zusammenhang der Vorstellung von der Doppelströmung und der Annahme, dass die electrodynamische Kraft nur von der relativen Bewegung

abhängen könne, gesagt habe, nämlich dass das Verlassen der ersteren auch das Verlassen der letzteren zur Folge haben müsse, stimmt das Ergebniss einer von Lorberg angestellten interessanten Untersuchung[1]) überein. Dieser legt nämlich seiner Untersuchung zunächst eine Anzahl von Erfahrungssätzen zu Grunde, welche im wesentlichen dieselben sind wie die von mir angewandten, und fügt diesen dann noch die Voraussetzung hinzu (p. 318), dass die electrodynamische Kraft nur von der relativen Bewegung und zwar von der relativen Bewegung im Weber'schen Sinne des Wortes abhänge. Mit Hülfe dieser Voraussetzung gelangt er dann zu dem Ergebnisse (p. 331), „dass die ponderomotorische und electromotorische Wirkung zweier Stromelemente — abgesehen von einer etwaigen electromotorischen Kraft eines Stromendes — nach dem Weber'schen Grundgesetz erfolgen muss, sowie dass in einem galvanischen Strom beide Electricitäten mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit fliessen." Lorberg ist also ebenfalls aus der Voraussetzung des alleinigen Einflusses der relativen Bewegung zu dem Schlusse des Bestehens der Doppelströmung gelangt, woraus sich umgekehrt ergibt, dass, wenn man die Doppelströmung nicht als bestehend anerkennen will, man auch jene Voraussetzung des alleinigen Einflusses der relativen Bewegung nicht machen darf.

2. Unter den anderen über den Gegenstand erschienenen Abhandlungen habe ich zunächst eine von Delsaulx[2]) veröffentlichte zu erwähnen. Diese bezieht sich nicht auf das von mir aufgestellte Grundgesetz selbst, sondern auf das daraus für die ponderomotorische Kraft zwischen zwei Stromelementen abgeleitete Gesetz, welches mit dem schon früher von Grassmann für diese Kraft aufgestellten Gesetze übereinstimmt.

Delsaulx wählt als speciellen Fall, welcher ihm zur

1) Lorberg, Ueber das electrodynamische Grundgesetz. Borchardt's Journal für Mathematik. 84. p. 305. 1877.

2) Delsaulx, Sur la loi de force de M. Clausius entre courants élémentaires. Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 4me année 1880, 2e partie.

Vergleichung mit der Erfahrung geeignet scheint, die Einwirkung, welche ein Selenoid von einem Strome erleidet, der die Gestalt eines Winkels mit unendlich langen Schenkeln hat. Für diese Einwirkung leitet er aus dem neuen Gesetze Formeln ab, welche mit den schon von anderen Autoren aus dem Ampère'schen Gesetze abgeleiteten Formeln und mit gewissen Erfahrungsresultaten nicht übereinstimmen, und aus dieser Nichtübereinstimmung schliesst er dann auf die Unwahrscheinlichkeit des neuen Gesetzes.

Nun ist aber leicht zu sehen, dass ein Strom, welcher die Schenkel eines Winkels in unendlicher Länge durchfliesst, auf jedes im Endlichen liegende Stromelement ebenso wirken muss wie ein geschlossener Strom, denn die unendlich entfernten Theile des Stromes tragen wegen der nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung stattfindenden Abnahme der Kraft nur unendlich wenig zur Wirkung bei, und es kann daher auch nur eine unendlich kleine Aenderung der Gesammtwirkung entstehen, wenn ihre Lagen so geändert werden, dass der Strom ein geschlossener wird. Ferner steht es fest, und wird auch von Delsaulx selbst anerkannt, dass geschlossene Ströme auf ein Stromelement und daher auch auf einen endlichen Strom nach dem neuen Gesetze genau ebenso wirken müssen, wie nach dem Ampère'schen Gesetze. Man kann daher, wenn Delsaulx trotzdem eine Abweichung findet, im voraus sicher sein, dass diese nur dadurch entstanden sein kann, dass seine Formeln nicht richtig abgeleitet sind.

In der That lassen sich auch leicht Ungenauigkeiten in seiner Ableitung nachweisen, unter denen ich die folgende als besonders erheblich erwähnen will. Er bestimmt auf p. 7 die Kraft Rds, welche ein Stromelement ds auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom ausübt. Als Angriffspunkt dieser Kraft nimmt er dann den Mittelpunkt der von dem Strome umflossenen Fläche an, indem er sagt, das durch die Verlegung der Elementarkräfte vom Umfange nach dem Mittelpunkte entstehende Drehungsmoment sei eine unendlich kleine Grösse von höherer Ordnung als Rds. Das ist ein Irrthum. Dieses

Drehungsmoment ist eine Grösse von derselben Ordnung wie Rds, und seine Vernachlässigung musste daher zur Folge haben, dass die weiteren Schlüsse unrichtig wurden.

Demnach kann man der von Delsaulx gefundenen Abweichung keine Beweiskraft gegen das neue Gesetz zuschreiben.

3. Eine andere Abhandlung, welche sich nicht blos auf das Gesetz der ponderomotorischen Kräfte zwischen Stromelementen, sondern auf das für bewegte Electricitätstheilchen geltende Grundgesetz bezieht, ist von J. Fröhlich im Februarheft dieser Annalen veröffentlicht.[1]) In dem Theile dieser interessanten Abhandlung, welcher die von mir angenommene Form des Grundgesetzes betrifft, ist besonders ein Punkt von wesentlicher Bedeutung. Das von mir formulirte Grundgesetz führt, ohne die Annahme der Doppelströmung nöthig zu machen, zu dem Resultate, dass ein ruhender und constanter geschlossener galvanischer Strom auf ruhende Electricität keine Wirkung ausübt und von ihr keine Wirkung erleidet. Nun sagt aber Fröhlich, Gegenstände, welche sich auf der Erde scheinbar in Ruhe befinden, haben doch in der Wirklichkeit dadurch, dass die Erde sich bewegt, eine schnelle Bewegung. Es frage sich nun, was für electrodynamische Kräfte man aus meinem Grundgesetze erhalte, wenn man nicht nur die Bewegungen der Electricitäten relativ zur Erde, sondern auch die mit der Erde gemeinsame Bewegung berücksichtige.

Bevor ich selbst diesen Punkt bespreche, muss ich über einen darauf bezüglichen Ausspruch Fröhlich's einige Worte sagen:

Fröhlich hat in einem speciellen Falle für die von ihm gesuchte Kraft aus meinem Grundgesetze einen Ausdruck (p. 276 oben) abgeleitet, von dem er glaubt, dass er einen unbestimmten, von der Wahl der an sich willkürlichen Coordinatenrichtungen abhängigen Werth habe, und infolge

1) J. Fröhlich, Bemerkungen zu den electrodynamischen Grundgesetzen von Clausius, Riemann und Weber. Wied. Ann. 9. p. 261. 1880.

dessen sagt er, mein Gesetz gebe in diesem Falle „ein theoretisch ebenso unzulässiges wie praktisch unbrauchbares Resultat."

Dieser Ausspruch ist sehr auffällig. Darüber, ob mein Gesetz der Erfahrung entspricht, können natürlich, wie bei jedem aus theoretischen Gründen abgeleiteten Gesetze, Zweifel bestehen; dass es aber ein theoretisch unzulässiges, d. h. mit den Principien der Mechanik im Widerspruche stehendes Resultat geben könne, ist, wie ich glaube, nach der ganzen Art seiner Ableitung von vornherein als unmöglich zu betrachten. Auch erkennt man bei näherer Betrachtung des von Fröhlich abgeleiteten Ausdruckes sehr bald, dass die Behauptung, sein Werth sei von der Wahl der Coordinatenrichtungen abhängig, unrichtig ist.

Zunächst ist zu bemerken. dass unter dem in dem Ausdrucke vorkommenden Zeichen ψ nicht, wie Fröhlich auf p. 273 sagt, der Winkel zu verstehen ist, den die Normale der Stromfläche s mit der $\mathfrak{X}$-Axe einschliesst, sondern der Winkel, den diese Normale mit der $\mathfrak{Y}$-Axe einschliesst. Gibt man dem Zeichen ψ diese Bedeutung, so findet man, dass die in dem Ausdrucke befindliche, in eckige Klammern eingeschlossene Differenz, um deren Werth es sich handelt, nichts anderes ist, als der Cosinus des Winkels, den die Normale der Stromfläche s mit der Richtung bildet, in welcher die betreffende Stelle der Erde sich bewegt, also eine Grösse, welche einen ganz bestimmten, von der Wahl der Coordinatenrichtungen unabhängigen Werth hat. Jener Ausspruch von Fröhlich beruht somit auf einem Irrthume.

4. Indem wir uns nun zur Besprechung der Frage wenden, ob man der Bewegung, welche die auf der Erde scheinbar ruhenden Gegenstände mit der Erde gemeinsam haben, nach meinem Grundgesetze einen Einfluss auf die electrodynamischen Kräfte zuschreiben müsse, und von welcher Art dieser Einfluss sei, wollen wir die Sache unter zwei Gesichtspunkten betrachten. Zunächst wollen wir das Resultat besprechen, welches man erhält, wenn man die in meiner Kraftformel vorkommenden Geschwindigkeiten, welche ich in meiner ursprünglichen Entwickelung, in der die Bewegung

der Erde nicht berücksichtigt wurde, als die absoluten Geschwindigkeiten definirt habe, auch bei Berücksichtigung dieser Bewegung wörtlich in demselben Sinne auffasst. Weiterhin wollen wir dann sehen, wie man bei Berücksichtigung dieser Bewegung jene Definition modificiren kann, ohne von dem Grundgedanken meiner Entwickelung abzuweichen.

Unter den in Betracht kommenden Kräften haben wir unser Augenmerk vorzugsweise auf diejenige zu richten, welche ein auf der Erde ruhender und constanter geschlossener galvanischer Strom auf eine ebenfalls auf der Erde ruhende Electricitätseinheit ausübt. Für die x-Componente dieser Kraft erhalten wir bei jener ersten Auffassungsweise folgenden Ausdruck, in welchem ds' ein Element des geschlossenen Stromes, r seinen Abstand von der Electricitätseinheit und i' die Intensität des Stromes bedeutet, während $\frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit der mit der Erde gemeinsamen Bewegung und $(\sigma s')$ den Winkel zwischen der Richtung dieser Bewegung und der Richtung des Elementes ds' darstellt:

$$k i' \frac{d\sigma}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\cos(\sigma s')}{r} ds'.$$

Dieselbe Form haben die für die y- und z-Componente geltenden Ausdrücke, nur dass der Differentialcoëfficient nach x durch die Differentialcoëfficienten nach y und z ersetzt ist.

Daraus, dass die drei Kraftcomponenten durch die partiellen Differentialcoëfficienten einer Grösse nach den drei Coordinaten dargestellt werden, ergibt sich, dass die Kraft ein Ergal hat, also nur eine veränderte Vertheilung der Electricität, aber nicht einen dauernden Strom veranlassen kann. In dieser Beziehung ist diese Kraft derjenigen ähnlich, welche man nach dem Weber'schen und nach dem Riemann'schen Gesetze zwischen einem Strome und relativ zu ihm ruhender Electricität erhält, wenn man die Annahme, dass der Strom aus zwei gleichen und entgegengesetzten Strömen beider Electricitäten bestehe, verlässt.

In anderer Beziehung aber besteht zwischen beiden Kräften ein grosser Unterschied. Die hier erhaltene Kraft

ist nämlich, wie die gewöhnlichen electrodynamischen Kräfte, einerseits der Intensität des Stromes und andererseits der Grösse der von dem Strome umflossenen Fläche proportional, während die Kraft, welche nach dem Weber'schen und Riemann'schen Gesetze stattfinden müsste, einerseits dem Quadrate der Intensität und andererseits der Länge des Stromes proportional ist, und wegen der letztern Proportionalität bei einem Magnete, welcher unzählig viele kleine Ströme enthält, die zusammen eine sehr grosse Länge haben, unvergleichlich viel grösser sein muss, als bei einem den Magnet umgebenden Strome von gleicher electrodynamischer Wirkung.

Bestimmt man nun weiter nach meinem Gesetze unter Berücksichtigung der Bewegung der Erde die ponderomotorische Kraft, welche zwei Stromelemente aufeinander ausüben, so findet man, dass auf diese Kraft die Bewegung der Erde keinen Einfluss hat. Daraus folgt weiter, dass auch die Kräfte, welche zwischen galvanischen Strömen und Magneten stattfinden, und die Kräfte, welche Magnete untereinander ausüben, durch die Bewegung der Erde nicht beeinflusst werden. Es bleiben also nur die Fälle übrig, wo es sich um Kräfte handelt, welche die positive und die negative Electricität einzeln erleiden. [1])

1) Kurz vor dem Drucke dieses Aufsatzes war Hr. Wiedemann so freundlich, mir einen Abdruck eines auf denselben Gegenstand bezüglichen Aufsatzes von Budde zuzusenden, welcher im gleichen Hefte dieser Annalen, wie mein Aufsatz, erscheinen soll. (S. p. 553 dieses Heftes.) In diesem Aufsatze wird gezeigt, dass auch die Kräfte, welche einzelne positive oder negative Electricitätsmengen von einem geschlossenen Strome wegen der mit der Erde gemeinsamen Bewegung erleiden oder auf ihn ausüben, durch gewisse andere Kräfte, welche von einer durch den Strom bewirkten eigenthümlichen Vertheilung der Electricität in dem Leiter herrühren, neutralisirt werden, sodass sie sich der Wahrnehmung entziehen. Hiernach hätte ich, wenn es sich nur um die Vertheidigung meines Grundgesetzes gegen den von Hrn. Fröhlich erhobenen Einwand handelte, die Sache als abgemacht betrachten, und demgemäss den hier beginnenden Schlusstheil meines Aufsatzes streichen können; da ich jedoch glaube, dass eine möglichst vielseitige Beleuchtung aller bei dem Grundgesetze denkbarerweise in Betracht kommenden Umstände von wissenschaftlichem Interesse ist, will ich auch diesen Theil meines Aufsatzes unverändert stehen lassen.

Aber auch für diese Kräfte gestaltet sich die Sache ganz anders, wenn man sie von einem etwas anderen Gesichtspunkte aus betrachtet und eine aus dieser veränderten Betrachtungsweise ganz von selbst hervorgehende Aenderung an der Definition der in meiner Kraftformel vorkommenden Geschwindigkeiten vornimmt.

Ich habe, wie schon oben erwähnt wurde, den Umstand, dass man bei der Bestimmung der von zwei bewegten Electricitätstheilchen aufeinander ausgeübten electrodynamischen Kräfte nicht nur relative Bewegung, sondern auch die Einzelbewegungen der beiden Theilchen berücksichtigen muss, daraus erklärt, dass es sich dabei nicht blos um die Beziehung der beiden Theilchen zu einander, sondern auch um ihre Beziehung zu dem von mir angenommenen, zwischen ihnen befindlichen Medium handele, durch welches die electrodynamische Kraft vermittelt werde. Da ich nun bei meiner frühern Entwickelung das Medium als ruhend voraussetzte, so waren die Bewegungen, welche die Theilchen relativ zu dem Medium haben, zugleich als ihre absoluten Bewegungen anzusehen, und demgemäss definirte ich die in der Formel vorkommenden Geschwindigkeiten kurz als die absoluten Geschwindigkeiten. Sollte aber das Medium ebenfalls in Bewegung sein, so müsste man ganz im Sinne jener Entwickelung an die Stelle der absoluten Geschwindigkeiten diejenigen Geschwindigkeiten setzen, welche die Electricitätstheilchen relativ zu dem Medium haben.

Nähme man nun weiter an, dass bei der Bewegung der Erde auch von jenem die electrodynamischen Kräfte vermittelnden Medium der Theil, welcher sich in der Erde und in ihrer nächsten Umgebung befindet, mit fortgeführt werde, so würden die Geschwindigkeiten, welche man in meine Kraftformel einzusetzen hätte, einfach die Geschwindigkeiten relativ zur Erde sein. Diese Aenderung würde offenbar zur Folge haben, dass man unter Berücksichtigung der Bewegung der Erde zu denselben Resultaten gelangte, wie bei der ursprünglichen Definition der Geschwindigkeiten ohne jene Berücksichtigung.

Gegen die Möglichkeit eines solchen Verhaltens des Mediums wird sich vom theoretischen Standpunkte aus kaum etwas einwenden lassen, und auch für die Behandlung der Sache könnten daraus keine erheblichen Schwierigkeiten erwachsen. Man würde es dabei mit einem ähnlichen Falle zu thun haben, wie beim Lichte, welches sich sowohl in dem als ruhend vorausgesetzten freiem Weltäther als auch in den auf der Erde befindlichen durchsichtigen ponderablen Stoffen, in welchen man den Aether nicht als ruhend voraussetzen darf, fortpflanzen kann.

Im Anschlusse an das Vorige sei es mir gestattet, hier gelegentlich ein paar Worte über einen im fünften Hefte dieser Annalen enthaltenen Aufsatz von Legebeke zu sagen.

Ich habe im ersten Bande dieser Annalen p. 493 einen Satz in Bezug auf electrische Influenz mitgetheilt, welchen ich als „einen sehr allgemeinen und, so viel ich weiss, neuen Satz“ bezeichnete. Ueber diesen Satz spricht Hr. Legebeke, und nach der Art, wie er dabei jene Bezeichnung citirt, scheint es (wiewohl es nicht bestimmt ausgesprochen ist), als ob er sie beanstande.

Was zunächst die Allgemeinheit anbetrifft, so sagt Hr. Legebeke, der gegenwärtig von ihm mitgetheilte Satz sei noch allgemeiner. In dieser Beziehung möchte ich zunächst bemerken, dass hierin kein Widerspruch liegt, denn meine Bezeichnung schliesst die Möglichkeit einer noch weiteren Verallgemeinerung gar nicht aus. Ferner glaube ich, geltend machen zu dürfen, dass der Satz von Legebeke allerdings in mathematischer Beziehung allgemeiner ist, aber in seiner Anwendung auf electrische Influenz, für welche mein Satz allein gelten soll, nur dieselbe Allgemeinheit hat, wie dieser.

Was ferner die Neuheit anbetrifft, so sagt Hr. Legebeke, der von ihm mitgetheilte Satz könne selbst wieder als eine Erweiterung einer bekannten Gleichung von Gauss

betrachtet werden. Hierin liegt noch nicht, dass die Gleichung von Gauss mit meinem Satze gleichbedeutend sei, und ausserdem fügt Hr. Legebeke selbst weiterhin hinzu, dass Gauss die Gültigkeit seines Satzes für zwei über dieselbe Fläche verbreitete Massen nicht vollständig bewiesen habe.

Dass mein Satz mit der von Hrn. Legebeke angeführten Gauss'schen Gleichung, welche eine Grundgleichung der Potentialtheorie ist, zusammenhängt, ist unzweifelhaft, aber der Satz selbst, in der einfachen Form, welche er für die electrische Influenz annimmt, ist weder von Gauss, noch, soviel ich weiss, von irgend einem andern vor mir ausgesprochen.

Bonn, Mai 1880.

VII. *Ueber eine directe Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme in Electricität; von W. Hankel.*

(Aus den Berichten der K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 23. April 1880; mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Ich werde heute einen allgemeinen Bericht geben über einige Versuche, welche eine directe Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme in Electricität darthun; die speciellen Angaben behalte ich einer späteren Abhandlung vor.

Im Jahre 1865 habe ich in den Berichten unserer Gesellschaft [1]) eine Theorie der electrischen Erscheinungen durchgeführt, nach welcher die Electricität in Schwingungen besteht, und zwar in kreisförmigen Schwingungen des Aethers unter Betheiligung der Materie. Die positive und die nega-

1) Berichte über die Verh. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. p. 7. 1865.

tive Modification der Electricität unterscheiden sich nach dieser Ansicht nur durch den Sinn der Drehung, und derselbe kreisförmige Wirbel (wenn ich diesen Ausdruck gebrauchen darf), welcher, von der einen Seite gesehen, rechtsum, von der andern gesehen linksum rotirt, stellt infolge dessen auf der einen Seite die positive, auf der andern die negative Modification der Electricität dar. Sollen nun die gewöhnlichen Wärmeschwingungen direct in Electricität übergehen, so müssen sie durch den Einfluss der von ihnen durchstrahlten Materie in kreisförmige Bewegungen umgesetzt werden.

Zu der Verwirklichung einer solchen Umwandlung dient die Durchstrahlung des Bergkrystalles in der Richtung seiner Nebenaxen.

In meiner Abhandlung „über die thermoelectrischen Eigenschaften des Bergkrystalles“[1]) habe ich nachgewiesen, dass der Bergkrystall in der Richtung seiner Nebenaxen hemimorphisch gebildet ist; und nach diesen Richtungen finden sich auch thermoelectrische polare Axen. Ueber das thermoelectrische Verhalten dieser Nebenaxen bei abnehmender Temperatur heisst es p. 380 jener Abhandlung: „Wir können hiernach, im Anschluss an die übliche Ausdrucksweise, dem Bergkrystalle sechs electrische Pole, abwechselnd positiv und negativ, oder drei an ihren Enden entgegengesetzt electrische Axen, die mit den sogenannten Nebenaxen der sechsseitigen Pyramide zusammenfallen, zuschreiben.“ Und wenige Zeilen später: „Hieraus folgt, dass die positiven Zonen, welche zwischen den Zonen des Gegenrhomboëders[2]) liegen, stets über diejenigen Prismenkanten hinweg gehen müssen, welche an ihren oberen und unteren Enden Rhombenflächen tragen, oder dass die positiven Pole oder die positiven Endpunkte der electrischen Axen in die Mitten

1) Hankel, Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. **13.** p. 323. 1866.

2) Ich lasse hier die Richtungen, in welchen sich die electrischen Zonen, je nachdem der Krystall ein sogenannter rechter oder linker ist, vom obern Ende zum untern hinabziehen, ausser Betracht, weil dieselben zu den folgenden Mittheilungen keine Beziehung haben.

der eben bezeichneten Kanten des Prismas fallen, während die negativen Pole oder negativen Endpunkte der electrischen Axen den dazwischen liegenden Prismenkanten angehören."

Hiernach zeigen also die beiden Enden einer jeden Nebenaxe bei einem einfachen Bergkrystalle entgegengesetzte electrische Polaritäten. Eine hiermit im Einklange stehende Anordnung der Molecüle des Aethers im Innern des Krystalles erhalten wir, wenn wir dieselben so angeordnet annehmen, dass sie unter dem Einflusse und der Betheiligung der materiellen Molecüle in kreisförmigen Bahnen um die Nebenaxen beweglich, und zwar in der einen Richtung leichter beweglich sind als in der entgegengesetzten. Dann wird auf der ganzen Länge der Nebenaxe die leichter eintretende Drehung absolut genommen dieselbe Richtung haben, aber, von aussen gesehen, an dem einen Ende gerade entgegengesetzt als am andern erscheinen; an den beiden Enden einer Nebenaxe werden also infolge der in der Richtung der begünstigten Drehung eintretenden kreisförmigen Schwingungen entgegengesetzte Electricitäten auftreten.

Da ferner beim Bergkrystalle, entsprechend den bei ihm auftretenden hemimorphischen Gestalten, die aufeinander folgenden Enden der Nebenaxen abwechselnd positiv und negativ sind, so müssen, wenn wir die zuvor gemachte Annahme beibehalten, die Drehungen um die abwechselnden Nebenaxen sich verschieden verhalten, d. h. wenn die Drehung um die eine Axe aus der Verlängerung ihres Endes gesehen rechtsum leichter geschieht, so wird dieselbe um die benachbarten Nebenaxen, ebenfalls aus der Verlängerung derselben nach derselben Seite gesehen, leichter linksum erfolgen.

Wenn die aus einem leuchtenden oder warmen Körper austretenden Schwingungen ein Aethertheilchen treffen, so wird infolge des stets wechselnden Schwingungszustandes der anlangenden Strahlen das Aethertheilchen sich bald geradlinig, bald kreisförmig, bald elliptisch in der einen oder andern Richtung bewegen. Treffen solche Schwingungen in der Richtung einer der Nebenaxen auf einen Bergkrystall, so werden diejenigen Schwingungen, deren Sinn mit der

Richtung der leichteren Drehung der Molecüle des Aethers im Bergkrystalle übereinstimmt, die Drehung dieser Aethertheilchen unter Betheiligung der materiellen Molecüle der Substanz einleiten, und infolge dessen an den Enden dieser Nebenaxe electrische Spannungen wahrnehmbar werden, und zwar muss das eine Ende die eine, das entgegengesetzte die andere Modification der Electricität zeigen.

Ich werde nun nachweisen, dass die zuvor beschriebenen Erscheinungen in der That eintreten.

Ein 4 bis 6 cm langer und 2 bis 3 cm dicker, sehr klarer Bergkrystall, z. B. vom St. Gotthardt, der ein möglichst einfaches Individuum darstellt, wird mit seinem unteren verbrochenen Ende mittelst Siegellack auf einer Metallplatte aufgekittet, sodass seine Hauptaxe vertical steht, und neben das Electrometer gebracht. Eine 1 bis 2 cm im Durchmesser haltende Metallkugel [1]) wird sodann durch Siegellack oder Schellack isolirt an die Mitte der einen verticalen Kante des Bergkrystalles so gestellt, dass die Verlängerung der dieser Kante entsprechenden Nebenaxe durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Die isolirte Kugel setzt man durch einen dünnen Platindraht mit dem Goldblättchen des von mir construirten Electrometers [2]) in Verbindung. Endlich wird mittelst eines Hohlspiegels (eines aus einem Teleskop genommenen Spiegels) das Sonnenlicht in der Richtung der genannten Nebenaxe auf den Krystall geworfen, sodass der Brennpunkt des Lichtbündels ungefähr in der Mitte des Krystalles liegt. [3])

Wenn nun die Kante, auf welcher das Licht in den Krystall eindringt (sie möge die vordere heissen), oben die

1) Dieser Leiter kann auch eine beliebige andere Form haben; ich habe z. B. die Kante des Krystalles mit einem Stanniolstreifen belegt.

2) Die Empfindlichkeit des Electrometers war so regulirt, dass ein Element Zinn-Kupfer-Wasser einen Ausschlag des Goldblättchens von 50 Scalentheilen erzeugte.

3) Anstatt das Sonnenlicht durch einen Hohlspiegel auf den Krystall zu werfen, hätte ich auch die directen Strahlen der Sonne anwenden können. Doch würde dieses Verfahren sehr umständliche Vorrichtungen und die völlige Abänderung der gegenwärtigen Aufstellung des Electrometers bedingt haben.

sogenannte Rhombenfläche trägt, so zeigt, sobald das Licht auffällt, das mit der an der hintern Kante stehenden Kugel verbundene Goldblättchen sofort einen negativen Ausschlag, dessen Grösse je nach der Beschaffenheit des Krystalles und der Sonnenstrahlen verschieden ist. Unter günstigen Umständen erreicht er eine solche Grösse, dass das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes getrieben wird. Der Ausschlag steigt in ungefähr 20 Secunden bis zu seinem Maximum. Wird die Strahlung der Sonne durch Drehung des Spiegels zur Seite gewendet, so kehrt das Goldblättchen in einem gleichen Zeitintervalle wieder zurück, und zwar zur Ruhelage, wenn die Bestrahlung nur wenige Secunden gedauert hat.

Dreht man jetzt den Krystall um, sodass die oben mit Rhombenfläche versehene Kante an die Kugel zu stehen kommt, das Licht also auf die frühere hintere Kante fällt, so erscheint ein positiver Ausschlag.

Untersucht man auch die beiden anderen Nebenaxen, so zeigt sich bei einfachen Krystallen ein Wechsel in der Polarität auf den benachbarten Kanten.

Das Ende der Nebenaxe, an welchem die Strahlung austritt, erhält also eine bestimmte Polarität; trägt die Kante, an welcher die Strahlen austreten, oben keine Rhombenfläche, so erscheint sie negativ; liegt aber oberhalb derselben die Rhombenfläche[1]), so nimmt sie positiv electrische Spannung an.

Ebenso leicht wie die Beschaffenheit der Kanten, an welchen die Strahlung austritt, lässt sich das electrische Verhalten der Kanten beobachten, an welchen die Strahlen eintreten; nur werden die Wirkungen nicht dieselbe Stärke erreichen, weil wir die Sonnenstrahlen nicht mehr gerade in der Richtung der Nebenaxen durch den Krystall gehen lassen können. Zu diesem Behufe stellt man den Krystall etwa

1) Da nicht stets die drei Rhombenflächen am obern Ende vorhanden sind, so sind unter der Bezeichnung von Kanten, welche oben die Rhombenfläche tragen, auch diejenigen Kanten zu verstehen, an denen sie vielleicht nicht gesehen wird, aber auftreten müsste, wenn alle Rhombenflächen vollzählig ausgebildet wären.

unter 40° gegen den Horizont geneigt und bringt die isolirte, mit dem Goldblättchen durch den Platindraht verbundene Kugel nahe über die Kante, auf welche das Licht möglichst in der Richtung der Nebenaxen einfällt. Das Electrometer zeigt eine electrische Erregung im Krystalle an, und zwar erscheint die Kante, auf welche das Licht einfällt, wenn sie oben die Rhombenfläche trägt, positiv, dagegen negativ, wenn diese Fläche gesetzmässig dort nicht erscheinen kann. Die electrische Polarität der Kanten ist also genau dieselbe, gleichviel ob die Strahlung an den Kanten ein- oder austritt, weil in Uebereinstimmung mit der früher entwickelten Ansicht die Richtung der leichteren Drehung unverändert bleibt.

Bei diesen letzteren Beobachtungen kann auch der Krystall, wie ich dies bei meinen thermoelectrischen Untersuchungen ausführe, um ihn bequemer in passende Lagen bringen zu können, in Kupferfeilicht eingesetzt werden, sodass nur die zu bestrahlende Kante frei bleibt.

Da die Beobachtungen mittelst der Bestrahlung durch die Sonne bei geöffnetem Fenster sehr unbequem[1]), und bei bedecktem Himmel unmöglich waren, so versuchte ich die Sonne durch eine Gasflamme, deren Strahlen in gleicher Weise wie zuvor das Sonnenlicht durch einen grösseren metallischen Hohlspiegel von 12 cm Brennweite und 20 cm Oeffnung auf den Krystall geworfen wurden, zu ersetzen.

Die Versuche ergaben das gleiche Resultat, wie die Anwendung der Sonnenstrahlen, und es konnte bei geeigneten Krystallen die Wirkung soweit gesteigert werden, dass das Goldblättchen des Electrometers ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes hinausging.

Mittelst der Anwendung des Gaslichtes liess sich nun aber leicht entscheiden, welche von der Sonne oder der Gasflamme ausgehenden Strahlen die electrischen Spannungen hervorbringen. Eine vor den Krystall gestellte dünne Glasplatte schwächte die Wirkung der Gasflamme beträchtlich, während eine viel dickere Steinsalzplatte dieselben noch gut

1) Das Electrometer stand auf der steinernen Fensterbank und erlitt daher bei geöffnetem Fenster leicht Störungen durch Luftzug.

hervortreten liess. Es sind daher in der Hauptsache nicht die leuchtenden, sondern die dunklen Wärmestrahlen, welche das Phänomen erzeugen.

Es ist mir wegen Kürze der Zeit und namentlich wegen Mangels an geeigneten Krystallen noch nicht möglich gewesen festzustellen, bis zu welchen Strahlengattungen eine Wirkung eintritt. Ich begnüge mich daher für jetzt mit der allgemeinen Angabe, dass die Schwingungen der sogenannten dunklen Wärmestrahlen bei ihrem parallel mit den Nebenaxen erfolgenden Durchgange durch den Bergkrystall in electrische Schwingungen verwandelt werden, die an dem einen Ende der Axe als positive, an dem andern als negative Polarität erscheinen.[1])

Da die dunklen Wärmestrahlen vorzugsweise, ja vielleicht ausschliesslich in Electricität übergehen, so müssen die oben beschriebenen Erscheinungen sich auch einstellen, wenn einer Kante des Bergkrystalles ein heisser Körper genähert wird. Stellt man zwei gegenüber liegenden Kanten des Bergkrystalles zwei Kugeln gegenüber, sodass ihre Mittelpunkte in der verlängerten Nebenaxe liegen, so zeigen, wenn die eine Kugel erhitzt ist, sich beide Kugeln electrisch, und zwar die an der Kante mit Rhombenfläche befindliche positiv, die andere negativ, wobei es gleichgültig ist, welche der beiden Kugeln erhitzt ist; sie können auch beide heiss sein.

Dieser letzte Versuch lässt sich auch so abändern, dass man den Krystall in das in einem kupfernen Kästchen befindliche Kupferfeilicht einhüllt (wie dies bei meinen thermoelectrischen Versuchen stets geschieht) und nur eine Kante nebst ihren Umgebungen frei lässt. Das kupferne Kästchen kann isolirt und mit dem Goldblättchen des Electrometers verbunden, oder zur Erde abgeleitet werden. An das untere Ende des Platindrahtes, das ich sonst bei meinen thermoelectrischen Untersuchungen den verschiedenen Punkten der

1) Auch die dunklen Wärmestrahlen werden sicherlich nicht alle gleich stark wirken. Es scheint die Wirkung namentlich den äussersten Strahlen anzugehören. Sollten wirksame Strahlen vielleicht sogar noch jenseits der bisher mittelst der Thermosäule festgestellten Grenze zu suchen sein?

Oberfläche der Krystalle mittelst einer durch Stellschrauben zu regulirenden Hebelvorrichtung nähere, wird eine erhitzte Kugel angeschraubt und mittelst der Hebelvorrichtung der Kante des Krystalles möglichst genähert. Es ist dann leicht, sowohl die in der genäherten Kugel entstehende Electricität, als auch die von dem eingehüllten Axenende dem kupfernen Kästchen mitgetheilte mittelst des Electrometers zu beobachten.

Um überhaupt z. B. bei dieser letzteren Anordnung eine Electricitätserregung in der genäherten Kugel nachzuweisen, genügt schon eine geringe Erhöhung der Temperatur der Kugel über die des Bergkrystalles.[1])

1) Es ist sehr gewöhnlich der Fall, dass bei neuen Entdeckungen der eine oder andere dem betreffenden Gebiete angehörige Vorgang früher bereits einem Beobachter entgegengetreten ist, jedoch ohne von diesem in seiner Bedeutung erkannt zu werden; es wird die Erscheinung entweder als eine den bekannten Gebieten zuzuzählende betrachtet, oder als störende Einwirkung bei Seite geschoben. Es dürfte daher auch wohl ein Interesse haben, zu untersuchen, ob die im Vorstehenden beschriebenen Erscheinungen nicht bereits bei zu anderen Zwecken unternommenen Versuchen aufgetreten sind, aber nicht in ihrer Bedeutung erfasst wurden. Dies ist in der That der Fall gewesen.

Hr. Ch. Friedel hat in dem 2. Bande des Bulletin de la société minéralogique de France p. 31 (1879) eine Notiz veröffentlicht: Sur la pyroélectricité dans la topaze, la blende et le quartz. Sein Verfahren, die thermoelectrischen Erregungen zu beobachten, besteht darin, dass er eine erhitzte Halbkugel, welche mit dem Electrometer leitend verbunden ist, auf die an den zu prüfenden Krystallen senkrecht zu ihrer electrischen Axe angeschliffenen Flächen legt. Er hat seine Methode beim Turmalin und Topas erprobt, und in diesen Fällen gibt das Electrometer in der That die electrische Polarität an, welche durch die steigende Temperatur an dem mit der heissen Halbkugel in Berührung befindlichen Ende der electrischen Axe erzeugt wird. Dann wendet er dieselbe Methode auch zur Bestimmung des electrischen Verhaltens des Bergkrystalles an, indem er die heisse Halbkugel auf angeschliffene, die Seitenkanten des Prismas abstumpfende Flächen legt.

Hr. Ch. Friedel gibt in jener Notiz die von mir in meiner oben citirten Abhandlung über die electrische Vertheilung auf den Bergkrystallen aufgestellten Gesetze sehr unvollständig wieder; er führt blos die von mir auf den an beiden Enden regelmässig ausgebildeten, optisch rechten Krystallen nachgewiesene Lage der electrischen Zonen an, erwähnt aber weder die von mir ebenso bestimmt angegebene Vertheilung

Die Electricitätserregung, welche das Sonnen- und Gaslicht, sowie die dunklen Strahlen einer heissen Kugel veranlassen, dauert fort, solange die Strahlung währt.

Wird bei einem dieser Vorgänge, z. B. wenn die von der Gasflamme ausgehenden Strahlen die vordere Kante eines Krystalles treffen, die an der hintern Kante stehende Kugel einige Secunden nach dem Beginn der Bestrahlung, wo der Ausschlag des Electrometers noch nicht sein Maximum erreicht hat, zur Erde abgeleitet und sofort wieder isolirt, so erscheint nochmals ein geringer Ausschlag nach derselben Seite. Vergeht aber bis zur Wiederherstellung der Isolation ein Zeitraum von mehr als 20 Secunden, so bleibt das Goldblättchen zuerst in der Ruhelage und beginnt dann zufolge der gewöhnlichen thermoelectrischen Erregung durch die

---

auf linken Krystallen, noch auch die durch Verwachsung des einen Endes der Hauptaxe eintretenden Aenderungen, und glaubt dann eine mit der Natur des Bergkrystalles besser übereinstimmende Vertheilung aufzustellen, indem er sagt, „que les arêtes alternatives dans les cristaux simples sont de signe électrique opposé, et le sont de la même manière dans toute leur étendue. Les arêtes, qui portent les faces rhombes ont toujours donné une tension positive par le contact avec le plan d'épreuve chauffé; les arêtes opposées donnant une tension negative. Les axes horizontaux du trigonoèdre, c'est à dire les diagonales de la base du prisme hexagonal du quartz, seraient donc les axes de pyroélectricité.“ Wie man sieht, ist dies aber genau die von mir bereits in meiner Abhandlung (s. oben p. 65) angegebene Lage der electrischen Axen; ausserdem hat aber Hr. Friedel nicht bemerkt, dass die von ihm an den Enden der Nebenaxen angegebene Polarität gerade die entgegengesetzte ist von der meinerseits angeführten. Die Angaben des Hrn. Friedel sollen sich, wie er selbst sagt, auf die steigende Temperatur beziehen, während die oben von mir p. 619 angeführten die Vertheilung beim Erkalten darstellen, und doch lauten beide gleich. Dieser Widerspruch erklärt sich dadurch, dass Hr. Friedel gar nicht die eigentliche thermoelectrische Erregung, sondern eben die im Vorstehenden von mir beschriebene, durch die Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme erzeugte Polarität beobachtet hat; denn wenn er, was durch den zu erzielenden Erfolg selbst geboten war, die erhitzte Halbkugel sofort nach dem Auflegen auf die an dem Krystall senkrecht gegen die Nebenaxen angeschliffenen Flächen isolirte, so musste zuerst die Wirkung der Strahlung eintreten. Die dann durch das Eintreten der eigentlichen thermoelectrischen Erregung erfolgende Abnahme des Ausschlags scheint Hr. Friedel jedoch nicht bemerkt zu haben.

steigende Temperatur in der entgegengesetzten Richtung sich zu bewegen. Wird jetzt die Strahlung der Lampe aufgehoben, so geht das Goldblättchen infolge des Freiwerdens der in der Kugel gebundenen Electricität stark nach der dem anfänglichen Ausschlage entgegengesetzten Seite.

Die im Vorstehenden beschriebenen Vorgänge sind wesentlich von den früher von mir untersuchten und in der oben citirten Abhandlung beschriebenen thermoelektrischen verschieden. Während die thermoelectrischen Spannungen zu ihrer Entstehung, weil die Masse des Krystalles ihre Temperatur ändern muss, eine längere Zeit gebrauchen und dann auch länger fortbestehen, tritt bei den neuen Versuchen die Electricitätserregung rascher (innerhalb 20 Secunden) in voller Stärke ein und verschwindet auch in einem gleichen Zeitraume wieder.

Ferner ist die durch die Umwandlung der Wärmestrahlung hervorgerufene Electricität gerade die entgegengesetzte von derjenigen, welche nach den von mir beschriebenen thermoelectrischen Vorgängen eintreten müsste: durch die Strahlung, von welcher man eine electrische Einwirkung im Sinne der Erwärmung erwarten sollte, tritt eine Electricitätserregung ein, wie sie der Abkühlung entspricht.

Da das Eintreten der Strahlung von Seiten eines äussern warmen Körpers eine Electricitätserregung zur Folge hat, so liess sich erwarten, dass auch der umgekehrte Vorgang, wenn ein erhitzter Krystall gegen einen kältern genäherten Körper Wärme ausstrahlt, gleichfalls Electricität erzeugen würde, und zwar müsste dieselbe, ebenso wie zuvor, wieder gerade entgegengesetzt derjenigen sein, welche man nach den bekannten thermoelectrischen Spannungen zu erwarten hätte, d. h. die Annäherung einer kalten Kugel an die Kante eines erhitzten Krystalles müsste eine Electricität hervorrufen, welche der durch Erwärmung eben dieser Kante entstehenden entspräche.

Leider ist es nicht möglich, diesen Vorgang rein und frei von Störungen darzustellen. Da der Krystall erwärmt sein muss, so mischen sich die gewöhnlichen thermoelectrischen

Spannungen ein. Indess gelingt es doch, wenigstens im Allgemeinen, den Nachweis des Vorhandenseins desselben zu liefern. Setzt man z. B. einen Bergkrystall in das in einem kleinen kupfernen Kästchen befindliche Kupferfeilicht, wie solches bei den gewöhnlichen thermoelectrischen Untersuchungen zum Einhüllen der Krystalle benutzt wird, so ein, dass nur eine Kante (sie möge oben die Rhombenfläche tragen) nebst den umgebenden Flächenstücken unbedeckt bleibt, bringt das Kästchen mit seinem Inhalte eine halbe Stunde in einen Raum von 100° C. und stellt es nach dem Herausnehmen sofort neben das Electrometer, so wird, wenn wie gewöhnlich bei den thermoelectrischen Beobachtungen die Spitze eines Platindrahtes der Kante genähert wird, anfangs noch ein negativer Ausschlag im Sinne der Erwärmung eintreten. Nach ungefähr 10 Minuten (bei mässig grossen Krystallen) ist derselbe verschwunden, und es tritt bei Annäherung der Spitze des Platindrahtes ein positiver Ausschlag ein. Wird jetzt rasch an die Spitze des Drahtes eine kalte Messingkugel geschraubt und diese Kugel der Kante genähert, so geht bei der Annäherung das Goldblättchen zuerst nach der positiven Seite, kehrt dann bei weiterer Annäherung um und zeigt einen negativen Ausschlag, der sich durch Auflegen der Kugel auf die Kante noch beträchtlich vergrössert.

Es ist bei diesem Versuche allerdings der electrische Zustand im Innern des Krystalles unbekannt. Man könnte geneigt sein, anzunehmen, dass das Innere noch die der Erwärmung entsprechende Polarität besitze und nur die äussere Hülle sich durch Abkühlung umgekehrt habe, sodass bei etwas grösserem Abstande der Kugel die Electricität der Hülle, bei grösserer Nähe aber die des Kernes den Ausschlag bedinge. Indess müsste dann der Krystall eine gleiche Wirkung auch auf den genäherten Platindraht ausüben, und es würde die sehr beträchtliche Verstärkung des negativen Ausschlages, wenn die der Kante bereits sehr nahe stehende Kugel mit dieser in Berührung kommt, nicht wohl erklärlich sein. Die Beobachtung des Vorganges scheint daher anzuzeigen, dass durch die Annäherung der kalten Kugel an die erwärmte mit Rhombenfläche versehene

Kante die negative Electricität erzeugt wird, also dieselbe, wie sie diese Kante bei steigender Temperatur annimmt.

Beim Eintritt der Wärmestrahlen in einen Bergkrystall schlägt das Goldblättchen, wie bereits bemerkt, nicht augenblicklich bis zu einem Maximum aus, sondern es vergehen ungefähr 20 Secunden, ehe dies erreicht wird; es macht den Eindruck, als ob ein gewisser Widerstand zu überwinden ist, um die Aethermolecüle unter Betheiligung der materiellen Substanz des Bergkrystalles in eine der Strahlung entsprechende Schwingung zu versetzen, und eben dieser Widerstand macht sich auch bei Aufhebung der Strahlung wieder bemerklich, indem die Schwingungen im Krystall ebenfalls nur innerhalb 20 Secunden wieder verschwinden. Diese verschwindenden Schwingungen werden sich jedenfalls soweit in Wärme umsetzen, also die Temperatur des Krystalles erhöhen, bis ihr Rest der vorhandenen Temperatur entspricht und bei derselben fortbestehen kann.

In einem bis 100° C. erhitzten Krystalle werden die kreisförmigen Schwingungen der Molecüle eine grössere Intensität besitzen, als in einem Krystalle von niederer Temperatur. Wird nun ein erhitzter Krystall durch Ueberstreichen mit einer Alkoholflamme scheinbar unelectrisch gemacht, so tritt dieser scheinbar unelectrische Zustand dadurch ein, dass sich über die Oberfläche eine entgegengesetzt electrische Schicht in solcher Weise und Dicke legt, dass die Wirkung der inneren electrischen Schwingungen durch die entgegengesetzt gerichteten der Oberfläche nach aussen hin aufgehoben wird. Denken wir uns die Wirkung der inneren electrischen Theilchen auf Punkte ausserhalb durch eine ideelle Vertheilung der Electricität auf der Oberfläche ersetzt, so wird durch die leitende Alkoholflamme zu dieser Oberfläche eine Schicht von entgegengesetzter Beschaffenheit, aber überall gleicher Dicke mit jener ideellen Schicht geleitet und daselbst durch die Wirkung der inneren Theile festgehalten; in Bezug auf äussere Punkte erscheint der Krystall also unelectrisch. Wird nun der heissen Kante des Krystalles eine kalte Kugel genähert, so strahlt der Krystall

Wärme gegen die Kugel aus, die kreisförmigen Schwingungen können nicht in gleicher Stärke fortbestehen, sie werden geschwächt, und die Electricität der Hülle wirkt nach aussen, gibt also einen Ausschlag am Electrometer, welcher dem bei Annäherung einer warmen Kugel an einen kalten Krystall, also bei Verstärkung der electrischen Schwingungen entstehenden entgegengesetzt ist, mithin mit demjenigen übereinstimmt, welchen die betreffende Kante thermoelectrisch bei steigender Temperatur zeigt.

Die von mir im Vorstehenden beschriebenen electrischen Vorgänge gehören nicht zu dem Wesen der eigentlichen Thermoelectricität der Krystalle; sonst müssten sie auch beim Turmalin, Topas, Gyps u. s. w. eintreten, was ich bis jetzt nicht habe nachweisen können. Sie stehen aber beim Bergkrystall unzweifelhaft in Beziehung zu den thermoelectrischen Eigenschaften desselben, wie ihr Auftreten in der Richtung der Nebenaxen zeigt; indess ist es mir bis jetzt noch nicht möglich gewesen, den Zusammenhang der beiden Electricitätserregungen genauer zu bestimmen.

Zusatz. Im Vorstehenden ist, im Anschluss an den Entwickelungsgang, welchen die Versuche genommen, und mit Rücksicht auf nur schwach durch die strahlende Wärme erregbare Bergkrystalle die Durchstrahlung stets in der Richtung einer Nebenaxe genommen. Die Richtung, in welcher die Wärmestrahlen den Krystall durchdringen, ist jedoch für das Entstehen der Electricität überhaupt durchaus gleichgültig, wie schon aus dem oben p. 623 ausgesprochenen Satze hervorgeht, wonach die Polarität einer Kante ungeändert bleibt, gleichviel ob die Strahlung an ihr ein- oder austritt. Diese Unabhängigkeit der Electricitätserregung von der Richtung der Wärmestrahlen steht auch mit der p. 620 und 621 entwickelten Ansicht in vollem Einklange. Wird also ein einfacher Bergkrystall nach irgend einer Richtung (selbst parallel mit der Hauptaxe) in seiner ganzen Ausdehnung von Wärmeschwingungen durchstrahlt, so treten gleichzeitig auf allen sechs Seitenkanten des Prismas electrische Pole, abwechselnd positiv und negativ, auf-

---

VIII. *Ueber Fluorescenz; von E. Lommel.*

(Fortsetzung von p. 472.)

8. Soll die Lichtmenge ermittelt werden, welche jenes cylindrische Volumen einem Flächenelemente zustrahlt, so ist das bisher benutzte, dem kegelförmigen Volumen angepasste Polarcoordinatensystem unzweckmässig und würde zu sehr complicirten Ausdrücken führen. Wir gehen daher wieder von der obigen Grundformel:

$$dL = df.Jaak\cos i\cdot\frac{e^{-(kr'+k'r)}}{(r_0+r)^2}\cdot dv$$

aus, indem wir dieselbe jetzt auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, dessen z-Axe in die Normale des Flächenelementes df und dessen xy-Ebene in die Vorderfläche der fluorescirenden Schicht fällt. Alsdann ist $dv = dx\,dy\,dz$, $r' = z$, ferner:

$$r = \frac{z}{\cos i}, \qquad r_0 = \frac{R_0}{\cos i}, \qquad \cos i = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(R_0+z)^2}}},$$

wenn R_0 die Entfernung des Flächenelementes df von der Vorderfläche der fluorescirenden Schicht bedeutet. Demnach ist:

$$dL = df.Jaak.\cos^3 i\cdot\frac{e^{-\left(k+\frac{k'}{\cos i}\right)z}}{(R_0+z)^2}\,dx\,dy\,dz;$$

ist nun das Verhältniss:

$$\frac{x^2+y^2}{(R_0+z)^2}$$

klein genug, um statt $\cos i$ die Einheit setzen zu können, so haben wir:

$$dL = df.Jaak\cdot\frac{e^{-(k+k')z}}{(R_0+z)^2}\cdot dx\,dy\,dz.$$

Setzen wir nun:

$$\iint dx\,dy = \omega,$$

wo ω den Querschnitt des betrachteten Cylinders bedeutet, und schreiben r statt z und r_0 statt R_0, so gelangen wir zu der Formel:

$$L = df.\omega J a \alpha k \int_0^R \frac{e^{-(k+k')r}}{(r_0+r)^2}\, dr.$$

Dies ist der Ausdruck, welcher den Erörterungen in meiner Abhandlung „über die Intensität des Fluorescenzlichts" zu Grunde liegt; die Folgerungen, welche ich dort aus demselben gezogen habe, sind sämmtlich vollkommen richtig, sowohl diejenigen, welche Hr. Hagenbach bestätigt findet, als diejenigen, welchen er „seine Zustimmung nicht zu ertheilen vermag."

Wie ich oben bereits bemerkt habe, lassen sich mehrere dieser Folgerungen, nämlich alle diejenigen, bei welchen Aenderungen der Entfernung des beleuchteten Flächenelements von der fluorescirenden Substanz nicht in Betracht kommen, auch aus dem Ausdruck:

$$F = a\alpha \cdot \frac{k}{k+k'}\left(1 - e^{-(k+k')R}\right)$$

ableiten, welcher die von der Flächeneinheit senkrecht ausstrahlende Menge des Fluorescenzlichts angibt und von Hrn. Hagenbach als „Leuchtkraft" bezeichnet wird. Denn dieser Ausdruck ist ja in obiger Formel als besonderer Fall bereits enthalten und ergibt sich aus ihr, wenn r_0 so gross angenommen wird, dass r dagegen vernachlässigt werden kann. Alle aus dem Ausdruck F gezogenen Ergebnisse müssen demnach mit den von mir aus der obigen Formel abgeleiteten übereinstimmen. Dies ist auch in der That durchweg der Fall, und die abweichenden Resultate des Hrn. Hagenbach beruhen lediglich auf von ihm begangenen Versehen.

9. Vergleichen wir z. B. die Intensitäten, mit welchen zwei verschiedene Strahlengattungen, deren Attribute λ', k', a' und λ'', k'', a'' seien, im Fluorescenzlicht vertreten sind, so stehen dieselben zueinander in dem Verhältniss:

$$\frac{F'}{F''} = \frac{a'}{a''} \cdot \frac{k+k''}{k+k'} \cdot \frac{1-e^{-(k+k')R}}{1-e^{-(k+k'')R}}.$$

Aendert sich nun die Concentration, so ändern sich k, k' und k'' gleichzeitig in dem nämlichen Verhältniss und gehen

über in νk, $\nu k'$ und $\nu k''$; der vorstehende Quotient nimmt alsdann die folgende Form an:

$$\frac{F'}{F''} = \frac{a'}{a''} \cdot \frac{k+k''}{k+k'} \cdot \frac{1-e^{-\nu(k+k')R}}{1-e^{-\nu(k+k'')R}},$$

und man sieht, dass derselbe, wenn $k' > k''$ ist, mit wachsendem ν von dem Werthe $\frac{a'}{a''}$, welcher ihm für $\nu = 0$ zukommt, fortwährend abnimmt bis zu dem Grenzwerth $\frac{a'}{a''} \cdot \frac{k+k''}{k+k'}$. Genau dasselbe Resultat habe ich früher aus der obigen Formel L abgeleitet[1]) und in folgendem Satze ausgesprochen: Die Farbenmischung des Fluorescenzlichts ändert sich mit wachsender Concentration derart, dass die stärker absorbirbaren Bestandtheile immer mehr gegen die minder absorbirbaren zurücktreten.

Hr. Hagenbach dagegen verfährt in folgender Weise: er setzt in obigem Ausdruck R unendlich, lässt die Exponentialgrössen ohne weiteres verschwinden und erklärt nun, jenes Verhältniss sei von der Concentration unabhängig. Ein solches Verfahren ist aber nicht zulässig. Denn man mag sich R so gross vorstellen als man will, so nimmt jede der vorkommenden Exponentialgrössen für $\nu = 0$ den Werth 1 und mit wachsendem ν nach und nach alle Werthe zwischen 1 und 0 an.

Im Vertrauen auf das Ergebniss seiner unrichtigen Rechnung lässt sich Hr. Hagenbach durch den blossen Anblick zweier verschieden concentrirten Lösungen zur Annahme einer andern Farbennuance nicht verleiten, sondern erklärt meine Wahrnehmung, dass die Fluorescenzfarbe des Naphthalinroths bei concentrirteren Lösungen sich mehr ins Röthliche, und diejenige des Eosins sich mehr ins Olivengrüne ziehe, für „Täuschung". Er vergleicht zwei Lösungen, eine stark concentrirte, welche schwächer, und eine weniger concentrirte, welche stark fluorescirt, bringt beide Fluorescenzen durch ungleiche Beleuchtung auf gleiche Lichtstärke und „überzeugt sich leicht, dass von einem Unterschiede der Farbennuance keine Rede ist." Bei dieser

1) Lommel, Pogg. Ann. **160**. p. 82. 1877.

Beobachtung sind aber die zu vergleichenden Lösungen sehr ungünstig gewählt. Unsere Formel zeigt nämlich, dass jenes Verhältniss, namentlich bei erheblicher Dicke der Schicht, sich mit wachsender Concentration sehr rasch seinem Grenzwerthe nähert, sodass von einer gewissen Concentration an zwischen einer schwächern und einer concentrirtern Lösung ein merklicher Farbenunterschied nicht mehr besteht. Vergleicht man daher eine stark fluorescirende Lösung, welche schon ziemlich stark concentrirt sein muss, mit einer noch concentrirteren, welche schwächer fluorescirt, so kann der Farbenunterschied zwischen beiden allerdings bis zur Unmerklichkeit herabsinken. Um denselben möglichst deutlich hervortreten zu lassen, setzte ich eine sehr verdünnte schwach fluorescirende und eine concentrirtere stark fluorescirende Lösung von Naphthalinroth in zwei nebeneinander stehenden Glaströgen den horizontalen Sonnenstrahlen aus, welche auf die schwächere Lösung senkrecht, auf die stärkere schief einfielen, sodass beide Fluorescenzen gleich hell erschienen. Betrachtet man nun die fluorescirenden Vorderflächen in der Richtung der Halbirungslinie des stumpfen Winkels, welchen die Vorderwände der beiden Tröge mit einander bilden (d. i. unter gleichen Emanationswinkeln), so zeigt übereinstimmend mit dem obigen Satz die schwächere Lösung einen mehr gelben, die concentrirtere einen mehr rothen Farbenton.

10. Durch die Formel L oder durch den aus ihr hervorgehenden Ausdruck F wird, da k als Function der Schwingungszahl der erregenden Strahlen anzusehen ist, der Gang der Intensität im fluorescirenden Spectrum dargestellt. Ich habe nun in meiner früheren Arbeit das fluorescirende Spectrum mit dem Absorptionsspectrum verglichen[1]), indem ich annahm, dass der Gang der Intensität in letzterem durch die Function k, d. i. durch das Absorptionsvermögen der Substanz dargestellt werde. Dieser Grösse ist nämlich die in dünner Schicht (oder bei geringer Concentration) absorbirte Lichtmenge proportional. Man könnte das durch

1) Lommel, Pogg. Ann. **160.** p. 78. 1877.

die Grösse k dargestellte Absorptionsspectrum passend das „typische" nennen, da es die Grenze darstellt, welcher sich das Absorptionsspectrum bei abnehmender Dicke der Schicht nähert. Vergleicht man nun das Verhältniss der Intensitäten an zwei Stellen des fluorescirenden Spectrums, welchen die Exstinctionscoëfficienten k_1 und k entsprechen, nämlich:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{k + k'}{k_1 + k'} \cdot \frac{1 - e^{-(k_1 + k')R}}{1 - e^{-(k + k')R}}$$

mit dem Verhältniss der Absorptionsintensitäten an denselben Stellen, nämlich mit:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{k_1}{k},$$

so sieht man, dass, da für $k_1 > k$:

$$\frac{k + k'}{k_1 + k'} \quad \text{und} \quad \frac{1 - e^{-(k_1 + k')R}}{1 - e^{-(k + k')R}}$$

echte Brüche sind, stets:

$$\frac{A_1}{A} > \frac{F_1}{F}$$

ist. Daraus folgt, dass die Intensitätsunterschiede im fluorescirenden Spectrum weniger schroff sind als im (typischen) Absorptionsspectrum. Nehmen wir an, der Werth k_1 entspreche einem grössern, der Werth k einem kleinern Maximum, so folgt aus vorstehender Ungleichheit, welche auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{F}{F_1} > \frac{A}{A_1},$$

dass die kleineren Maxima, verglichen mit den grösseren, im fluorescirenden Spectrum verhältnissmässig stärker hervortreten als im Absorptionsspectrum.

Zu dem erstern Satze gelangt auch Hr. Hagenbach, jedoch nur infolge einer Reihe von Irrthümern (s. weiter unten); was den letztern betrifft, so findet er denselben sowie die von mir daran geknüpfte Bemerkung, es erkläre sich daraus die Thatsache, dass das Dasein schwacher Absorptionsmaxima im fluorescirenden Spectrum manchmal leichter wahrgenommen werde als im Absorptionsspectrum, „unverständlich", und vermuthet, dass ein „Missverständniss" vor-

liege. Vielleicht genügen die folgenden Erläuterungen, um jeden Anlass zu einem Missverständniss zu beseitigen.

Denkt man sich den Gang der Intensität in beiden Fällen durch Curven dargestellt, so zeigt die Absorptionscurve nach dem obigen Satze schroffere Gipfel mit bedeutenderen Höhenunterschieden, die Fluorescenzcurve dagegen sanfter gewölbte Kuppen mit geringeren Höhenunterschieden. Bei Substanzen, welche neben einem sehr starken Absorptionsstreifen noch einen sehr schwachen besitzen, entgeht der letztere leicht der Beobachtung; denn wendet man eine dünne Schicht des absorbirenden Mittels an, welche den starken Streifen auf hellem Grunde scharf hervortreten lässt, so bleibt der schwache Streifen unsichtbar, weil seine Intensität hinter derjenigen des starken zu weit zurücksteht; bei dickerer Schicht oder grösserer Concentration dagegen verschwindet der schwache Streifen leicht in dem dunkeln Grunde (vgl. unten 11), welcher nun den grössten Theil des Spectrums überzieht. Im fluorescirenden Spectrum dagegen nähert sich der entsprechende schwache Fluorescenzstreifen mehr der Ebenbürtigkeit mit dem starken und wird gleichzeitig mit diesem, hell aus dunklerem Grunde hervortretend, deutlich wahrgenommen.

11. Wir vergleichen jetzt das fluorescirende Spectrum nicht mit dem typischen, sondern mit demjenigen Absorptionsspectrum, welches durch eine gleichdicke Schicht der Substanz hervorgebracht wird. Eine Schicht von der Dicke R, in welche die Lichtmenge 1 eindringt, absorbirt davon den Antheil:

$$1 - e^{-kR};$$

dieser Ausdruck stellt demnach die Intensität der Absorption dar. Das Verhältniss der Intensitäten an zwei den Exstinctionscoëfficienten k_1 und k entsprechenden Stellen des Absorptionsspectrums ist demnach:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1 - e^{-k_1 R}}{1 - e^{-kR}} \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{A} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{k}{k_1} \cdot \frac{1 - e^{-k_1 R}}{1 - e^{-kR}},$$

während das Intensitätsverhältniss an den nämlichen Stellen des fluorescirenden Spectrums wie oben:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{k + k'}{k_1 + k'} \cdot \frac{1 - e^{-(k_1+k')R}}{1 - e^{-(k+k')R}}$$

ist. Vergleichen wir nun den Gang der beiden Functionen:

$$\frac{k}{k_1} \cdot \frac{1 - e^{-k_1 R}}{1 - e^{-kR}} \quad \text{und} \quad \frac{k + k'}{k_1 + k'} \cdot \frac{1 - e^{-(k_1+k')R}}{1 - e^{-(k+k')R}},$$

indem wir R von 0 bis ∞ wachsen lassen, so ergibt sich, dass die erstere fortwährend abnimmt von dem Werthe 1 (für $R = 0$) bis zu dem Grenzwerthe $\frac{k}{k_1}$ (für $R = \infty$), die zweite ebenso, aber langsamer, abnimmt von dem Werthe 1 bis zu dem Grenzwerthe $\frac{k + k'}{k_1 + k'}$. Da nun:

$$\frac{k}{k_1} < \frac{k + k'}{k_1 + k'},$$

so sehen wir, dass für denselben Werth von R die erstere Function immer kleiner ist als die letztere, und dass demnach stets:

$$\frac{A_1}{A} < \frac{F_1}{F}$$

ist. Daraus geht hervor: Die Intensitätsübergänge im fluorescirenden Spectrum sind schroffer als in dem von einer gleichdicken Schicht hervorgebrachten Absorptionsspectrum. Unsere obige ursprünglich aus der Erfahrung geschöpfte Bemerkung, dass bei dickerer Schicht oder grösserer Concentration ein schwacher Absorptionsstreifen in dem dunkeln Grund des Spectrums leicht verschwimmt, während der entsprechende Fluorescenzstreifen deutlich hervortritt, erscheint hiermit auch theoretisch gerechtfertigt.[1])

---

1) Es ist möglich, dass die fehlerhafte Rechnung, welche Hr. Hagenbach auf p. 379 seiner Abhandlung veröffentlicht, sich auf den oben behandelten Fall beziehen soll. Nachdem Hr. Hagenbach das Verhältniss $F_1 : F$ durch Entwickelung der Exponentialgrössen unrichtig ausgedrückt, indem er $\frac{k_1}{k} \cdot \frac{2 + (k_1 + k')R}{2 + (k + k')R}$ statt $\frac{k_1}{k} \cdot \frac{2 - (k_1 + k')R}{2 - (k + k')R}$ findet, fährt er fort: „Die Lichtintensität 1 wird infolge der Absorption in zwei Schichten von der Dicke R und den Extinctionscoëfficienten k und k_1 reducirt auf:

$$A = 1 - e^{kR} \quad \text{und} \quad A_1 = 1 - e^{k_1 R}.“$$

12. Das vollständige Spectrum des Fluorescenzlichts (Fluorescenzspectrum) ist bekanntlich ein continuirliches Spectrum, welches an beiden Enden stetig in Dunkelheit übergeht. Es versteht sich daher von selbst, dass, wenn die Intensität des Fluorescenzlichts geschwächt wird, sei es, dass man minder intensives oder schwächer wirkendes Erregungslicht anwendet, das beobachtete Fluorescenzspectrum sich verkürzt, indem die schwächsten Strahlen von beiden Enden herein allmählich unter die Grenze der Wahrnehmbarkeit herabsinken. Ausserdem aber habe ich früher gezeigt[1]), dass das Intensitätsverhältniss der einzelnen Farben im Spectrum des Fluorescenzlichts sich, wenn man zu stärker erregenden Strahlen übergeht, derart ändert, dass die stärker absorbirbaren Bestandtheile einen verhältnissmässig grösseren Antheil an seiner Zusammensetzung gewinnen, oder, was dasselbe ist: Beim Uebergang zu schwächer erregenden Strahlen treten die stärker absorbirbaren Bestandtheile des Fluorescenzspectrums immer mehr gegen die minder absorbirbaren zurück. Da nun bei allen mir bekannten Fluorescenzen die brechbareren Strahlen des Fluorescenzlichts immer auch die absorbirbareren sind, so folgt, dass, wenn man zu schwächer erregenden Strahlen übergeht, sich das Fluorescenzspectrum vom brechbareren Ende her in stärkerem Maasse verkürzt, als vom weniger brechbaren Ende, indem jene brechbareren Strahlen rascher als die minder brechbaren unter die Grenze der Wahrnehmbarkeit herabsinken.

In dem obigen Satze ist, wie man sofort einsieht, der folgende implicite bereits enthalten: Beim Uebergange zu schwächer erregenden Strahlen erleidet jedes Maximum des Fluorescenzspectrums eine Verschie-

---

Hr. Hagenbach operirt also hier mit negativen Lichtintensitäten; indem er das Verhältniss derselben mit dem vorher bereits unrichtig ausgedrückten Verhältniss $F_1 : F$ vergleicht, gelangt er zu einem Ergebniss, welches dem oben angegebenen richtigen entgegengesetzt ist, hält dasselbe aber fälschlich für eine Bestätigung meines oben (10) nochmals besprochenen auf das typische Absorptionsspectrum sich beziehenden Satzes.

1) Lommel, Pogg. Ann. **160.** p. 82. 1877.

bung nach der weniger brechbaren Seite hin (nach abwärts). Dieser Satz lässt sich auch leicht direct beweisen. Betrachten wir a und k' als Functionen der Wellenlänge λ' oder der Schwingungszahl n' des Fluorescenzlichts, so stellt der Ausdruck:

$$a \cdot \frac{k}{k+k'} \left(1 - e^{-(k+k')R}\right),$$

oder, wenn wir vorläufig der Einfachheit wegen R so gross annehmen, dass $e^{-(k+k')R}$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, der Ausdruck:

$$a \cdot \frac{k}{k+k'}$$

den Gang der Intensität im Spectrum des Fluorescenzlichts dar. Das Maximum der Intensität im typischen Fluorescenzspectrum (d. h. in dem durch Absorption nicht modificirten Fluorescenzspectrum, welches eine unendlich dünne Schicht der Substanz zeigen würde) entspricht einem Werthe der Schwingungszahl n', für welchen:

$$\frac{\partial a}{\partial n'} = 0$$

ist; für kleinere Werthe der Schwingungszahl ist dieser Differentialquotient positiv, für grössere negativ. Das Intensitätsmaximum im wirklich beobachteten Fluorescenzspectrum dagegen tritt ein, wenn der Differentialquotient des obigen Ausdrucks nach n', nämlich:

$$\frac{k}{k+k'} \frac{\partial a}{\partial n'} - a \cdot \frac{k}{(k+k')^2} \cdot \frac{\partial k'}{\partial n'}$$

verschwindet, oder, wenn:

$$\frac{\partial a}{\partial n'} - \frac{a}{k+k'} \cdot \frac{\partial k'}{\partial n'} = 0$$

ist. Da das Absorptionsvermögen k' mit der Schwingungszahl zunimmt, so ist $\frac{\partial k'}{\partial n'}$ positiv; dieser Gleichung kann daher nur durch einen Werth von n' genügt werden, für welchen $\frac{\partial a}{\partial n'}$ positiv ist, d. i. durch eine Schwingungszahl, welche kleiner ist als diejenige, bei welcher das Maximum im typischen Fluorescenzspectrum liegt. Und da:

$$\frac{a}{k+k'}$$

mit abnehmendem k zunimmt, so wird der positive Werth von $\frac{\partial a}{\partial n'}$ um so grösser, d. h. das Maximum rückt um so mehr nach der Seite der kleineren Schwingungszahlen, je kleiner das Erregungsvermögen der einfallenden Strahlen wird. Durch dieselbe Schlussweise kann der Beweis auch für einen beliebigen Werth von R geführt werden.

Beobachter, welche mit den photometrischen Eigenthümlichkeiten des Fluorescenzlichts nicht hinlänglich vertraut sind, können sich leicht verleiten lassen, diese Verkürzung des brechbareren Endes des Fluorescenzspectrums und die Hinabschiebung seines Maximums beim Uebergang zu schwächer erregenden Strahlen als eine Folge des Stokes'schen Gesetzes oder gar als einen Beweis für dasselbe anzusehen.[1]) Dass eine solche Deutung der Erscheinungen unrichtig ist, geht aus dem Umstande hervor, dass die Verkürzung des brechbareren Endes und das Abwärtsrücken des Maximums auch dann eintritt, wenn man zu schwächer wirksamen aber brechbareren erregenden Strahlen übergeht, z. B. beim Naphthalinroth von den stark wirkenden gelbgrünen zu den schwächer wirkenden blauen Strahlen.

III. Das Stokes'sche Gesetz.

1. Ich gehe nun über zur Besprechung der Beobachtungen, welche das Stokes'sche Gesetz zum Gegenstand haben, indem ich mich zuerst zu den Versuchen wende, bei welchen die Erregung durch prismatisch zerlegtes Sonnenlicht bewirkt wird.

Es werde mittelst Spalt, achromatischer Linse und Prisma ein scharfes Sonnenspectrum entworfen, und aus demselben mit einem zweiten Spalte, welcher demnach zu dem ersten in Bezug auf die Linse conjugirt ist, ein bestimmter schmaler Theil herausgeschnitten. „Wurde in der angegebenen Weise", so fährt Hr. Hagenbach nach Beschreibung dieser Anordnung fort, „homogenes Licht aus der Gegend der Linie D genommen, mit einer Linse auf eine weisse Thonplatte concentrirt, dann das von dieser zerstreute Licht mit Spiegel

1) Vgl. Hagenbach, a. a. O. p. 393.

und Linse auf die Spalte des Spectralapparates geworfen, so sah man im Spectralapparate nur gelbes Licht; stellte man nun das Fadenkreuz auf das brechbarere Ende ein und träufelte eine Lösung von Naphthalinroth auf die Thonplatte, so zeigte sich sofort im Spectrum grünes Lichl, und das Spectrum ging sehr merklich über das Fadenkreuz nach der brechbareren Seite hinaus."

Hr. Hagenbach hat also die Erscheinung, welche er früher in Abrede stellte, nunmehr wirklich gesehen. Er glaubt jedoch, dass hinsichtlich dieses grünen Lichts „eine Täuschung vorliege", insofern nämlich, als „das grüne Licht schon vorher in dem erregenden Licht vorhanden war."

Dass in der That bei der beschriebenen Versuchsordnung, d. i. bei Anwendung eines einzigen Prismas, in dem erregenden Licht nicht nur grünes, sondern sogar weisses Licht vorhanden ist, habe ich bereits früher[1]) gezeigt und zugleich die Herkunft desselben angegeben. Wird nämlich das durch den zweiten Spalt gegangene Licht durch eine Linse concentrirt, so sammeln sich in dem Lichtfleck, den man erhält, mag derselbe nun ein reelles Bild des Prismas oder des zweiten Spaltes sein, alle Strahlen, die von dem Prisma ausstrahlend durch diesen Spalt gehen, also sowohl das durch das Prisma gebrochene homogene Licht, als auch das von dem Prisma nach allen Richtungen diffundirte weisse Licht sowie das von ihm ausgesandte Fluorescenzlicht. Betrachtet man daher den auf einer weissen Papierfläche oder einer weissen Thonplatte aufgefangenen Lichtfleck durch das Spectroskop, so gewahrt man ausser der sehr hellen dem homogenen Licht zugehörigen schmalen Lichtlinie noch ein schwaches continuirliches Spectrum, in welchem man deutlich Grün und Blau unterscheidet. Nach Abblendung des hellen Spaltbildes tritt dieses continuirliche Spectrum natürlich noch deutlicher hervor.

Es erhebt sich nun die Frage, ob jenes bei dem obigen Versuche wahrgenommene ziemlich helle grüne Fluorescenzlicht (es ist so hell, dass es im Spectroskop selbst neben

1) Lommel, Pogg. Ann. **159.** p. 523. 1876.

dem homogenen Spaltbild, welches bei Anwendung einer weissen Thonplatte als Unterlage für die fluorescirende Lösung blendend hell ist, deutlich hervortritt) durch das vom Prisma ausgestrahlte diffuse Licht erregt worden sein kann. Diese Frage ist aber leicht zu entscheiden. Denn verschiebt man den zweiten Spalt in den rothen Theil des Spectrums, welcher die Fluorescenz des Naphthalinroths nicht erregt, so dringt das vom Prisma nach allen Seiten diffus ausgestrahlte Licht noch ebenso gut wie vorher durch den Spalt und sammelt sich nebst dem homogenen rothen Licht in dem Lichtfleck. Wäre nun jenes helle grüne Fluorescenzlicht im vorigen Fall durch das miteingedrungene diffuse weisse Licht erregt worden, so müsste es sich jetzt ebenso gut zeigen wie vorher; man sieht dasselbe aber im Spectroskop jetzt nicht mehr, wohl aber, wenn der Lichtfleck auf einer weissen Papier- oder Thonfläche aufgefangen wird, das schwache continuirliche Spectrum des diffusen Lichts. Dreht man ferner das Prisma ein wenig derart, dass die ultrarothe Partie des Spectrums auf den Spalt fällt, und sonach nur das diffuse Licht durch den Spalt eindringt, und concentrirt dieses auf einer weissen Papier- oder Thonfläche, so sieht man mit blossem Auge ganz deutlich einen weisslichen Lichtfleck, welcher im Spectroskop das erwähnte schwache continuirliche Spectrum gibt. Es versteht sich von selbst, dass dieses weisse Licht eine seiner Lichtstärke entsprechende geringe Menge Fluorescenzlicht erregen wird; und in der That sieht man, wenn man den weissen Lichtfleck auf die Glaswand einer mit Naphthalinrothlösung gefüllten Flasche fallen lässt, mit nahe gehaltenem blossem Auge dieses sehr schwache Fluorescenzlicht. Dasselbe ist aber zu schwach, um im Spectroskop wahrgenommen zu werden. Wir gelangen demnach zu dem Schluss, dass das grüne Fluorescenzlicht, welches man im Spectroskop wahrnimmt, wenn man die gelben Strahlen des Spectrums durch den Spalt eindringen lässt, nur durch diese letzteren erregt worden sein kann.

2. Um dieses immerhin störende vom Prisma diffundirte weisse Licht möglichst zu beseitigen, habe ich bereits bei meinen früheren Versuchen aus einem Spectrum, welches

mittelst zweier Spalten und Prisma, oder mittelst Spalt, achromatischer Linse und Prisma entworfen war, durch einen Spalt einen schmalen Theil abgesondert und diesen nochmals mittelst achromatischer Linse und Prisma zerlegt. Aus dem so erhaltenen sehr reinen partiellen Spectrum wird durch den letzten Spalt, hinter welchem die concentrirende Linse steht, wiederum ein schmaler Theil herausgenommen. In dem Lichtbildchen, welches die Linse entwirft, vereinigt sich wiederum alles Licht, welches durch diesen Spalt dringt, also sowohl das gebrochene homogene, als das vom zweiten Prisma diffundirte Licht; da dieses Prisma aber mit erheblicher Stärke nur von Strahlen getroffen wird, welche hinsichtlich ihrer Brechbarkeit den zur Verwendung kommenden homogenen Strahlen sehr nahe stehen, so gilt das gleiche auch von diesem diffusen Licht.

Behufs Wiederholung der Versuche des Hrn. Hagenbach wurde nun in der Ocularröhre des Spectroskops an der Stelle des Fadenkreuzes eine verschiebbare Blendung angebracht. Dieselbe besteht aus einem geschwärzten Schieber, dessen rechteckiger Ausschnitt in der Mitte durch ein schmales verticales Stäbchen getheilt ist. Durch Verschiebung dieser Blendung kann das Spectrum von dem einen oder dem andern Ende her beliebig weit abgeblendet und durch das Stäbchen das homogene Spaltbild allein verdeckt werden.

Betrachtet man bei dieser Versuchsanordnung den auf einer weissen Papier- oder Thonfläche aufgefangenen Lichtfleck und blendet das Spaltbild von der weniger brechbaren Seite her ab, sodass es durch den entsprechenden Rand des Schieberausschnitts gerade verdeckt wird, so sieht man kein continuirliches Spectrum mehr. Zerstreutes weisses Licht kann jetzt in der That nur noch in unmerklicher Menge vorhanden sein, nämlich diejenige kleine Menge, welche von dem ersten Prisma auf das zweite gelangt und von diesem nochmals zerstreut wird.

Das Gesichtsfeld ist aber gleichwohl nicht dunkel, sondern von der Stelle des Schieberrandes, wo derselbe das Spaltbild gerade verdeckt, sieht man einen hellen Lichtschein

ausgehen, welcher sich nach der brechbareren Seite hin ziemlich weit erstreckt. Verdeckt man das Spaltbild mittelst des im Schieberausschnitt angebrachten Stäbchens, so erscheint eine solche Lichtaureole zu beiden Seiten des Stäbchens, jedoch stärker entwickelt auf der brechbareren Seite. Diese Aureole ist an das Spaltbild derart gefesselt, dass sie, wenn man letzteres vom rothen zum violetten Ende durch das Gesichtsfeld wandern lässt, stets mitwandert, indem sie immer dieselbe Farbe zeigt wie das Spaltbild selbst. Die Aureole ist um so lichtstärker und ausgedehnter, je intensiver das in das Spectroskop eindringende homogene Licht ist; wird der Lichtfleck auf einer reinen Glas- oder Quarzfläche aufgefangen, welche nur wenig Licht diffundirt, so ist die Aureole unmerklich; sie zeigt sich dagegen sehr entwickelt, wenn der Lichtfleck auf eine stark zerstreuende Papier- oder Thonfläche geworfen wird; sie erstreckt sich endlich in grosser Lichtstärke fast über das ganze Gesichtsfeld, wenn man das einfallende homogene Licht direct oder durch Spiegelung an einer Glas- oder Metallfläche auf den Spectroskopspalt treffen lässt.

Die Entstehung dieser Aureole ist leicht zu erklären. Linsen und Prisma des Spectroskops sind niemals so glatt und rein, dass sie nicht mehr oder weniger Licht diffus zerstreuen. Das an der Collimatorlinse zerstreute Licht erfährt, wenn das Prisma des Spectroskops für das einfallende homogene Licht auf das Minimum der Ablenkung eingestellt ist, durch das Prisma eine stärkere Ablenkung als die direct durchgehenden Strahlen und wird daher im Gesichtsfeld auf der brechbareren Seite des Spaltbildes gesehen; dasselbe gilt von dem an der Eintrittsfläche des Prismas zerstreuten Licht. Das an der Austrittsfläche des Spectroskopprismas diffundirte Licht liefert dagegen Strahlen, welche theils nach der brechbareren, theils nach der weniger brechbaren Seite gelangen. Ist das Prisma nicht genau, sondern nur nahezu auf das Minimum der Ablenkung eingestellt, wie es ja für das ganze Spectrum mit Ausnahme einer einzigen Stelle immer der Fall ist, so gelangen auch von der Collimatorlinse und der Eintrittsfläche des Prismas Strahlen nach der minder brech-

baren Seite; immerhin aber wird das meiste zerstreute Licht nach der brechbareren Seite gelenkt werden.

Ist die Zerstreuung an den Glasstücken des Spectroskops wirklich die Ursache der Lichtaureole, so muss dieselbe lichtstärker werden und weiter um sich greifen, wenn bei gleichbleibender Intensität des einfallenden Lichts das Zerstreuungsvermögen jener Stücke erhöht wird. Dies tritt auch wirklich ein, wenn man die Collimatorlinse oder das Prisma absichtlich trübt. Bestäubt man die Collimatorlinse mit Bärlappsamen, so werden die Lycopodiumringe abwechselnd hell und dunkel (nicht mehrfarbig) auf dem einfarbigen Grunde der erweiterten Aureole sichtbar, was darauf hinweist, dass, wie von vornherein zu vermuthen war, nicht nur das zerstreute, sondern auch das an den Theilchen der Trübung gebeugte Licht zur Entstehung der Erscheinung beiträgt.

Bei Anwendung eines einzigen Prismas ist die Aureole natürlich ebenfalls vorhanden und wird nach Abblendung des Spaltbildes gleichzeitig mit dem continuirlichen Spectrum des vom Prisma diffundirten weissen Lichtes wahrgenommen.

3. Das „falsche Licht" der Aureole entsteht demnach erst innerhalb des Spectralapparats durch Diffusion und Beugung des einfallenden homogenen Lichtes an den Glasstücken des Spectroskops und hat daher mit der Erregung des Fluorescenzlichts gar nichts zu thun. Hr. Hagenbach dagegen hält die obere Grenze der Aureole für die obere Grenze des erregenden Lichts, indem er annimmt, dass selbst dem zweimal gesiebten Erregungslicht noch brechbarere Strahlen beigemischt seien, welche stark genug wären, sowohl die Aureole als das auf der brechbareren Seite des Spaltbilds wahrgenommene Fluorescenzlicht hervorzubringen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass solche Strahlen in geringer Menge in der That vorhanden sind, und zwar können sie nur in dem von dem zweiten Prisma diffus ausgestrahlten Lichte bestehen. Durch einen einfachen Controlversuch kann man sich jedoch überzeugen, dass diese diffusen Strahlen nicht stark genug sind, um die genannten Erscheinungen hervorzubringen. Dreht man nämlich das Prisma ein wenig derart, dass das von ihm ent-

worfene partielle Spectrum neben den Spalt fällt und somit die gebrochenen homogenen Strahlen nicht mehr, wohl aber noch die nach allen Seiten diffundirten Strahlen durch den Spalt dringen, so verschwinden sowohl Aureole als Fluorescenzlicht; dieselben können also nicht durch dieses diffuse brechbarere Licht verursacht worden sein.

Die Ansicht des Hrn. Hagenbach, dass die obere Grenze des erregenden Lichts durch die obere Grenze der Aureole dargestellt werde, ist sonach eine irrige. Dass der Aureole eine solche Bedeutung nicht zugeschrieben werden kann, geht übrigens auch aus dem Umstande hervor, dass es ganz in der Willkür des Beobachters liegt, dieselbe sich mehr oder weniger weit erstrecken zu lassen. Bei unveränderter Lichtstärke des erregenden Lichts hängt nämlich diese Erstreckung (wie oben bereits erwähnt) ausser von der individuellen Beschaffenheit des Spectralapparats wesentlich von der Intensität ab, mit welcher man das erregende Licht in das Spectroskop eindringen lässt. Die Aureole erstreckt sich daher um so weiter, je bedeutender das Zerstreuungsvermögen der Fläche ist, auf welcher der zu beobachtende Lichtfleck aufgefangen wird. Eine weisse Fläche (weisses Papier, eine weisse Thonplatte u. dgl.) gibt stets eine sehr entwickelte Aureole. Noch beträchtlich weiter erstreckt sie sich, wenn man das erregende Licht durch Spiegelung, z. B. an der Wand einer Glasflasche, dem Spectroskop zuführt. Hr. Hagenbach hätte auf diese Weise Resultate finden können, welche bei seiner Auffassung der Aureole anscheinend noch entschiedener für die Allgemeingiltigkeit des Stokes'schen Gesetzes gesprochen hätten.

4. Durch das Verfahren des Hrn. Hagenbach, Naphthalinroth auf eine weisse Thonplatte zu träufeln, lässt sich niemals ein reines Fluorescenzspectrum erzielen. Da nämlich das an der Thonplatte zerstreute erregende Licht mit sehr grosser Lichtstärke gleichzeitig in das Spectroskop fällt, so entsteht eine sehr starke Aureole, welche sich mit dem Spectrum des Fluorescenzlichts mischt und dasselbe fälscht.

Wird dagegen der Lichtfleck auf der schwach diffundirenden Wand einer Glasflasche oder eines Bergkrystall-

troges aufgefangen, wie es bei meinen Untersuchungen stets geschehen ist, so ist das in das Spectroskop dringende homogene zerstreute Licht zwar noch stark genug, um als scharfbegrenztes Spaltbild gesehen zu werden, aber zu schwach, um eine merkliche Aureole zu erzeugen. Ist die Flasche leer oder mit Wasser oder einer andern nicht fluorescirenden Flüssigkeit gefüllt, oder mit einer fluorescirenden Flüssigkeit, welche durch die gerade benutzte homogene Lichtsorte nicht erregt wird, so erscheint das Gesichtsfeld nach Abblendung des Spaltbildes vollkommen dunkel.

Ich untersuchte auf diese Weise Lösungen von Naphthalinroth, Eosin und Fluoresceïn, welche sich in drei ganz gleichen Flaschen von weissem Glase befanden.

Es wurde z. B. homogenes Orangeroth (etwa 47 der Bunsen'schen Scala) eingelassen und das schmale Spaltbild (indem man den Lichtfleck zuerst auf einem der Flasche aufgeklebten Papierstückchen auffing) durch den Rand des Schiebers verdeckt. Liess man nun durch eine kleine Drehung der Flasche um ihre verticale Axe das erregende Licht durch die Glaswand auf die Flüssigkeit fallen, so erschien bei Naphthalinroth der gelbgrüne Theil seines Fluorescenzspectrums auf der brechbareren Seite des Schieberrandes. Wurde dagegen die Flasche mit Eosin oder Fluoresceïn an dieselbe Stelle gebracht, so blieb das Gesichtsfeld völlig dunkel, weil der Strahl 47 das Fluorescenzlicht dieser beiden Körper nicht erregt. Das Eosin und das Fluoresceïn spielen hier die Rolle von Reagentien auf die von Hrn. Hagenbach angenommenen brechbareren Strahlen. Wären diese nämlich in genügender Stärke vorhanden, um die beobachtete Fluorescenz des Naphthalinroths zu verursachen, so müssten sie auch die Fluorescenz dieser beiden höchst empfindlichen Substanzen hervorrufen.[1])

5. Wir wenden uns nun zu den Versuchen mit rothem Kupferüberfangglas.

1) Diese Versuche wurden bereits im October 1877 angestellt, nachdem mir Hr. Hagenbach bei Gelegenheit der Münchener Naturforscherversammlung das Wesentliche seiner oben besprochenen Versuche mündlich mitgetheilt hatte.

Das vom Heliostaten kommende dicke Strahlenbündel werde, nachdem es durch eine Schicht von drei dunkelrothen Gläsern gegangen ist, mittelst einer Linse auf einer in weisser Glasflasche enthaltenen Lösung von Naphthalinroth concentrirt und der fluorescirende Lichtfleck durch das Spectroskop untersucht. Man sieht neben dem Spectrum des erregenden Lichts, welches durch die an der Glaswand stattfindende schwache Diffusion ins Spectroskop gelangt und etwa bis 49 reicht, den gelbgrünen Theil des Fluorescenzspectrums des Naphthalinroths; man sieht dieses gelbgrüne Fluorescenzlicht noch deutlicher, wenn man das Spectrum des erregenden Lichts durch den Schieberrand verdeckt. Schiebt man die Blendung soweit vor, bis auch das Fluorescenzlicht völlig verdeckt ist, und liest nun die Stellung des Schieberrandes ab, so ergibt sich, dass sich das auf diese Weise erregte Fluorescenzlicht bis 60 erstreckt.

Das zur Erregung verwendete, durch drei rothe Gläser gegangene Licht habe ich auf einen etwaigen Gehalt an brechbareren Strahlen sorgfältig untersucht.

In dem Absorptionsspectrum eines rothen Glases erscheint das rothe Ende sehr hell und zeigt die Fraunhofer'schen Linien von *A* bis *D* sehr deutlich. Unmittelbar hinter *D* beginnt die Absorption, und ein ganz dunkler Absorptionsstreif erstreckt sich von 53 bis 65; von hier an ist schwaches Grün und Blau wieder sichtbar bis hinter *F*, wo die Absorption wieder vollständig wird.

Bei drei rothen Gläsern sieht man die Linie *D* nicht mehr, sondern von 49 an erscheint das übrige Spectrum vollständig absorbirt.

Concentrirt man das durch die drei Gläser gegangene Licht mittelst der Linse auf dem Spectroskopspalt und verdeckt das nun blendendhelle Spectrum mit dem Schieber, so zeigt sich das ganze Gesichtsfeld von einer hellen rothen Aureole eingenommen. Wird der Lichtfleck auf einer weissen Papier- oder Thonfläche aufgefangen, so erstreckt sich die rothe Aureole noch sehr hell bis 70, und auch das übrige Gesichtsfeld ist mit einem röthlichen Schimmer erfüllt.

Enthielte das Licht der Aureole noch Strahlen, welche

brechbarer wären als *D*, so müssten diese vorzugsweise die grünen und grünblauen Strahlen von 65 bis 90 sein, welche von einem einzelnen Kupferglas noch durchgelassen werden. Die gelbgrünen Strahlen hinter *D* bis 65, welche die Fluorescenz des Naphthalinroths am stärksten erregen, sind gerade diejenigen, welche von dem rothen Glas am kräftigsten absorbirt werden; sie müssten, wenn sie in dem Lichte der Aureole enthalten wären, jedenfalls in geringerer Menge vorhanden sein, als jene grünen und blaugrünen.

Würden von den drei rothen Gläsern noch grüngelbe und grüne Strahlen durchgelassen und zur Erzeugung der Aureole mitwirken, so müssten dieselben auch durch ein grünes Chromglas gehen, welches für diese Strahlengattungen sehr durchlässig ist. Fügt man aber zu den drei rothen Gläsern ein solches grünes Glas hinzu, so verschwindet die Aureole. Sie verschwindet ebenso, wenn man durch das grüne Glas in das Spectroskop blickt.

Wäre die Fluorescenz des Naphthalinroths durch etwa noch vorhandene grüne Strahlen verursacht, so müsste sie sich auch noch zeigen, wenn man zu den rothen Gläsern noch ein grünes hinzufügt. Sie verschwindet jedoch in diesem Falle vollständig.

Die genannten grünen Strahlen werden durch eine Lösung von doppeltchromsaurem Kali sehr energisch absorbirt. Wären sie bei dem obigen Versuch die Erreger der Fluorescenz des Naphthalinroths, so müsste diese nach Einschaltung jener Lösung verschwinden. Sie bleibt aber unverändert bestehen; ebenso die rothe Aureole.

Die vermutheten grünen Strahlen gehören zu denjenigen, welche die Fluorescenz des Eosins und Fluoresceïns kräftig erregen; sie müssten auf diese Körper wirken, wenn sie in dem durch drei rothe Gläser gesiebten Lichte noch vorhanden wären. Beide Substanzen aber zeigen in diesem rothen Lichte keine Spur von Fluorescenz.

Man entwerfe mittelst Spalt, achromatischer Linse und Prisma ein scharfes Sonnenspectrum und schneide den brechbareren Theil von der Linie *D* an mittelst eines dunkeln Schirmes ab; nun werde die Oeffnung des Heliostaten durch

eine Schicht von drei rothen Gläsern verschlossen und das jetzt allein noch sichtbar gebliebene rothe Ende des Spectrums mittelst einer Linse auf der Naphthalinrothlösung concentrirt. Dieses rothe Licht kann jene verdächtigen grünen Strahlen, auch wenn sie vorhanden wären, nicht mehr enthalten, weil sie durch das Prisma nach dem brechbareren Theil des Spectrums gelenkt und demnach durch den Schirm aufgefangen sein müssten; es erregt aber den gelbgrünen Theil des Fluorescenzlichts bei Naphthalinroth, während es bei Eosin und Fluoresceïn unwirksam bleibt.

Nun werde noch das rothe Ende des Sonnenspectrums bis zur Linie *D* durch den dunkeln Schirm abgeschnitten und die grüne Partie des Spectrums durch eine Linse auf dem Naphthalinroth concentrirt. Bedeckt man jetzt die Heliostatenöffnung mit den drei rothen Gläsern, so wird es in dem vorher blendend hellen Brennpunkt völlig dunkel, und weder Naphthalinroth noch Eosin und Fluoresceïn zeigen daselbst die geringste Spur von Fluorescenz. Wären aber die von Hrn. Hagenbach angenommenen brechbareren Strahlen in dem durch die rothen Gläser gegangenen Lichte noch vorhanden, so müssten sie sich in diesem Brennpunkte auch jetzt noch sammeln und müssten, wenn sie in dem obigen Versuch die Ursache des gelbgrünen Fluorescenzlichts gewesen wären, dasselbe auch jetzt noch erregen.

Aus dieser ganzen Reihe von Versuchen geht aber unwiderleglich hervor, dass Strahlen brechbarer als *D* in einer zur Erregung der Fluorescenz des Naphthalinroths oder einer andern Substanz genügenden Menge in dem durch drei rothe Gläser gegangenen Sonnenlicht nicht vorhanden sind, und dass demnach der gelbgrüne Theil des Fluorescenzlichts, welches das Naphthalinroth unter dem Einflusse dieses rothen Lichts ausstrahlt, durch Strahlen erregt sein muss, welche weniger brechbar sind als das Licht der Linie *D*.

6. Wir schliessen hieran gleich die Besprechung des Versuchs, welchen Hr. Hagenbach mit complementär gefärbten Gläsern anstellte. Ich verwendete zur Wiederholung eine Combination von drei rothen Kupfergläsern einerseits

und von von zwei grünen Chromgläsern andererseits, durch welche zusammen das im Brennpunkte einer Linse auf weissem Papier oder Thon concentrirte Sonnenlicht gar nicht und die Sonne selbst nur als eine sehr lichtschwache röthliche Scheibe gesehen wird. Das durch die grünen Gläser gegangene Licht enthält die Strahlen, welche die Fluorescenz des Naphthalinroths am stärksten erregen, das durch die rothen Gläser gegangene Licht dagegen vermag nur schwaches Fluorescenzlicht zu erregen, in welchem die stärker absorbirbaren gelbgrünen Strahlen (wie oben II, 12 gezeigt wurde) in geringerem Verhältniss enthalten sind. Es versteht sich daher von selbst, dass das mit der grünen Combination erregte starke Fluorescenzlicht, da es ja rothes und orangegelbes Licht in Fülle enthält, durch die rothen Gläser mit grosser Helligkeit und zwar mit rother Färbung gesehen wird, während das durch die rothe Gläsercombination hervorgerufene lichtschwache Fluorescenzlicht durch die grünen Gläser aus einiger Entfernung betrachtet unsichtbar bleibt. Mit nahe gebrachtem, in der Dunkelheit gut ausgeruhtem Auge aber sieht man es durch die grünen Gläser ganz deutlich mit grünlicher Farbe. Dieser Versuch ist also nicht, wie es Hrn. Hagenbach scheint, „der augenscheinlichste Beweis für die Richtigkeit des Stokes'schen Gesetzes", sondern er beweist vielmehr im Gegentheil, dass das Stokes'sche Gesetz für das Naphthalinroth nicht gilt.

7. Am meisten Schwierigkeiten bieten die Versuche mit der Natriumflamme dar, und zwar hauptsächlich aus dem Grunde, weil diese Lichtquelle ausser der *D*-Linie noch ein continuirliches Spectrum liefert, mag dieses nun, wie Hr. Hagenbach meint, von in der Flamme schwebendem „glühendem festen Natron", oder, wie ich angenommen habe[1]), von dem Natriumdampf selbst herrühren. In diesem continuirlichen Spectrum sind die grünen und die blauen Strahlen

1) Lommel, Pogg. Ann. **159**. p. 517. 1876. Ich verweise auch auf den dort mitgetheilten Controlversuch, welcher darthut, dass das Licht dieses continuirlichen Spectrums nicht oder nur unmerklich zur Erregung der beobachteten Fluorescenz beiträgt.

so stark vertreten, dass das Licht der Natriumflamme, wie schon Hr. Lubarsch[1]) bemerkt hat, die Fluorescenz des Eosins und des Fluoresceïns zu erregen vermag, welche Substanzen für die genannten Strahlen empfindlicher sind als das Naphthalinroth, das namentlich die blauen Strahlen vergleichsweise nur schwach absorbirt. Dass es diese brechbareren grünen und die blauen Strahlen der Natriumflamme sind, welche bei Eosin und Fluoresceïn diesen Effect hervorbringen, davon kann man sich durch Einschaltung einer Lösung von doppeltchromsaurem Kali überzeugen, welche die Fluorescenz dieser beiden Substanzen zum Verschwinden bringt, dagegen diejenige des Naphthalinroths ungeändert fortbestehen lässt. Da indessen das doppeltchromsaure Kali die gelbgrünen Strahlen noch durchlässt, so müsste man auch diese noch durch ein geeignetes Absorbens beseitigen. Hr. Hagenbach wählte hierzu eine Eosinlösung. Die Absorptionscurve des Eosins hat nun aber ihr Maximum erst ziemlich weit hinten im Grün bei der Linie *b*, und fällt nach der weniger brechbaren Seite nicht steil genug ab; nimmt man daher die Eosinlösung so stark, dass sie die gelbgrünen Strahlen hinter *D* vollkommen auslöscht, so wird auch das gelbe Natriumlicht so bedeutend geschwächt, dass ein deutliches Fluorescenzspectrum überhaupt nicht mehr wahrzunehmen ist. Ich combinirte daher ein rothes Glas, dessen Absorptionsstreifen unmittelbar hinter *D* beginnt, mit einer Lösung von doppeltchromsaurem Kali; das gelbe Natriumlicht war nun ebenfalls beträchtlich abgeschwächt, jedoch weniger als durch die Eosinlösung, während die brechbareren Strahlen vollständig ausgelöscht waren; das Gesichtsfeld des Spectroskops erschien nämlich, wenn man das Licht der Natriumflamme durch diese Combination gehen liess und die *D*-Linie mit dem Schieber bedeckte, vollkommen dunkel. Wurde dann dieses Licht auf Naphthalinroth concentrirt und der schwach fluorescirende Lichtfleck durch das Spectroskop betrachtet, so erschien sofort schwaches Fluorescenzlicht auf der brechbareren Seite des Schiebers,

1) Lubarsch, Wied. Ann. **6**. p. 256. 1879.

und man musste diesen bis 57 vorschieben, um dasselbe völlig verschwinden zu machen.

8. Gehen wir nun zu den Versuchen mit dem derivirten Spectrum über, so muss zunächst die ungenaue Vorstellung, welche sich Hr. Hagenbach von dem Aussehen eines solchen Spectrums macht und durch eine Zeichnung zum Ausdruck bringt, berichtigt werden. Das abgeleitete Spectrum hat keineswegs überall die gleiche Breite, sondern infolge des oben (II, 12) bereits dargelegten Verhaltens des Fluorescenzlichtes erscheint es am breitesten an der Stelle stärkster Fluorescenz und zeigt sich an beiden Enden abgerundet, wie in Fig. 4 angedeutet ist. Beim Naphthalinroth und den anderen, die Stokes'sche Regel nicht befolgenden Substanzen findet ein Uebergreifen des abgeleiteten Spectrums über das abgelenkte nach der brechbareren Seite hin allerdings statt, jedoch nicht in der von Hrn. Hagenbach erwarteten auffallenden Form eines vorspringenden Ecks, sondern in der durch Fig. 4 dargestellten Weise. Auch auf der weniger brechbaren Seite hat sicherlich weder Hr. Hagenbach noch sonst jemand ein solches vorspringendes Eck jemals gesehen, sondern auch hier erscheint das Spectrum abgerundet. Der Umstand, dass die Strahlen, welche den übergreifenden Theil des derivirten Spectrums bilden, die stärkst absorbirbaren des Fluorescenzlichts sind, bewirkt aber (nach den oben II, 12 entwickelten Gründen), dass der entsprechende Vorsprung verhältnissmässig noch mehr zurückgedrängt wird und abgeplatteter erscheint als die auf der andern Seite des abgelenkten Spectrums liegende, aus minder absorbirbaren Strahlen gebildete Hervorragung. Trotz dieser die Wahrnehmung erschwerenden Umstände sieht man den übergreifenden Theil des derivirten Spectrums bei Naphthalinroth vollkommen deutlich in grün-

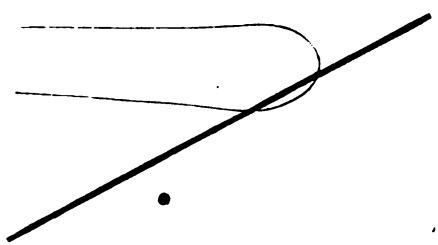


Fig. 4.

licher Farbe. Eine naturgetreue Abbildung des abgeleiteten Spectrums bei Chlorophyll hat Hr. Lubarsch gegeben [1]), in welcher dieses Uebergreifen ganz richtig dargestellt ist.

9. Alle mitgetheilten Versuche stimmen sonach in dem Ergebniss überein, dass die Fluorescenz des Naphthalinroths (sowie noch einer Reihe anderer Substanzen) dem Stokes'schen Gesetze nicht unterworfen ist. Die von Hrn. Hagenbach in seiner Arbeit vorgeführten Versuche sind, wie ich gezeigt habe, keineswegs geeignet, dieses Ergebniss zu erschüttern. Ebenso halte ich an der auf meine Wahrnehmungen gegründeten Eintheilung [2]) der fluorescirenden Körper fest, die sich übrigens schon dadurch als eine naturgemässe documentirt, dass die Substanzen, welche von der Stokes'schen Regel abweichen, auch in anderen Beziehungen optisch ausgezeichnet sind, indem sie nämlich sehr starke Absorptionsstreifen, lebhafte Färbung, anomale Dispersion und Oberflächenfarben zeigen. Gegenüber den Bemerkungen des Hrn. Hagenbach hinsichtlich der von mir aufgestellten Theorie der Fluorescenz hebe ich nur hervor, dass das Stokes'sche Gesetz aus dieser Theorie folgt, so weit es nämlich überhaupt gültig ist.

Nach allen vorausgegangenen Erörterungen brauche ich wohl kaum noch ausdrücklich hinzuzufügen, dass ich die Bedeutung einer Entscheidungsinstanz, welche Hr. Hagenbach in der vorliegenden Frage für sich in Anspruch zu nehmen scheint, meinerseits nicht anerkenne.

IX. *Ueber das Verhalten verschiedener Wärmefarben bei der Reflexion polarisirter Strahlen von Metallen; von H. Knoblauch.* [3])

Bereits auf der Naturforscherversammlung in Hamburg im Jahre 1876 habe ich mitgetheilt, dass der Polarisations-

1) Lubarsch, Wied. Ann. **6.** Taf. IV Fig. 5. 1879.

2) Lommel, Pogg. Ann. **159.** p. 536. 1876. Wied. Ann. **3.** p. 113. 273. 1878.

3) Der 51. Vers. deutsch. Naturforscher u. Aerzte in Cassel i. J. 1878 mitgetheilt.

winkel der verschiedenen Wärmefarben bei der Reflexion von Metallen ein verschiedener sei, und zwar nach den vorliegenden Ergebnissen die am violetten Ende des Sonnenspectrums befindlichen Strahlen im Allgemeinen einen kleineren Polarisationswinkel als die dem rothen Ende zugehörigen hätten. Es war von Interesse, wie diese Verschiedenheit der in ihrer Brechbarkeit, resp. ihrer Wellenlänge unterschiedenen Wärmestrahlen sich bei einer Reihe von Metallen gestalte.

Zu dem Ende wurden die mit Hülfe eines Heliostats in stets constanter horizontaler Richtung erhaltenen Sonnenstrahlen zunächst durch ein in dem Fensterladen angebrachtes Nicol'sches Prisma mit unter 45° gestelltem Hauptschnitt linear (in einer zu diesem Hauptschnitt rechtwinkligen Ebene) polarisirt. So fielen sie auf den um eine verticale Axe drehbaren Metallspiegel, von welchem sie, je nach dessen Einstellung, unter irgend einem gewünschten Einfallswinkel in horizontaler Ebene zurückgeworfen wurden.

Vollzog sich der hierbei stattfindende — auf der Naturforscherversammlung in München 1877 näher erörterte — Vorgang der Umwandlung linearer und elliptischer Schwingungen in einander, der Aenderung von Axenverhältniss und Axenlage der Ellipsen u. s. w. bei allen Wärmefarben gleichzeitig und auf gleiche Weise, so musste die Gesammtheit der Wärmestrahlen, welche bei der Sonne aus den verschiedensten Wärmefarben zusammengesetzt ist, sich nach der Reflexion bei der Analyse durch ein zweites Nicol'sches Prisma stets als gleichartig bei allen Einfallswinkeln ergeben. Hielten jene Vorgänge aber bei den verschiedenen Wärmefarben nicht gleichen Schritt mit einander, so musste dies bei der Analyse durch das zweite Nicol'sche Prisma hervortreten, z. B. bei gekreuzter Stellung der Polarisationsebene des letzteren und der reflectirten Strahlen mussten alsdann bei einer Incidenz, welche kleiner als der mittlere Polarisationswinkel ist, andersfarbige Wärmestrahlen ihren Durchlass durch den Analysator finden als bei einem Einfallswinkel, grösser als der Polarisationswinkel. Damit aber träte eine Aenderung in der Zusammensetzung der aus dem Analysator austretenden Strahlen ein: die Gesammtheit der letzteren

würde dann andere Eigenschaften, z. B. eine ungleiche Durchgangsfähigkeit diathermanen Platten gegenüber zeigen, jenachdem die Reflexion unter einem Winkel kleiner oder grösser als der Polarisationswinkel erfolgt ist.

Auf diese Ermittelung ist die Untersuchung gerichtet gewesen. Nach dem Durchgang durch das analysirende Nicol gelangten die Strahlen zu einer Thermosäule, deren Erwärmung an dem mit ihr verbundenen Multiplicator gemessen wurde. Um die Durchgangsfähigkeit der betreffenden Strahlen zu prüfen, wurde zunächst die directe Einwirkung auf die Thermosäule bestimmt, sodann der Reihe nach ein rothes, blaues, orangefarbenes Glas unmittelbar vor derselben eingeschaltet und die nunmehr verbleibende, von der das Glas durchstrahlenden Wärme herrührende, Wirkung gemessen.

Die Ergebnisse der Beobachtung sind für einige charakteristische von 18 Metallen in der folgenden Tabelle enthalten, in der jenes Verhältniss der Wärmemenge, welche auf die diathermanen Körper auffällt, und derjenigen, welche durch dieselben hindurchgeht, für einzelne ausgewählte Fälle verzeichnet ist. Die erstere ist immer gleich 100 gesetzt worden. In der oberen Reihe finden sich die Einfallswinkel, unter denen der jedesmalige Polarisationswinkel mit einem Stern versehen ist. (S. Tabelle auf p. 657.)

Aus diesen Zahlen geht hervor, dass z. B. beim Golde die unter einem Einfallswinkel von 55° (zwischen Strahl und Normale auf dem Spiegel gemessen) zurückgeworfenen Wärmestrahlen in dem Verhältniss von 10 Proc., unter 70° in dem von 31,6 Proc., die unter 85° reflectirten in dem Verhältniss von 56 Proc. das rothe Glas durchstrahlen.

Bei jedem anderen Einfallswinkel ist das Durchgangsverhältniss ein anderes. Aehnliches zeigt sich beim blauen und orangefarbenen Glase. Nur vermindert sich bei dem blauen Glase die Durchstrahlungsfähigkeit bei wachsender Incidenz, während sie beim rothen und orangefarbenen Glase zunimmt. Die Gesammtheit der zurückgeworfenen Wärmestrahlen zeigt also nach ihrem Durchgange durch das, auf das Intensitätsminimum eingestellte, analysirende Nicol

Reflexion von	Einfallswinkel	55°	60°	65°	70°	72,5°	75°	77,5°	85°
Gold	rothes Glas	100 : 10	—	100 : 12,5	100 : 31,6	—	100 : 50,0	—	100 : 56
	blaues „	100 : 30	—	100 : 25,0	100 : 24,9	—	100 : 24,6	—	100 : 20
	orange „	100 : 30	—	100 : 32,5	100 : 46,7	—	100 : 65,4	—	100 : 72
Silber . . .	rothes Glas	—	100 : 15	—	—	100 : 33	—	—	100 : 50
	blaues „	—	100 : 25	—	—	100 : 21	—	—	100 : 17
	orange „	—	100 : 40	—	—	100 : 54	—	—	100 : 70
Kupfer . .	rothes Glas	—	100 : 30	—	—	100 : 38	—	—	100 : 50
	blaues „	—	100 : 25	—	—	100 : 25	—	—	100 : 25
	orange „	—	100 : 40	—	—	100 : 57	—	—	100 : 75
Spiegel-metall . . .	rothes Glas	100 : 19	—	100 : 20	—	—	100 : 26	—	100 : 34
	blaues „	100 : 31	—	100 : 25	—	—	100 : 18	—	100 : 10
	orange „	100 : 16	—	100 : 20	—	—	100 : 40	—	100 : 52
Blei	rothes Glas	100 : 50	—	—	100 : 50	—	—	—	100 : 50
	blaues „	100 : 30	—	—	100 : 30	—	—	—	100 : 30
	orange „	100 : 80	—	—	100 : 80	—	—	—	100 : 80
Arsen . . .	rothes Glas	100 : 63	—	—	100 : 63	—	—	100 : 63	100 : 63
	blaues „	100 : 20	—	—	100 : 20	—	—	100 : 20	100 : 20
	orange „	100 : 74	—	—	100 : 74	—	—	100 : 74	100 : 74

verschiedene Eigenschaften, thermische Färbungen, die bei der Annäherung an die Einfallswinkel 0° und 90° ihre Extreme erreichen, sie hat mithin ihre Zusammensetzung geändert infolge davon, dass die verschiedenen Wärmefarben eine ungleiche Polarisation erfahren, dass die Aenderungen ihrer Schwingungen nicht gleichen Schritt mit einander halten und deshalb caeteris paribus in ungleichem Maasse, die einen mehr, die anderen weniger von dem Analysator zurückgehalten werden.

Der mittlere Polarisationswinkel des Goldes ist 70°. Bei diesem steht die thermische Färbung, wie sie durch die Durchgangsfähigkeit der Strahlen bezüglich der diathermanen Körper charakterisirt ist, ungefähr in der Mitte zwischen denen, welche den Strahlengruppen für gleiche Winkelabstände vom Polarisationswinkel eigenthümlich sind. Dieses Vergleiches wegen sind auch in der Tabelle immer solche Einfallswinkel, welche gleich weit von dem Polarisationswinkel entfernt sind — in dem vorliegenden Beispiel 65° und 75°, 55° und 85° bei dem Polarisationswinkel 70° — geboten.

Doch ist das procentische Durchstrahlungsverhältniss am farbigen Glase beim Polarisationswinkel nicht genau das arithmetische Mittel aus diesen Verhältnissen für zwei nach entgegengesetzten Seiten hin gleich weit vom Polarisationswinkel abstehende Winkel, sondern dasselbe steht — von einzelnen Beobachtungsfehlern abgesehen — dem Verhältniss des grösseren Einfallswinkels ferner, als dem des entsprechend kleineren, was damit zusammenhängt, dass die Strecke vom Polarisationswinkel bis 90°, wo das eine Extrem in schneller Entwickelung erreicht wird, kürzer ist, als der Abstand vom Polarisationswinkel bis 0°, wo sich das andere Extrem findet, dem auf dem längeren Wege die Umwandlung allmählicher zustrebt.

Nicht ganz so verschiedenartig, wie beim Golde, wenn zwar in gleichem Sinne, zeigen sich die Durchstrahlungsverhältnisse unter den vorbezeichneten Umständen bei den vom Silber zurückgeworfenen Strahlen.

Noch näher stehen einander die beim Kupfer auftretenden Verschiedenheiten der Wärmefärbung, welche sich

in der Tafel mit den vorigen um so leichter vergleichen lassen, als den beiden letzteren Metallen derselbe Polarisationswinkel 72,5° angehört, von dem die der Beobachtung zu Grunde liegenden Incidenzen 60° und 85° gleichen Winkelabstand haben. Während das Durchstrahlungsverhältniss bezüglich des rothen Glases für diese Winkel beim Silber 100:15 und 100:50 beträgt, ist dasselbe beim Kupfer 100:30 und 100:50, der Unterschied also geringer; ja am blauen Glase beim Silber 100:25 und 100:17, wogegen beim Kupfer dasselbe unverändert 100:25 bei beiden Incidenzen verbleibt.

Mit dem Kupfer hat Neusilber das Verhalten gemein, dass es bei gleichem Polarisationswinkel auch eine gleiche Drehung der elliptischen Schwingung bei wachsendem Einfallswinkel bewirkt. Nichtsdestoweniger zeigt sich bei ihm — unter sonst identischen Umständen — eine andere Durchstrahlbarkeit betreffs der farbigen Gläser: eine andere Wärmefärbung der reflectirten und durch das analysirende Nicol hindurchgelassenen Wärmestrahlen als beim Kupfer. Die Wirkung beider Metalle auf Strahlen ungleicher Brechbarkeit, resp. ungleicher Wellenlänge ist demnach, aller sonstigen Analogie ungeachtet, eine verschiedene.

Dass der nachgewiesene Wechsel in der Qualität der Wärmegruppen nur in dem ungleichen polarisirenden Einfluss der Metalle auf verschiedene Wärmefarben, nicht aber in einer auswählenden Absorption, wie dieselbe von farbigreflectirenden Körpern ausgeübt wird, seinen Grund hat, geht daraus hervor, dass derselbe auch an solchen Metallen in gleichem Umfange stattfindet, welche, wie das in der Uebersicht enthaltene Spiegelmetall, keinerlei auswählende Absorption auf die Wärmestrahlen geltend machen, und dass eine auswählende Absorption, auch wenn sie wie beim Golde, Silber, Kupfer nebenbei erfolgt, doch nur in einem und demselben Sinne wirken, z. B. den Durchgang durch ein Glas ganz allgemein steigern, durch ein anderes überhaupt vermindern, niemals aber eine derartige Wirkung hervorbringen kann, dass sie bei Winkeln, grösser als der mittlere Polarisationswinkel, den Durchgang durch ein rothes Glas verbessert, durch ein blaues verschlechtert, bei Winkeln, kleiner

als der Polarisationswinkel, aber gerade umgekehrt diesen Durchlass für ein rothes Glas verschlechtere, für ein blaues verbessere.

Wo bei den bisher untersuchten Metallen die geschilderten thermischen Farbenwechsel sich gezeigt haben, sind sie immer in demselben Sinne erfolgt, welcher zu dem Schlusse führt, der zugleich[1]) die Deutung jener Erscheinungen wird, dass der Polarisationswinkel für die am violetten Ende des Spectrums befindlichen Wärmestrahlen kleiner als für die dem rothen Ende zugehörigen ist.

Gegenüber diesen Thatsachen gewinnt das Verhalten von Blei und Arsen ein besonderes Interesse.

Unverändert bleibt hier das Durchstrahlungsverhältniss für das rothe Glas beim Blei 100:50, beim Arsen 100:63, für das blaue Glas bei jenem 30 Proc., bei diesem 20 Proc., für das orangefarbene beim Blei 80 Procent, beim Arsen 74 Proc., unter welchem Einfallswinkel die Strahlen auch auffallen mögen. Während die Wärmefärbung bei den übrigen Metallen für kleinere und grössere Einfallswinkel verschieden war und bei dem Polarisationswinkel einen Uebergang fand, erhält sich bei Blei und Arsen eine und dieselbe Wärmefärbung bei allen Incidenzen, und es ist keinerlei Unterschied in derselben vor, nach oder bei dem Polarisationswinkel erkennbar. Nur die Intensität wechselt hier wie dort.

Dies deutet darauf hin, dass bei diesen Metallen der Polarisationswinkel für die mannichfachen Wärmefarben nicht merklich verschieden ist. Dessen ungeachtet verhalten sich dieselben nicht gleichmässig gegen beide Metalle. Denn die durch jene Durchstrahlungsfähigkeit bezeichnete Wärmefärbung ist nicht die nämliche bei der Reflexion vom Blei und der vom Arsen, sie unterscheidet sich bei beiden von der Beschaffenheit der Strahlen vor dem Durchgange durch das analysirende Nicol'sche Prisma, sowie vor der Reflexion überhaupt. Man wird dadurch zu dem Schlusse geführt, dass am

1) Nova Acta der K. Leop. Car. deutschen Akad. d. Naturforscher. **39.** Nr. 6. p. 354, 355. 1877.

Blei bei jeder Incidenz stets die Strahlen einer oder gewisser bestimmter Wärmefarben länger gestreckte Ellipsen als die übrigen bilden, beim Arsen eine andere, aber bei allen Einfallswinkeln immer die nämliche Strahlengruppe in solcher Weise von den anderen sich unterscheidet und deshalb von dem Analysator, bei dessen Stellung auf das Minimum des Durchlasses, stets mehr zurückgehalten wird als die übrigen Wärmestrahlen.

Hinsichtlich eines derartigen Vorganges stehen unter den bisher untersuchten Metallen Blei und Arsen allein.

Die Untersuchungen haben demnach ergeben, dass bei der Reflexion polarisirter Wärmestrahlen von Metallen die Strahlen verschiedener Wärmefarben sich ungleich verhalten, indem sie im Allgemeinen verschiedene Polarisationswinkel haben, welche bei gewissen Metallen, wie Gold und Silber grosse, bei Kupfer und Spiegelmetall geringere Unterschiede zeigen. Bei Blei und Arsen verschwinden diese Unterschiede gänzlich. An jenen Metallen halten die bei der Reflexion verschiedenartiger Strahlen sich vollziehenden Uebergänge aus der linearen in die elliptische Schwingung nicht gleichen Schritt mit einander: bei Aenderung des Einfallswinkels von 0^0 bis zum Polarisationswinkel hat die Umwandlung der Schwingung einer Wärmefarbe, beim Incidenzenwechsel von 90^0 bis zum Polarisationswinkel die einer anderen den Vorsprung. Bei Blei und Arsen sind bei allen Einfallswinkeln 0^0 bis 90^0 stets die Ellipsen gewisser constanter Wärmestrahlen mehr gestreckt als die der übrigen Wärmefarben.

Die Folge hiervon ist, dass an den meisten Metallen bei der Prüfung der reflectirten Strahlen durch einen Analysator, der immer auf das Minimum der Intensität eingestellt wird, eine Färbung eintritt, welche, um es durch ein optisches Beispiel zu veranschaulichen, das dunkle Feld vor Erreichung des Polarisationswinkels, z. B. blau, nach Ueberschreitung desselben gelb erscheinen lässt, während beim Blei das Feld für alle Einfallswinkel gelb, beim Arsen blau sich erhält, und nur die Helligkeit dieser constanten Färbung wechselt.

X. *Bemerkung über das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers; von Hermann Herwig.*

Vor einigen Jahren habe ich[1]) eine Untersuchung über das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers veröffentlicht, an welcher kürzlich Hr. H. F. Weber[2]), soweit es den rechnenden Theil meiner Arbeit betrifft, einige Ausstellungen gemacht hat. Dieselben sind zwar im Princip berechtigt, haben aber zum Theil für die Anwendung, worauf es in dem vorliegenden Falle doch allein ankommt, nach meinem Dafürhalten keine eigentliche Bedeutung und sind anderntheils durch die mangelhafte Berechnung, welche Hr. Weber an Stelle der meinen einführt, ungenügend beleuchtet. Ich erlaube mir deshalb, da namentlich der letztere Theil der Sache allgemeineres Interesse bieten dürfte, hier kurz darauf zurückzukommen.

Ich hatte für die Wärmeleitung in einem auch nach aussen abgebenden Stabe die Differentialgleichung benutzt:

$$\frac{1}{1+at} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = Bt$$

worin $B = \frac{phr}{q}$, ferner h = äusserer Wärmeleitungsfähigkeit, r = innerem Wärmeleitungswiderstand für 0°, p = Umfang und q = Querschnitt des Stabes und t = Temperatur an der um x vom Anfang des Stabes entfernten Stelle war, wenn jetzt der Einfachheit wegen die Umgebungstemperatur = 0° gedacht wird.

In dieser Gleichung hält Hr. Weber mit Recht die vorausgesetzte Abhängigkeit des Wärmeleitungswiderstandes von der Temperatur (mit dem Temperaturcoëfficienten α) theoretisch für nicht ausreichend berücksichtigt. Es müsste

1) Herwig, Pogg. Ann. **151.** p. 177. 1874.

2) Weber, Untersuchung über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten. Züricher Vierteljahrsschrift 1879, Heft 4.

in meiner Schreibweise die Differentialgleichung eigentlich lauten:

$$\frac{1}{1+\alpha t} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} - \frac{\alpha}{(1+\alpha t)^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = Bt.$$

Die Vernachlässigung des mit α multiplicirten Gliedes, die allerdings wohl hätte unterbleiben können, war indessen praktisch für meinen damaligen Zweck von keiner besonderen Bedeutung und konnte somit als erlaubt erscheinen. Ich suchte das Verhältniss des α zum Temperaturcoëfficienten für den galvanischen Widerstand des Quecksilbers und konnte schon nach den ersten Versuchen wissen, dass α sicher noch nicht die Hälfte des letztern Coëfficienten, also 0,0005, und wahrscheinlich noch entschieden weniger betragen würde. Die gemachte Abkürzung änderte somit an der ganzen Berechnung und Besprechung der Versuche nichts mit alleiniger Ausnahme des blos hypothetisch gedachten Falles, dass die Coëfficienten für beide Widerstände übereinstimmen sollten. Bei dieser in der damaligen Tabelle V ausgeführten Berechnung hätten in der letzten Colonne die Werthe von 7,23 bis 7,52 statt von 7,00 bis 7,52 steigen müssen, wenn ganz exact gerechnet wäre.

Die Auflösung der obigen exacten Differentialgleichung nach demselben Verfahren[1]), welches ich in der früheren Abhandlung einschlug, ergibt nämlich folgendes.

Zunächst gewinnt man (mit Berücksichtigung der Grenzbedingung):

$$\frac{dt}{dx} = -(1+\alpha t)\sqrt{B} \cdot \sqrt{\frac{2t}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}\log(1+\alpha t)}$$

und dann aus:

---

1) Vermuthlich ist die Meinung des Berichterstatters über meine Abhandlung in den „Fortschritten der Physik i. J. 1874“ p. 779, dass bei diesem Verfahren einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung der Abhängigkeit des Wärmeleitungswiderstandes von der Temperatur integrirt sei, nur dadurch entstanden, dass ich von der abgekürzten Differentialgleichung ausging. Andernfalls würde diese Meinung ein Missverstehen des physikalischen Problems voraussetzen.

$$-\frac{1}{1+\alpha T}\left(\frac{dt}{dx}\right)_T = \int_0^X B\,t\,dx$$

$$\frac{mX\sqrt{B}}{T} = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2T}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}\log(1+\alpha T)}$$

wenn T die Anfangstemperatur, X die Länge des Stabes und $m = \int_0^X t\,dx$ die Mitteltemperatur des Stabes ist.

An Stelle dieser exacten Formel gibt Hr. Weber eine andere an, indem er zwar von der richtigen Differentialgleichung ausgeht (nur wird $\frac{1}{k_0(1-\alpha t)}$ statt $r(1+\alpha t)$ eingeführt), im Laufe des Integrirens aber wiederholt ähnliche Vernachlässigungen, wie ich sie gleich bei Aufstellung der Differentialgleichung machte, begeht, allerdings theilweise mit zufälliger Compensation derselben. Die Formel des Hrn. Weber lautet in meiner Schreibweise:

$$\frac{mX\sqrt{B}}{T} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}\alpha T}$$

Löst man in der exacten Formel $\log(1+\alpha T)$ in eine Reihe auf, so ist richtig:

$$\frac{mX\sqrt{B}}{T} = \sqrt{1-\tfrac{2}{3}\alpha T + \tfrac{2}{4}\alpha^2 T^2 - \tfrac{2}{5}\alpha^3 T^3 \ldots\ldots}$$

Nun glaubt aber Hr. Weber, dass α den grossen Werth 0,0055 habe, und wendet seine Formeln überhaupt auf meine Versuche an, d. h. bis zu $T = 140$ oder bis zu $\alpha T = 0{,}77$, woraus sich das Unexacte an dem positiven Theil dieser Ausstellung des Hrn. Weber ergibt. Aehnlich verhält sich die Sache, wenn man mit Hrn. Weber in der Differentialgleichung $\frac{1}{k_0(1-\alpha t)}$ statt, wie oben, $r(1+\alpha t)$ setzt; man erhält dann streng richtig in meiner Schreibweise:

$$\frac{mX\sqrt{B}}{T} = \sqrt{1-\tfrac{2}{3}\alpha T}.$$

Hiernach liegt die Möglichkeit nahe, dass infolge derselben unexacten Rechnungsweise auch das bedeutsame Re-

sultat, welches Hr. Weber im Anschlusse an eine zweite Ausstellung positiv hinzugefügt hat, unrichtig sei. Es lässt sich indessen zeigen, dass hier eine in gewissem Sinne völlige Compensation der mannichfaltigen Vernachlässigungen in der Rechnung stattgefunden und somit das Resultat des Hrn. Weber eine gewisse Berechtigung hat; hauptsächlich aus diesem Grunde habe ich mir die gegenwärtige Veröffentlichung erlaubt.

Diese zweite Ausstellung des Hrn. Weber betrifft den Umstand, dass ich die äussere Wärmeleitungsfähigkeit innerhalb meiner Versuche constant vorausgesetzt habe. Das ist allerdings nicht streng richtig, diese Grösse wächst vielmehr mit steigender Temperatur. Wieviel das Wachsthum indessen beträgt, darüber lauten die Angaben ausserordentlich verschieden. Ich hatte bei meiner Untersuchung die zwei Jahre früher veröffentlichten Erkaltungsversuche des Hrn. Narr[1]) im Sinne, welche nur eine äusserst geringfügige, vielleicht sogar grösstentheils noch auf kleinen Fehlerquellen der Beobachtung basirende Veränderlichkeit[2]) ergeben hatten. Dazu kam, dass die Annahme eines merklichen Wachsthums der äussern Wärmeleitungsfähigkeit bei meinen Versuchen, welche die Constanz des obigen Ausdruckes $\frac{m X \sqrt{B}}{T}$ bewiesen hatten, zugleich ein Wachsen des innern Leitungsvermögens mit steigender Temperatur involviren würde, wie es ja auch Hr. Weber angibt. Und ein solches erwartete ich, die gegenseitigen Beziehungen der Wärmeleitung und der galvanischen Leitung untersuchend, allerdings überhaupt nicht, dachte vielmehr nur an eine mögliche Abnahme der Wärmeleitung mit steigender Temperatur. Ich erkenne jedoch jetzt gern an, dass das zu einer nicht exacten Formulirung meines damaligen Schlussresultates geführt hat, und dass letzteres richtig so lauten muss, dass das innere Wärmeleitungsvermögen des reinen Quecksilbers zwischen 40° und 160° keinenfalls mit wachsender Temperatur

1) Narr, Pogg. Ann. **142.** p. 123. 1871.
2) l. c. p. 143.

abnimmt. Das eigentlich von mir gesuchte Verhältniss zwischen Wärmeleitung und galvanischer Leitung erscheint dadurch, wie man sieht, nicht in einem wesentlich andern Lichte, und das halte ich noch immer für die wichtigste Seite der ganzen Frage.

Hr. Weber leitet nun unter Berücksichtigung eines Wachsthums der äussern Wärmeleitungsfähigkeit die bedeutsame Beziehung ab, dass der Temperaturcoëfficient dieses Wachsthumes infolge meiner Versuchsresultate gleich dem doppelten Temperaturcoëfficienten für die innere Wärmeleitung sei, führt jedoch seine Rechnung in der oben angedeuteten unexacten Weise durch, die auch betreffs des Resultates Zweifel erwecken muss. Statt dessen soll hier mit Hülfe des schon oben angewandten Verfahrens streng gerechnet werden, unter Voraussetzung eines linearen Wachsthums beider Vermögen mit der Temperatur. Dann ist mit den positiven Temperaturcoëfficienten α und β in der obigen Schreibweise:

$$(1 + \alpha t)\,\frac{d^2t}{dx^2} + \alpha\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = Bt\,(1 + \beta t).$$

Daraus erhält man zunächst:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{t\sqrt{B}}{1+\alpha t}\sqrt{1 + \tfrac{2}{3}(\alpha+\beta)\,t + \frac{\alpha\beta}{2}\,t^2}$$

und weiter:

$$-(1 + \alpha T)\left(\frac{dt}{dx}\right)_T = m\,XB + \int_0^X \beta B t^2\,dx.$$

Nun ist:

$$\int_0^X \beta B t^2\,dx = -\beta\sqrt{B}\int_T^0 \frac{t\,(1+\alpha t)\,dt}{\sqrt{1 + \tfrac{2}{3}(\alpha+\beta)\,t + \frac{\alpha\beta}{2}\,t^2}} =$$

$$= \frac{\beta T - 2}{\beta} R\sqrt{B} + \frac{2\sqrt{B}}{\beta} + \frac{2\alpha - \beta}{3\beta\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}}\cdot\sqrt{B}\log\frac{\tfrac{2}{3}(\alpha+\beta) + T\alpha\beta + R\sqrt{2\alpha\beta}}{\tfrac{2}{3}(\alpha+\beta) + \sqrt{2\alpha\beta}}$$

wenn:

$$R = \sqrt{1 + \tfrac{3}{2}(\alpha + \beta)\, T + \frac{\alpha\beta}{2}\, T^2}$$

gesetzt wird.

Folglich unter Einführung von $z = \frac{\beta}{\alpha}$:

$$R = \sqrt{1 + \tfrac{3}{2}(z + 1)\, \alpha\, T + \frac{z}{2}\, \alpha^2\, T^2}$$

und:

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \frac{2}{z\alpha T}(R - 1) - \frac{2 - z}{3\sqrt{2z}} \cdot \frac{2}{z\alpha T} \log\left\{1 + \frac{z\alpha T + R\sqrt{2z} - \sqrt{2z}}{\tfrac{3}{2}(z+1) + \sqrt{2z}}\right\}.$$

Jeder Werth von z, welcher die rechte Seite dieser Gleichung für ein beliebiges T zu 1 macht, steht mit meinen Versuchen im Einklang. Ein einzelner derartiger Werth ist nun in der That $z = 2$.

Nach Hrn. Weber's roher Annäherungsrechnung würde das der einzige zweifellose Werth sein, da sein entsprechendes Resultat lautet:

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}(\beta - 2\alpha)\, T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}(z - 2)\, \alpha T}.$$

Es liegt hier also immerhin eine sehr beachtenswerthe Beziehung vor, obschon die Sache nach dem Vorstehenden nicht ganz frei von Bedenken sein dürfte.

Ob aber die grossen von Hrn. Weber angeführten Zahlen für β und α ohne weiteres anzunehmen sind, wage ich nicht zu entscheiden. In Betreff des β haben andere Autoren erheblich weniger gefunden, womit dann auch wohl α viel kleiner werden würde. Der grosse von Hrn. Weber für α direct gefundene Werth könnte doch vielleicht durch noch nicht ganz vermiedene Strömungen bei seinen Versuchen bedingt sein.

Darmstadt, 16. Januar 1880.

XI. *Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. H. F. Weber „Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten“; von A. Winkelmann.*

Hr. Weber hat bei seiner Untersuchung über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten [1]) meine Arbeit über denselben Gegenstand [2]) besprochen und gelangt zu dem Resultate, dass „die (von mir) beobachteten Werthe selbst dafür sprechen, dass die wahre Wärmeleitungsfähigkeit in einer andern Weise berechnet werden muss, als nach der angegebenen Correctionsformel.“ Ich werde mich bemühen, diese Behauptung zu widerlegen.

Meine Arbeit umfasst die Versuche, welche mit drei verschiedenen Apparaten, die in ihren Dimensionen und Maassen verschieden gewählt waren, nach einer früher von Hrn. Stefan zur Bestimmung der Wärmeleitung der Luft angewandten Methode ausgeführt wurden. Die Berechnung meiner Versuche geschah mit Rücksicht auf die specifische Wärme und das specifische Gewicht der in den Apparaten eingeschlossenen Flüssigkeiten und beachtete so einen Umstand, der später, wie Hr. Weber richtig bemerkt, von Hrn. Beetz [3]) übersehen wurde. Diese von mir ausgeführte Berechnung der Versuche zur Bestimmung der Wärmeleitung wird von Hrn. Weber nicht angegriffen, wohl aber die Correction, welche ich an den richtig berechneten Werthen glaubte anbringen zu müssen. Die direct berechneten Werthe (ohne Correction) waren für die verschiedenen Apparate sehr verschieden, und sagte ich in meiner damaligen Arbeit von ihnen: „Wie sich aus der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle ergibt, zeigen die Werthe K für die Wärmeleitungsfähigkeiten so grosse Differenzen bei den verschiedenen Apparaten, dass sich aus diesen Werthen allein nicht

1) Weber, Wied. Ann. **10.** p. 103. 1880.
2) Winkelmann, Pogg. Ann. **153.** p. 481. 1874.
3) Beetz, Wied. Ann. **8.** p. 435. 1879.

einmal die Grenzen ermitteln liessen, innerhalb deren die wahren Werthe für die gesuchte Grösse enthalten sind."

Es fragte sich nun, wie die Differenzen, welche die Apparate untereinander lieferten, zu erklären sind. Hr. Weber glaubt, dass dieselben durch Strömungen veranlasst seien, die um so stärker auftreten müssten, je grösser bei dem einzelnen Apparate der Abstand des innern von dem äussern Cylinder, je grösser also die Dicke der Flüssigkeitsschicht sei. Die Versuche selbst sprechen nach Hrn. Weber für die Richtigkeit dieser Auffassung, denn er sagt: „Eine aufmerksame Durchmusterung der von Hrn. Winkelmann an den drei Apparaten erhaltenen Resultate, die ich noch einmal hier anführen will, lässt die Richtigkeit dieser Annahme sofort in die Augen springen. Für jede der benutzten Flüssigkeiten wächst das beobachtete (scheinbare) Wärmeleitungsvermögen in beschleunigter Weise mit wachsender Dicke der Flüssigkeitslamelle, weil sich die Flüssigkeitsströmungen mit wachsender Dicke der Flüssigkeitsschicht in intensiverer Weise entwickeln können."

Nach dieser Bemerkung scheint die Sache so klar zu sein, dass ich mich selbst wundern sollte, warum ich diese Flüssigkeitsströmungen nicht erkannte. Nun erinnere ich mich aber sehr wohl, dass ich die von den drei Apparaten gelieferten Werthe sehr aufmerksam durchmustert, dass ich das Anwachsen der Werthe mit wachsender Flüssigkeitsschicht wahrgenommen, und dass ich dabei die Strömungen sehr sorgfältig in Erwägung gezogen habe. Der Auffassung, dass die Strömungen in dem von Hrn. Weber vermutheten Sinne die grossen Differenzen in den Werthen der einzelnen Apparate erzeugt haben, standen nach meiner Ansicht mehrere Gründe entgegen.

Eine Vergleichung der Dimensionen der von mir benutzten Apparate mit jenen, welche Hr. Stefan bei seiner Untersuchung anwandte, lässt erkennen, dass dieselben sich nur sehr wenig voneinander unterscheiden, und dass besonders die Schichtdicke bei meinen Versuchen über Flüssigkeiten nicht grösser, als bei Stefan's Versuchen über Luft war. Denn während diese Schichtdicke bei Stefan zwischen

0,2346 und 0,512 cm variirte, war dieselbe bei meinen Apparaten zwischen 0,205 und 0,4952 cm gelegen. Die Versuche von Stefan hatten aber gezeigt, dass die Strömungen der Luft bei seinen Apparaten auch bei Atmosphärendruck keinen Einfluss auf die Bestimmung der Wärmeleitung ausübten, und diese Thatsache hinderte mich zunächst, unter den gleichen Verhältnissen anzunehmen, dass bei Flüssigkeiten ein solcher Einfluss, und zwar ein so bedeutender Einfluss, wie nach meinen Versuchen vorauszusetzen wäre, existiren sollte. Denn wenn auch die Wärmemenge, welche von der Volumeneinheit einer Flüssigkeit transportirt wird, viel grösser als jene ist, welche unter gleichen Umständen durch ein Gas geliefert wird, so ist doch auch die innere Reibung bei den Gasen ungefähr in gleichem Maasse kleiner, als bei den Flüssigkeiten.

Wollte man annehmen, dass Flüssigkeitsströmungen im Sinne des Hrn. Weber das Anwachsen der Werthe mit zunehmender Dicke der Schicht veranlasst hätten, so müssten die Zunahmen, welche die Werthe mit wachsender Dicke bei den verschiedenen Apparaten erfahren, um so grösser sein, je geringer die innere Reibung der Flüssigkeit ist. Diese Bemerkung wird auch von Hrn. Weber gemacht und dazu verwerthet, um die Richtigkeit seiner Anschauung aus meinen Versuchen zu beweisen. Das Glycerin hat die stärkste, der Schwefelkohlenstoff die schwächste innere Reibung von den Flüssigkeiten, welche ich untersucht habe, und da in der That das erstere die geringste Zunahme der berechneten Wärmeleitung mit wachsender Schichtdicke zeigt, das letztere aber die grösste, so hält Hr. Weber seine Auffassung für erwiesen. Ich selbst komme mit Rücksicht auf den Satz über die innere Reibung nicht zu dem gleichen Resultate, da ich nicht blos zwei, sondern alle Flüssigkeiten, also 6, bei dieser Frage berücksichtigt habe. Bezeichnet man bei jeder Flüssigkeit das Wärmeleitungsvermögen, welches bei der kleinsten Schichtdicke berechnet wurde, mit 1, so wurden bei der grössten Schichtdicke folgende Werthe für die Flüssigkeiten erhalten:

Glycerin	1,08	Chlornatriumlösung . .	1,93
Wasser	1,36	Alkohol	2,21
Chlorkaliumlösung . .	1,51	Schwefelkohlenstoff . .	2,31

Vergleicht man Wasser und Chlorkaliumlösung miteinander, so hat man beim Wasser eine Zunahme von 36 Proc., bei der Lösung dagegen eine solche von 93 Proc. Darnach müsste diese Lösung eine bedeutend kleinere innere Reibung als das Wasser besitzen, sollte die Folgerung des Hrn. Weber richtig sein. Der Alkohol hat einen Zuwachs von 121 Proc., und doch ist nach übereinstimmenden Versuchen die Reibung beim Alkohol nicht kleiner, sondern etwas grösser als beim Wasser. Obwohl der Schwefelkohlenstoff viel leichtflüssiger als der Alkohol ist, ist die Zunahme beim Schwefelkohlenstoff (131 Proc.) nur um etwas grösser, als jene beim Alkohol (121 Proc.). Endlich wäre auch zu erwähnen, dass das Chlorkalium einen stärkern Zuwachs als das Wasser zeigt. Sobald man also nicht bei zweien von den sechs untersuchten Flüssigkeiten stehen bleibt, sondern sie alle aufmerksam durchmustert, findet man, dass „die Richtigkeit der (von Hrn. Weber gemachten) Annahme" durchaus nicht „in die Augen springt", sondern dass dieselbe vielmehr mit den beobachteten Werthen ebenso häufig in Widerspruch tritt, wie mit denselben übereinstimmt. Ich behaupte hiermit keineswegs erwiesen zu haben, dass bei meinen Apparaten keine Strömungen aufgetreten seien, sondern nur, dass ihre Wirkung aus den Beobachtungen nicht in der Art gefolgert werden kann, wie Hr. Weber glaubte mit Sicherheit schliessen zu können.

Hr. Weber hat noch auf einen andern Umstand aufmerksam gemacht, welcher ebenfalls nach seiner Ansicht dazu angethan ist, aus den beobachteten Werthen selbst den Schluss zu ziehen, dass die wahre Wärmeleitung anders berechnet werden muss als nach meiner Correctionsformel. Bedeutet nämlich K die wahre Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeit, k jene von den einzelnen Apparaten gelieferte, v die Abkühlungsgeschwindigkeit und p das Verhältniss der beiden Basisflächen zur Mantelfläche des äussern Cylinders bei jedem Apparate, so hatte ich:

$$K = k + p.v.n$$

gesetzt. In meiner Arbeit heisst es weiter: „Bildet man die den drei Apparaten entsprechenden Gleichungen, nämlich:

$$K = k_1 + p_1 v_1 n, \quad K = k_2 + p_2 v_2 n, \quad K = k_3 + p_3 v_3 n,$$

so lässt sich die Grösse n in doppelter Weise bestimmen; wird dann mit dem Mittelwerthe von n K berechnet, so liefert die Uebereinstimmung dieser Werthe einen Maassstab für die Gültigkeit der Annahmen, welche der gebildeten Gleichung zu Grunde gelegt sind.“ Die Werthe von K wurden damals so angeführt, wie jeder einzelne Apparat sie geliefert hat; ferner ist bei jeder Flüssigkeit der Werth von n angegeben, der zur Berechnung von K nach der obigen Gleichung gedient hat. Um eine Uebersicht über die Resultate zu geben, will ich die berechneten Werthe hier nicht noch einmal mittheilen, sondern vielmehr zeigen, wie gross der Unterschied des grössten und kleinsten Werthes von K für die verschiedenen Apparate bei jeder Flüssigkeit ist; ferner füge ich die Werthe n für die verschiedenen Flüssigkeiten bei, weil ich auf diese nochmals zurückkommen muss.

Flüssigkeiten	Differenz des grössten und kleinsten Werthes von K, ausgedrückt in Procenten des Mittelwerthes	n
Wasser	1,5	0,0524
Chlorkaliumlösung . . .	2,6	0,0795
Chlornatriumlösung . .	5,3	0,1681
Alkohol	1,7	0,1982
Schwefelkohlenstoff . .	0,0	0,1921
Glycerin	0,6	0,0104

Wie man aus obiger Zusammenstellung sieht, stimmen die Werthe im ganzen recht gut überein, da nur einmal (bei der Chlornatriumlösung) eine Differenz von 5,3 Proc. vorkommt. Berücksichtigt man, dass die Werthe durch eine Correctionsformel aus den unmittelbar nach den Beobachtungen berechneten Werthen ermittelt sind, so wird man eine Differenz von 5 Procent nicht gross finden, weil jede Correction mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist. Ich war mir dieser Unsicherheit schon damals wohl bewusst, wie aus dem folgenden Satze hervorgeht: „Die mitgetheilten

Resultate werden überhaupt umsomehr Vertrauen verdienen, je kleiner die angebrachte Correction (je kleiner n) ist, sodass die Werthe für Glycerin, Wasser und Chlorkaliumlösung den andern gegenüber einen bedeutenden Vorzug haben."

Hr. Weber findet nun, dass die beobachteten Werthe selbst dafür sprechen, dass die obige Correction falsch ist; „denn," sagt H. W., „die Grösse n ist laut der Beobachtungsdaten nicht constant. So ergeben sich aus der Combination der an den Apparaten I, II, III gemachten Beobachtungen für Kochsalzlösung für n die drei Werthe:

$$n = 0{,}094;\quad 0{,}179;\quad 0{,}157,$$

und für Wasser:

$$n = 0{,}0650;\quad 0{,}0492;\quad 0{,}0548.$$

Die mit wachsender Dicke der benutzten Flüssigkeitsschicht erfolgende Zunahme des beobachteten Wärmeleitungsvermögens muss demnach in anderer Weise erklärt werden."

Betrachtet man die obigen Werthe von n, so sieht man allerdings, dass dieselben für eine Flüssigkeit nicht einander gleich sind. Eine vollständige Gleichheit wäre aber nur möglich gewesen, wenn die Beobachtungsfehler gleich Null wären; da man dies nicht verlangen kann, so fragt es sich offenbar, welche Beobachtungsfehler anzunehmen sind, um die vorhandenen Unterschiede in n zu erklären. Dass hier die einzelnen Werthe von n nicht gleichmässig zu beurtheilen sind, geht schon daraus hervor, dass, während nach Hrn. Weber der Mittelwerth von n für Chlornatriumlösung 0,143 ist, ich nach der obigen Tabelle den Werth 0,1681 zur Berechnung von K angewandt habe. Man sieht dies aber deutlicher, wenn man die Werthe von n selbst bildet; man findet:

$$n = \frac{k_2 - k_1}{p_1 v_1 - p_2 v_2} = n_{1,2}, \qquad n = \frac{k_3 - k_2}{p_2 v_2 - p_3 v_3} = n_{2,3},$$

$$n = \frac{k_3 - k_1}{p_1 v_1 - p_3 v_3} = n_{1,3}.$$

Nach diesen drei Gleichungen sind die Werthe n, welche Hr. Weber angibt, berechnet. Die einzelnen Werthe von n haben nun aber eine um so grössere Genauigkeit, je klei-

ner der Einfluss ist, den ein Beobachtungsfehler auszuüben vermag. In dieser Beziehung steht der Werth $n_{1,3}$ den beiden andern Werthen von n ganz bedeutend nach; es ist nämlich nach den Beobachtungen für Chlornatriumlösung:

$k_2 - k_1 = 0{,}000\,164$, $k_3 - k_2 = 0{,}000\,854$, $k_3 - k_1 = 0{,}001\,018$.

Hiernach ist der Werth $k_2 - k_1$ mehr als fünfmal so klein, als die Differenz $k_3 - k_2$, und mehr als sechsmal so klein, als die Differenz $k_3 - k_1$; infolge dessen ist das Gewicht des Werthes $n_{1,2} = 0{,}094$ sehr gering, weil derselbe mit Hülfe der kleinsten Differenz $k_2 - k_1$ berechnet ist.

Nach dieser Betrachtung zeigen sich die Werthe n für Chlornatriumlösung, nämlich:

$$0{,}094; \quad 0{,}179; \quad 0{,}157$$

in einem andern Lichte, als Hr. Weber anzunehmen scheint; denn man wird nur den beiden letzten Werthen eine grössere Bedeutung beilegen und die erste Grösse bei der Mittelbestimmung kaum berücksichtigen; so habe ich es in der That gethan und auch in meiner Arbeit durch den Satz: „es lässt sich die Grösse n in doppelter Weise bestimmen", angedeutet.

Um endlich zu zeigen, welche Beobachtungsfehler die Unterschiede in den Werthen von n bei der Chlornatriumlösung (hierbei sind die Unterschiede grösser, als bei irgend einer andern Flüssigkeit) verursachen können, habe ich für die Abkühlungsgeschwindigkeit v_1 einen Werth angenommen, der 2,5 Proc. kleiner als der beobachtete, und für v_2 einen Werth, der 2,5 Proc. grösser als der beobachtete ist. Mit diesen Werthen und mit dem Beobachtungswerth v_3 erhält man folgende Werthe von n:

$$n_{1,2} = 0{,}0162; \quad n_{2,3} = 0{,}0169; \quad n_{1,3} = 0{,}0166.$$

Wie man sieht, sind hier die Differenzen, welche die Weber'schen Werthe zeigen, fast vollständig verschwunden, sodass durch Beobachtungsfehler von 2,5 Proc. in zwei Abkühlungsgeschwindigkeiten die vermeintlichen grossen Unterschiede erklärt werden. Mit den so veränderten Werthen der Abkühlungsgeschwindigkeiten wird auch die Uebereinstimmung der berechneten Werthe von K grösser; während nämlich

mit Hülfe der beobachteten Werthe die Differenz zwischen dem grössten und kleinsten Werthe 5,3 Proc. beträgt, würde sie jetzt nur 0,5 Proc. sein.

Das Wasser und die anderen Flüssigkeiten zeigten viel kleinere Unterschiede in den Werthen von n, als die Chlornatriumlösung, und daher ist erwiesen, dass es ein Irrthum von Seiten des Hrn. Weber ist, wenn derselbe meint, dass, weil „die Grösse n laut den Beobachtungsdaten nicht constant ist, die beobachteten Werthe selbst dafür sprechen, dass die wahre Wärmeleitungsfähigkeit in einer andern Weise berechnet werden muss, als nach der angegebenen Correctionsformel."

Den Hauptzweck der vorliegenden Erwiderung glaube ich erreicht zu haben, da es mir darauf ankam, zu zeigen, dass die von Hrn. Weber gemachte Annahme, deren Richtigkeit bei einer aufmerksamen Durchmusterung meiner Resultate sofort in die Augen springen soll, nicht durch die beobachteten Werthe selbst erwiesen ist.

Es erübrigt noch kurz auf den Grund einzugehen, weshalb Hr. Weber auch die Form der angebrachten Correction für hinfällig hält. Hr. Weber sagt: „Eine erhebliche Differenz zwischen der Temperatur der horizontalen Basisflächen und der Temperatur der Mantelfläche kann wegen des verhältnissmässig sehr grossen Wärmeleitungsvermögens des Messings selbst dann kaum resultiren, wenn der Rührer nur die Mantelfläche abfegt und die horizontalen Basisflächen ganz unberührt lässt. Damit wird aber auch die Form der angebrachten Correction hinfällig." Wenn man die Richtigkeit der Behauptung Weber's zugeben wollte, dass die Temperaturdifferenz zwischen Mantel und Basis kaum erheblich sei, so ist damit die Form der angebrachten Correction noch nicht hinfällig; sie würde dies erst, wenn die Temperatur der Cylinderoberfläche gleich 0° wäre. Nun haben aber die Voruntersuchungen gezeigt, dass ohne Rühren die Oberfläche des Cylinders eine erheblich höhere Temperatur als 0° hat und ferner, dass durch das Rühren die Temperatur des Cylinders erniedrigt wird. Wenn nun einer-

seits durch das Abfegen der Mantelfläche mittelst des Rührers die Temperatur dieser Fläche erniedrigt wird, andererseits aber den Basisflächen grosse Wärmemengen vom Innern zugeführt werden, ohne dass eine directe Wirkung der Rührer hier möglich wäre, so wird, wenn infolge der grossen Wärmeleitung des Messings die ganze Oberfläche des Cylinders die gleiche Temperatur hat, diese Temperatur weder mit jener der Mantelfläche, noch auch mit jener der Basisflächen, wenn beide getrennt voneinander gedacht werden, übereinstimmen; es wird vielmehr die Temperatur zwischen den genannten Grenzen liegen und besonders von dem Grössenverhältniss der Basisflächen zur Mantelfläche abhängen. Hieraus geht hervor, dass, wenn die Temperatur der Cylinderoberfläche in ihren einzelnen Theilen kaum erheblich differiren sollte, sie jedenfalls eine höhere Temperatur als 0^0 hat, und infolge dieses Umstandes müssen die beobachteten Werthe für die Abkühlung zu klein werden, — dasselbe Resultat, wie es bei der Annahme, dass die Basisflächen eine von 0^0 verschiedene und höhere Temperatur als die Mantelfläche besitzen, erhalten wurde. Der bezeichnete Einwand des Hrn. Weber macht daher auch die Form der angebrachten Correction nicht hinfällig.

Geht man davon aus, dass die von Hrn. Weber gefundenen Werthe für die Wärmeleitung die richtigen sind, so wird man bei meinen Werthen zu der Annahme gezwungen, dass Flüssigkeitsströmungen bei grösserer Schichtdicke die Werthe so bedeutend vergrössert haben, und dass die kleinsten Werthe der Wahrheit am nächsten kommen; stellt man sich aber auf den Standpunkt der Unkenntniss über die wahren Werthe der Wärmeleitung, so bieten meine Versuche nicht hinreichenden Grund zu der Annahme, dass die von mir bei der grössten Schichtdicke erhaltenen Werthe infolge von Strömungen zu gross geworden sind.

Hohenheim, Juni 1880.

XII. *Ueber Luftwiderstand; von G. Recknagel.*

I. Beschreibung einer Methode, die Intensität des Luftdruckes zu messen, welchen ein Körper bei bestimmter relativer Windgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle seiner Oberfläche erfährt.

1. Die Methode sucht den Unterschied zwischen dem in der Ueberschrift genannten und dem durch den Barometerstand gegebenen Luftdruck zu ermitteln. Der Körper wird längs der Peripherie eines Kreises herumgeführt. An derjenigen Stelle seiner Oberfläche, welche den zu messenden Druck erfährt, ist ein rundes Loch von 0,5 mm Durchmesser gemacht und durch den Körper hindurch fortgesetzt. Von dem andern Ende dieses Loches aus führt eine luftdichte Röhre nach dem Mittelpunkte des Kreises, längs dessen Peripherie der Körper umläuft. Dort mündet die Röhre in ein feststehendes, an der Drehung nicht theilnehmendes Gefäss aus, welches von der äusseren Luft dicht abgeschlossen ist. Von diesem Gefässe aus führt ein Kautschukschlauch nach einem Differentialmanometer.

Die schematische Zeichnung (Taf. IV Fig. 13) gibt eine Uebersicht über die Anordnung des Apparates, welche wohl ohne weiteres verständlich sein wird.

Dieser Anordnung gemäss gibt das Manometer die Spannungsunterschiede an, welche zwischen der im Mittelpunkte der Drehung befindlichen Luft und der Luft der Umgebung bestehen, oder, bezeichnen wir mit P die Spannung der ruhenden Luft der Umgebung, mit P_0 die Spannung der im Mittelpunkte der Drehung befindlichen Luft, so erhalten wir vermittelst der Ablesungen am Manometer:

$$P - P_0.$$

Für diesen Ueberdruck haben wir zwar kein directes Interesse, denn wir wünschen zu erfahren, um wie viel der Druck (P_1), welchen die Luft gegen die bestimmte, in der Peripherie herumlaufende Stelle ausübt, grösser ist als der Druck (P) der ruhenden Luft. Indessen führt uns die manometrische Messung dennoch zum Ziele, wenn zwischen den

beiden Drucken P_1 und P_0, von welchen der erstere am offenen umlaufenden, der letztere am geschlossenen ruhenden Ende einer mit constanter Geschwindigkeit geschwungenen Röhre besteht, eine feste Beziehung stattfindet, sodass durch eine hinreichend hypothesenfreie Rechnung von dem einen dieser Drucke auf den andern geschlossen werden kann.

2. Diese feste Beziehung wird ermittelt, indem man von der Differentialgleichung ausgeht, dass für jede durch zwei unendlich nahe Querschnitte der Röhre begrenzte Luftschicht die nöthige Centripetalkraft aus dem Dichtigkeitsüberschuss der nach aussen folgenden Schicht resultiren muss.

Um die Luftschicht, welche sich zwischen zwei einander unendlich nahen, in der Entfernung x vom Mittelpunkte der Drehung befindlichen Röhren befindet, in kreisförmiger Bahn zu erhalten, ist eine Centripetalkraft nöthig von der Grösse:

$$\mu \frac{u^2}{x},$$

wobei mit μ die Masse der Luftschicht, mit u ihre lineare Geschwindigkeit bezeichnet ist.

Die Masse μ ist gegeben durch:

$$\mu = \frac{sq\,dx}{g},$$

wenn q die Grösse eines Querschnitts, dx den gegenseitigen Abstand der beiden Querschnitte, s die Dichtigkeit der zwischen den Querschnitten enthaltenen Luft und g die Fallbeschleunigung darstellt.

Die Centripetalkraft, welche durch Substitution für μ die Form erhält:

$$\frac{sq}{g} \cdot u^2 \cdot \frac{dx}{x},$$

muss geliefert werden durch einen äquivalenten Ueberdruck der nach aussen hin folgenden Luftschicht. Ein solcher Ueberdruck kann hier, wo es sich um ein statisches Problem handelt, nur durch einen Zuwachs an Dichtigkeit hervorgebracht werden, da Temperaturdifferenzen, welche durch die Bewegungen entstehen, die zur Ausbildung des schliesslichen Gleichgewichtszustandes nöthig sind, sehr bald durch Wärmeleitung verschwinden.

Demnach ist die Dichtigkeit der nach aussen folgenden Schicht $s + ds$, ihre Spannung $p + dp$ und:

$$dp = \frac{P}{S} ds,$$

wobei P und S zwei bestimmte, bei der gerade in der Röhre herrschenden Temperatur der Luft zusammengehörige Werthe der Spannung und der Dichtigkeit sind.

Die Centripetalkraft ist $q\,dp$ und folglich:

$$q\,dp = \frac{sq}{g} \cdot u^2 \cdot \frac{dx}{x}.$$

Wird nun s durch $p\,\frac{S}{P}$ ersetzt und die Gleichung durch pq dividirt, so erhält man:

$$\frac{dp}{p} = \frac{S}{Pg} u^2 \frac{dx}{x},$$

so dass zum Zwecke der Integration noch die Geschwindigkeit u als Function von x auszudrücken ist. Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit der Röhre mit θ, so ist:

$$u = x\theta \qquad \text{und somit} \qquad \frac{dp}{p} = \frac{S\theta^2}{Pg} x\,dx.$$

Durch Integration erhält man:

$$\log p = \frac{S\theta^2}{2Pg} x^2 + \text{Const.},$$

und die Constante erhält den Werth $\log P_0$, wenn man die im Mittelpunkte der Drehung ($x = 0$) bestehende Spannung der Luft mit P_0 bezeichnet.

Setzt man für p den besondern Werth P_1, welcher am äussersten (offenen) Ende der Röhre ($x = l$) stattfindet, so erhält man die Gleichung:

$$\log \frac{P_1}{P_0} = \frac{S}{2gP} (\theta l)^2.$$

Für (θl) kann man die lineare Geschwindigkeit v des Röhrenendes einführen und für $\frac{S}{g}$ die Masse (m) eines Cubicmeters derjenigen Luft, in welcher sich der Körper bewegt, da man wohl voraussetzen darf, dass nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes die Temperatur der in der Röhre befindlichen Luft von der Temperatur der die Röhre umgebenden Luft nicht merklich verschieden ist.

So erhält man:

$$\log \frac{P_1}{P_0} = \frac{m}{2P} v^2 \quad \text{oder} \quad P_1 = P_0 e^{\frac{mv^2}{2P}}.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung zwischen P_1 und P_0.

3. Für kleine Werthe von v ist dieselbe einer Vereinfachung fähig. Es ist nämlich $m = \frac{S}{g} = \frac{1,293}{9,81}$ bei 0° C. und 760 mm Barometerstand und demnach $\frac{m}{2}$ selten etwas grösser als 0,065, während P als Druck der Luft auf ein Quadratmeter unter den gleichen Voraussetzungen 10333 kg beträgt. Folglich darf v beinahe auf 13 m anwachsen, bis der Exponent von e den Werth 0,001 erreicht, und man erhält, wenn $v < 13$, durch Entwickelung der Exponentialgrösse eine so rasch convergirende Reihe, dass dieselbe auf die ersten beiden Glieder beschränkt werden darf.

Es ist also mit Annäherung:

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{mv^2}{2P}\right).$$

Wie oben bemerkt, gibt der Versuch die Differenz $P - P_0$, während $P_1 - P$ das Ziel der Messung ist. Subtrahirt man beiderseits P, so erhält man:

$$P_1 - P = \frac{P_0}{P} \cdot \tfrac{1}{2} mv^2 - (P - P_0).$$

Nun steht links die Grösse, um deren Ermittelung es sich handelt, nämlich der Ueberschuss des Luftdrucks gegen die bestimmte Stelle des Körpers, an welcher die Röhre ausmündet, über die Spannung der ruhenden Luft des Versuchsraumes; der Subtrahend auf der rechten Seite wird durch Manometerablesungen entwickelt, das Product $\frac{1}{2}mv^2$ kann aus dem beobachteten Barometer- und Thermometerstande sowie aus der gemessenen Geschwindigkeit berechnet werden, und das Verhältniss $\frac{P_0}{P}$ darf innerhalb der Grenze, in welcher die einfachere Gleichung gilt, mit hinreichender Annäherung gleich eins gesetzt werden, weil es um weniger als 0,001 von 1 abweicht, und die Methode keinen Anspruch darauf macht, den Werth von $P_1 - P$ auf 0,1 Proc. genau zu geben.

Es genügt somit bei Geschwindigkeiten von weniger als 13 m die Gleichung:

$$P_1 - P = \tfrac{1}{2} m v^2 - (P - P_0).$$

4. Bezüglich des experimentellen Verfahrens mögen noch einige Details angegeben werden.

Die Röhre ist etwas mehr als 2 m lang und in Entfernungen von 2 m und 1 m mit senkrecht aufsteigenden Abzweigungen versehen, welche gestatten, die Versuchsobjecte in 0,3 m Höhe über dem Arme anzubringen. Der Apparat wird an der Kurbel mit der Hand gedreht. Um eine bestimmte Geschwindigkeit zu erzielen und dieselbe längere Zeit constant zu erhalten, wird ein Mälzel'sches Metronom in Gang gesetzt. Mit den Schlägen desselben werden die Anschläge in Einklang erhalten, welche eine am festen Gestell befestigte Feder von vier symmetrisch an der untern Riemenscheibe angebrachten Stiften erfährt. Da jede Abweichung von der vorgeschriebenen Geschwindigkeit sich durch Doppelschläge verräth, wird der Drehende sofort zur Correctur veranlasst und bringt es innerhalb weniger Umdrehungen dahin, sich zu einem hinreichend stark und gleichförmig arbeitenden Motor einzurichten.

Während ein Gehülfe dreht, folgt der Beobachter dem Gang des Manometers.[1]) Nach Ablauf der anfänglichen Bewegung des äusseren Niveaus, welche vom Nullpunkt aus nach der neuen, durch die Differenz $(P - P_0)$ bestimmten Gleichgewichtslage hin zielt, finden fortwährend geringe Schwankungen ohne erkennbare Periode statt, deren Ursache zum Theil in kleinen Aenderungen der Geschwindigkeit, vorzüglich aber in der Veränderlichkeit des Mitwindes zu suchen ist. Deshalb ist es zweckmässig, nach Beginn dieser Schwankungen den Stand des Manometers von 10 zu 10 Secunden zu notiren und aus etwa 30 solcher Aufzeichnungen das arithmetische Mittel zu nehmen. Dieses Mittel in Verbindung mit zwei Controlen des Manometernullpunktes und einer Ablesung des Barometers und Thermometers gibt eine Beobachtung.

1) Das von mir benutzte ist in Wied. Ann. 2. p. 296. 1877 beschrieben.

II. Ueber den Luftwiderstand, welchen Rotationsflächen, die gegen Luft eine constante relative Geschwindigkeit in der Richtung ihrer Rotationsaxe besitzen, gegen ihren Scheitel erfahren.

1. Um eine Anschauung zu ermöglichen, wollen wir die vorausgesetzte relative Geschwindigkeit so verstehen, dass die Rotationsfläche ruht, während sich die Luft mit der Geschwindigkeit v_0, der Rotationsaxe parallel, gegen die Fläche bewegt. Unter diesen Umständen wird sich sehr bald ein permanenter Zustand vor der Fläche ausgebildet haben, dadurch bedingt, dass ebenso viel Luft innerhalb einer bestimmten Zeit durch einen Querschnitt in einen Kreiscylinder eintritt, den man sich so um die Rotationsaxe gelegt denkt, dass er auf der Rotationsfläche aufsitzt, als innerhalb derselben Zeit seitlich durch den hinter dem Querschnitt liegenden Theil des Cylindermantels entweicht.

Um die Axe herum werden alle Bewegungen, mittelst deren die Luft der ihr widerstehenden Rotationsfläche ausweicht, symmetrisch sein.

Diese Symmetrie berechtigt zu den folgenden Annahmen. Denken wir uns einen Cylinder von dem unendlich kleinen Radius ϱ um die Axe gelegt und eine Luftmasse $\frac{\varrho^2\pi \cdot h \cdot s_0}{g}$, welche sich noch mit der ursprünglichen Geschwindigkeit v_0 in diesem Cylinder bewegt, so wird der Eintritt dieser Luftmasse in den Wirkungsraum der widerstehenden Fläche begleitet sein von einer Aenderung der Höhe h, des Radius ϱ, der Dichtigkeit s_0 und der Geschwindigkeit v_0. Die Höhe wird kleiner werden, die Dichtigkeit zunehmen und die Geschwindigkeit abnehmen.

Bei der mit diesen Veränderungen verbundenen Deformation wird Masse durch den Mantel des Cylinders vom Radius ϱ austreten, und dieser Vorgang wird sich bei dem Fortschreiten der Bewegung gegen die widerstehende Fläche hin wiederholen, bis endlich in irgend einer Entfernung von dieser Fläche, welche auch Null sein kann, zugleich mit der Geschwindigkeit die Höhe des Cylinders verschwindet.

Denken wir uns nun, dass innerhalb des Wirkungsraumes, in irgend einer Entfernung z vom Scheitel die Luftmasse, welche sich dermalen in dem Cylinder $k = \varrho^2 \pi\, dz$ befindet, die Dichtigkeit s, die Spannung p und die der Axe parallele Geschwindigkeit v besitze, so läuft derselben innerhalb des gedachten Cylinders vom Radius ϱ Luft voraus, deren Dichtigkeit $(s + ds)$, deren Geschwindigkeit $(v - dv)$ und deren Spannung $(p + dp)$ ist. Der vorausgesetzte permanente Zustand bringt es mit sich, dass nach einem Differential der Zeit die nachlaufende Masse in den Zustand der vorauslaufenden eingetreten ist. Die Geschwindigkeitsänderung $(-dv)$ ist als Wirkung des Ueberdruckes dp $(\varrho^2\pi)$ aufzufassen, welchen die vorauslaufende Schicht gegen die nachfolgende auf einem Wege ausübt, welcher nur um ein Differential höherer Ordnung verschieden ist von der Höhe dz des Cylinders k. Setzt man die Arbeit dem Verluste an lebendiger Kraft der fortschreitenden Bewegung gleich, so folgt bei Weglassung des unendlich Kleinen höherer Ordnung:

$$dp\,(\varrho^2\pi)\,dz = \tfrac{1}{2}\,\frac{s(\varrho^2\pi)dz}{g}\,(-2v\,dv),$$

oder einfacher:

$$dp = -\frac{s}{g}\,v\,dv. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung bleibt offenbar so lange giltig, als der Austritt eines Theils der Masse durch den gedachten Cylindermantel vom Radius ϱ lediglich vermöge derjenigen Einwirkungen erfolgt, welche das Cylinderchen k auf seinem Wege dz erfährt. Denn unter dieser Voraussetzung ist die austretende Masse gegenüber der verbleibenden als Differential höherer Ordnung zu betrachten, da erst durch unendlich viele derartige Austritte die im Cylinderchen k ursprünglich enthaltene Masse — das Differential niederer Ordnung — aus dem gedachten Cylinder hinausgeschafft wird. Zu dem gleichen Schlusse kommt man auch von der Annahme aus, dass mit dem Fortschreiten der im Cylinderchen k enthaltenen Masse eine Verdichtung derselben verbunden sei. Verdichtung wäre nicht möglich, wenn nicht die aus dem Cylindermantel austretende Luftmasse kleiner

wäre als die im abgängigen Cylinder dk von der Basis $\varrho^2\pi$ und der Höhe δ (dz) enthalten gewesene Masse, also kleiner als ein Differential der Masse $\frac{s\varrho^2\pi dz}{g}$.

Die erstere Annahme kommt darauf hinaus, dass um die Rotationsaxe herum ein Cylinder von so kleinem Radius gelegt werden kann, dass innerhalb desselben nur unendlich kleine Geschwindigkeitscomponenten vorkommen, welche zu jener Axe senkrecht gerichtet sind, und ist somit ein Ausdruck der Symmetrie. Die zweite Annahme (der wachsenden Dichtigkeit) ist nach Ausschluss des Stosses die einzig mögliche, welche zur Erklärung eines Druckes der bewegten Luft gegen den ruhenden Körper führt, welcher ihr im Wege steht.

2. Die zur Integration der Gleichung (1) erforderliche Beziehung zwischen der Spannung p und der Dichtigkeit s ergibt sich aus der Erwägung, dass die Compression adiabatisch, d. h. ohne Zufuhr und Ableitung von Wärme stattfindet. Demgemäss gilt:

$$p = qs^\beta, \tag{2}$$

wobei der Exponent β das Verhältniss $\frac{C}{c} = 1{,}41$ der specifischen Wärmen der Luft bedeutet, und die Constante q zwar von dem specifischen Gewichte des Gases, nicht aber von seiner zufälligen Dichtigkeit abhängt.

Differenzirt man die Gleichung (2), so wird:

$$dp = q\beta s^{\beta-1} ds,$$

was in Verbindung mit Gleichung (1) zu:

$$q\beta s^{\beta-2} ds = -\frac{1}{g} v\, dv$$

führt. Durch Integration erhält man:

$$\frac{q\beta}{\beta-1} s^{\beta-1} = -\frac{v^2}{2g} + \text{Const.}$$

Ist s_0 die Dichtigkeit, welche die Luft besitzt, ehe sie in den Wirkungsraum der widerstehenden Fläche eintritt, und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, so gilt auch:

$$\frac{q\beta}{\beta-1} s_0^{\beta-1} = -\frac{v_0^2}{2g} + \text{Const.}$$

und durch Subtraction:

$$\frac{q\beta}{\beta-1}\left(s^{\beta-1} - s_0^{\beta-1}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}. \tag{3}$$

Setzt man hier die Geschwindigkeit v gleich Null, so erhält die Dichtigkeit s den besonderen Werth s_1, welcher dem Druck P_1 gegen den Scheitel der Fläche entspricht, und es ist demnach:

$$\frac{q\beta}{\beta-1}\left(s_1^{\beta-1} - s_0^{\beta-1}\right) = \frac{v_0^2}{2g}, \text{ oder:}$$

$$s_1^{\beta-1} = s_0^{\beta-1} + \frac{\beta-1}{\beta q} \cdot \frac{v_0^2}{2g}.$$

Potenzirt man beide Seiten mit $\frac{\beta}{\beta-1}$, so erhält man die Umformung:

$$s_1^{\beta} = s_0^{\beta}\left(1 + \frac{\beta-1}{\beta q s_0 \beta} \cdot \frac{s_0 v_0^2}{2g}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}},$$

welche geeignet ist, die Drucke

$$P_1 = q s_1^{\beta} \quad P = q s_0^{\beta}$$

einzuführen. Es wird dann:

$$P_1 = P\left(1 + \frac{\beta-1}{\beta} \frac{s_0 v_0^2}{2g P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}. \tag{4}$$

Dieses ist der gesuchte allgemeine Ausdruck für die Intensität P_1 des Luftdruckes gegen den Scheitel einer Rotationsfläche, welche sich mit der relativen Geschwindigkeit v_0 in der Richtung ihrer Axe gegen Luft bewegt, welche die Dichtigkeit s_0 und die dieser Dichtigkeit und der Temperatur entsprechende Spannung P besitzt.

3. Für kleine Werthe von v_0 erhält man durch Entwickelung der Potenz eine sehr rasch convergirende Reihe, von welcher schon die beiden ersten Glieder eine in vielen Fällen hinreichende Genauigkeit geben. Denn für $s_0 = 1{,}293$ ist, wenn die Temperatur der Luft 0^0 C. beträgt, $P = 10333$, ferner ist $g = 9{,}81$ und $\frac{\beta-1}{\beta}$ nahezu $\frac{2}{7}$. Folglich kann v_0 auf

22 Meter anwachsen, ehe der zweite Summand den Werth 0,001 erreicht.

Demnach setzt man für kleine Geschwindigkeiten mit Annäherung:

$$P_1 = P\left(1 + \frac{s_0 v_0^2}{2gP}\right) \quad \text{und} \quad P_1 - P = \frac{s_0 v_0^2}{2g}.$$

Für kleine Geschwindigkeiten ist also der Ueberdruck der Luft gegen den Scheitel von Rotationsflächen, welche sich in der Richtung ihrer Axe bewegen, der Dichtigkeit der Luft und dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit sehr nahe proportional.

Hingegen ist bei grossen Geschwindigkeiten der Widerstand beträchtlich grösser, als er sich nach der vereinfachten Formel berechnet. So gibt z. B. für $v_0 = 300$ die vereinfachte Formel nur 5931 $\frac{\text{kg}}{\text{qm}}$, während der wahre Widerstand 7248 kg beträgt.

Dieses Resultat entspricht den Erfahrungen, welche man über den Gesammtwiderstand der Geschosse gemacht hat.

III. Experimentelle Bestätigung des Widerstandsgesetzes für Geschwindigkeiten bis zu 10 m.

1. Es ist zu beweisen, dass Luft von der Dichtigkeit $s = mg$, welche mit der relativen Geschwindigkeit v_0 in der Richtung der Axe gegen den Scheitel einer Rotationsfläche strömt, auf denselben um

(a) $$P_1 - P = \tfrac{1}{2} m v_0^2$$

stärker drückt, als ruhende Luft von der gleichen Dichtigkeit (und Temperatur).

Hierzu kann die unter I beschriebene Methode verwendet werden.

In der daselbst abgeleiteten Gleichung:

(b) $$P_1 - P = \tfrac{1}{2} m v^2 - (P - P_0)$$

haben P_1, P, m dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (a), sobald die Rotationsaxe tangential zu dem Kreise gestellt ist, in dessen Peripherie der Scheitel derselben umlaufen soll, und $(P - P_0)$ stellt den Werth der Manometerablesung dar. Hingegen ist hier in (b) unter v die absolute Ge-

schwindigkeit des freien Rohrendes verstanden, während in dem zu beweisenden Satze (a) mit v_0 die relative Geschwindigkeit zwischen der Luft und der Fläche bezeichnet ist.

Sind beide Geschwindigkeiten identisch, d. h. trifft der im Kreise geschwungene Körper, welchem die widerstehende Fläche angehört, überall auf ruhende Luft, so ist dem Satze gemäss: $P_1 - P = \frac{1}{2} m v^2$,
folglich $P - P_0 = 0$, und wir müssen erwarten, dass das Manometer, welches auf Beobachtung der Differenz $P - P_0$ eingerichtet ist, keinen Ausschlag gibt.

2. Die Voraussetzung $v = v_0$ kann indessen nicht unbedingt gemacht werden. Denn schwingt man in einem Raum, in welchem anfangs die Luft in Ruhe war, einen Gegenstand wie den Arm unseres Apparates wiederholt im Kreise herum, so muss man erwarten, dass schon vom Beginn der zweiten Umdrehung an die getroffene Luft eine gewisse Geschwindigkeit in derselben Richtung besitzt, in welcher sich der Arm gerade bewegt. Diese eigene Geschwindigkeit der getroffenen Luft will ich den Mitwind nennen. Es wird also von der zweiten Umdrehung an die relative Geschwindigkeit v_0 um den Mitwind (u) kleiner sein, als die absolute v und folglich dem Satze gemäss:

$$P_1 - P = \tfrac{1}{2} m (v - u)^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m (2 v u - u^2).$$

Zur Bestätigung des Satzes scheint demnach erforderlich, dass nur während der ersten Umdrehung das Manometer keinen Ausschlag zeige, in der Folge aber einen Ueberdruck der äussern Luft von der Grösse:

$$P - P_0 = \tfrac{1}{2} m (2 v u - u^2)$$

angebe, wobei u der Mitwind ist.

3. Die erste der beiden Forderungen zeigt sich insofern erfüllt, als man während der ersten Umdrehung nie einen positiven Werth von $P - P_0$ beobachtet. Wohl aber erscheinen regelmässig kleine Ueberdrucke der innern Luft über die äussere, welche zuweilen bis auf

$$P - P_0 = -0{,}02$$

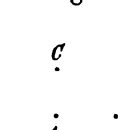
anwachsen. Sie rühren wohl daher, dass während der ersten Umdrehung Compression der Luft in der Röhre stattfindet,

und die mit derselben verbundene Temperaturerhöhung noch nicht Zeit zur Ausgleichung gefunden hat.

4. Um die Angaben, welche das Manometer während der folgenden Umdrehungen macht, zum Beweise heranzuziehen, muss zuvor die Stärke des Mitwindes anderweitig ermittelt sein.

Zu diesem Zwecke wurde das in in diesen Annalen [1]) beschriebene Anemometer verwendet. Dasselbe erhielt eine solche Einrichtung, dass es nach je 25 Umdrehungen des Flügelrades einen Stromschluss machte, und dass zugleich jedesmal 50 Umdrehungen des Flügelrades vollendet wurden, während sein Mittelpunkt einen Weg von 3π Metern in ruhender Luft zurücklegte. Durch Regulirung der Flügelstellung lässt sich letzteres für eine bestimmte Geschwindigkeit erreichen und gilt dann für andere Geschwindigkeiten mit Annäherung.

Setzt man dieses Anemometer so in den Apparat ein, dass die Mitte des Flügelrades 2 m vom Mittelpunkt der Drehung entfernt ist, so legt sie bei jeder ganzen Umdrehung des Armes einen Weg von 4π Metern zurück, und die ersten 4π Meter sind frei von Mitwind. Hat man sich eingeübt, während des ersten Viertels der ersten Umdrehung diejenige Geschwindigkeit hervorzubringen, welche man während der folgenden drei Viertel beizubehalten wünscht, so durchläuft das Anemometer noch 3π Meter ohne Mitwind mit nahezu constanter Geschwindigkeit und macht, wenn die Anfangsstellung des Contactes passend gewählt wurde, auf diesem Wege drei Stromschlüsse. Jeder dieser Stromschlüsse bewirkt, dass der Papierstreifen eines Registrirapparates, welcher mit 15 mm Geschwindigkeit läuft, einen Nadelstich bekommt. Neben diesen Nadelstichen erscheinen andere, welche ein zweiter Schreibhebel macht, so oft einer der vier Stifte, mit welchen die getriebene Riemenscheibe versehen ist, an die Feder anschlägt, mithin so oft, als das Anemometer den Weg π Meter zurückgelegt hat. (Vgl. Figur).



1) Recknagel, Wied. Ann. 4. p. 149. 1878. Die folgende Untersuchung über den Mitwind kann als eine Ergänzung des citirten Aufsatzes gelten.

Durch Messung der untern Strecke AB, die in Millimetern auszudrücken und durch 15 zu dividiren ist, erhält man die Zeit t, in welcher das Anemometer den Weg 3π in ruhender Luft zurücklegt, also auch die Geschwindigkeit (v) desselben. Der Abstand CD gibt, ebenso behandelt, die Zeit t_2, in welcher das Flügelrad des Anemometers bei der gerade vorhandenen Geschwindigkeit 50 Umdrehungen macht, also auch die Anzahl (n) der in der Secunde gemachten Umdrehungen.

Es folgt demnach aus jedem solchen Versuch ein Werth der Constante b in der Formel:

$$v = a + bn,$$

wenn man der Reibungsconstante a den erfahrungsmässigen Werth 0,20 beilegt.

Ist das Anemometer hinreichend empfindlich, um seine Bewegung unverzüglich der relativen Geschwindigkeit der Luft anzupassen, so genügen einige solche Versuche, um den wahren Werth der Anemometerconstante b zu ermitteln, und es lassen sich dann aus späteren, unter dem Einflusse des Mitwindes erhaltenen Werthen von t_2 die zugehörigen relativen Geschwindigkeiten der Luft berechnen, welche um den Mitwind kleiner ausfallen, als die unmittelbar neben denselben registrirten absoluten Geschwindigkeiten der Anemometeraxe.

5. Aus sechs gut übereinstimmenden Versuchen, bei welchen das Anemometer 0,30 m über dem Arme auf demselben befestigt war, erhielt ich im Mittel:

$$b = 0{,}1636.$$

Diesen Versuchen wurden zunächst andere in gleicher Weise ausgeführte angereiht, bei welchen dasselbe Anemometer zwar in gleicher Höhe über dem Arme, aber nur 1 m vom Mittelpunkt der Drehung entfernt aufgestellt war. Ich erhielt wiederum aus sechs unter sich gut übereinstimmenden Versuchen: $b = 0{,}1648$.

Der Unterschied dieser Mittelwerthe ist nicht gross genug, um darauf den Schluss zu gründen, dass der Radius des Kreises, in welchem man die Gegenstände, welche Luft-

widerstand erfahren sollen, herumschwingt, auf diesen Widerstand von Einfluss ist.

6. Nun wurde das Anemometer auf dem 2 m langen Arme, 0,30 m oberhalb desselben befestigt, herumgeschwungen und die registrirten Zeiten t_1 und t_2 von der 10. Umdrehung des Armes an verglichen. Jede Vergleichung umfasst durchschnittlich 30 Umdrehungen des Armes. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt.

Folge der Beobachtungen Nr.	Absolute Geschwindigkeit v m	Relative Geschwindigkeit v_0 m	Mitwind $(v-v_0)$ m	
8	1,26	1,28	—	0,06
7	1,27	1,29	—	0,06
6	2,52	2,40	0,12	0,13
5	3,11	2,94	0,17	0,16
4	3,18	3,01	0,17	0,16
1	4,82	4,52	0,30	0,24
2	4,77	4,49	0,28	0,24
3	6,18	5,87	0,31	0,31

Demgemäss war der beobachtete Mitwind nahezu der Geschwindigkeit proportional und betrug ungefähr 5 Proc. derselben. Die Abweichungen von der Proportionalität, welche in Nr. 8, 7, 1, 2 bei Vergleichung der berechneten letzten mit der beobachteten vorletzten Columne auffallen, lassen sich indessen nicht wohl auf Rechnung von Beobachtungsfehlern setzen.

7. Als sodann das Anemometer auf dem kürzern Arme (von 1 m Länge), 0,30 m oberhalb desselben befestigt, herumgeschwungen wurde, wurde kein Mitwind beobachtet. Drei Versuche, welche bei 4,7 m Geschwindigkeit ausgeführt wurden, gaben übereinstimmend die relative Windgeschwindigkeit um 0,02 m geringer, als die absolute Geschwindigkeit der Anemometeraxe, während ein bei 3,0 m ausgeführter Versuch eine gleich grosse Abweichung im entgegengesetzten Sinne zeigte.

8. Die mitgetheilten anemometrischen Versuchsresultate schienen mir genügende Anhaltspunkte für die Beweisführung des aufgestellten Widerstandsgesetzes zu geben.

Setzt man mässig grosse, kreisrunde Platten, Kugelschalen u. dergl. in der vorgeschriebenen Stellung an den Platz, welchen das Anemometer auf dem 2 m langen Arme einnahm, so muss das Manometer positive Werthe von $P-P_0$, d. h. Ueberdrucke der ruhenden Zimmerluft über die im Mittelpunkte der Drehung befindliche Luft anzeigen, welche ungefähr den mittelst des Anemometers beobachteten Mitwinden entsprechen. Hingegen darf das Manometer keinen Ausschlag geben, wenn der widerstehende Körper den Platz des Anemometers auf dem kurzen Arme einnimmt.

9. Die Versuche, welche mit vier kreisrunden Platten von 0,04, 0,10, 0,10 und 0,20 m Durchmesser und einer Kugelschale von 0,11 m Durchmesser und 0,045 m Höhe ausgeführt worden sind, geben durchaus den Erwartungen entsprechende Resultate. Dieselben sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Die in der ersten Columne stehende absolute Geschwindigkeit v desjenigen Endes der geschwungenen Röhre, welches in dem Scheitel der Rotationsfläche endigt, ist durch den Abstand dieses Scheitels vomDrehungsmittelpunkte und durch die Einstellung des Metronoms gegeben. Für v gilt unter alleiniger Voraussetzung der Realisirung der Beobachtungsmethode die Gleichung:

(b) $$P_1 - P = \tfrac{1}{2} m v^2 - (P - P_0).$$

In der zweiten Columne steht der am Manometer beobachtete Werth von $P - P_0$, dessen Fehler in der dritten Decimale liegen.

Die dritte Columne gibt die relative Geschwindigkeit (v_0) der Luft, berechnet aus der Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 - (P - P_0),$$

welche durch Combination der zu beweisenden Gleichung (a):

$$P_1 - P = \tfrac{1}{2} m v_0^2$$

mit der obigen Gleichung (b) erhalten wird. Gleichung (a) ist demnach richtig, wenn das berechnete v_0 richtig ist, d. h. wenn die in der letzten Colonne aufgeführten Werthe von $v - v_0$ als Mitwindstärke angesehen werden dürfen.

I.

Im Mittelpunkte einer Zinkplatte von 0,10 m Durchmesser, 2 m vom Drehungsmittelpunkte entfernt.

Absolute Geschwindigkeit v	$P-P_0$	Berechnete relative Geschwind. v_0	$v-v_0$
1,57	0,010	1,52	0,05
3,14	0,039	3,04	0,10
6,28	0,147	6,11	0,17
9,42	0,341	9,12	0,30

II.

Dieselbe Platte in derselben Entfernung.

9,42	0,320	9,14	0,28
6,28	0,133	6,10	0,18
3,14	0,037	3,04	0,10
4,71	0,106	4,52	0,19
9,42	0,295	9,16	0,26

III.

Dieselbe Platte in 1 m Entfernung.

1,05	+0,002	1,05	0,00
2,10	0,002	2,10	„
3,14	−0,002	3,14	„
4,19	−0,003	4,19	„
5,25	−0,014	5,25	„

IV.

Eine Messingplatte von 0,04 m Durchmesser in einer Entfernung von 2 m.

Absolute Geschwindigkeit v	$P-P_0$	Berechnete relative Geschwind. v_0	$v-v_0$
3,14	0,040	3,03	0,11
6,28	0,087	6,17	0,11
9,42	0,181	9,26	0,16

Eine Zinkplatte von 0,20 m Durchmesser gab, 2 m vom Mittelpunkte der Drehung entfernt, im Mittel aus vier Versuchen:

9,42	0,268	9,19	0,23

Dieselbe Platte 1 m vom Drehungsmittelpunkte entfernt:

5,25	0,008	5,25	0,00

Eine Holzplatte von 0,10 m Durchmesser, 2 m entfernt, gab:

9,42	0,291	9,16	0,26

Mit der Kugelschale wurden vier Versuche ausgeführt, zwei auf dem langen und zwei auf dem kurzen Arm. Bei zweien war die convexe Seite dem Winde zugekehrt, bei den anderen beiden die concave.

Die Kugelschale in einer Entfernung von 2 m.

	v	$P-P_0$	v_0	$v-v_0$
convex	9,42	0,255	9,19	0,23
concav	9,42	0,365	9,09	0,33

Dieselbe Schale in einer Entfernung von 1 m.

	v	$P-P_0$	v_0	$v-v_0$
convex	4,71	0,000	4,71	0,00
concav	4,71	−0,002	4,71	0,00

10. Die vorstehend mitgetheilten Versuchsresultate scheinen mir die Gültigkeit des behaupteten Satzes innerhalb der angegebenen Grenzen ausser Zweifel zu setzen.

Abgesehen von seinem selbständigen Werthe bildet er eine wichtige Ergänzung der in I mitgetheilten Versuchsmethode, insofern er ein leichtes und sicheres Mittel bietet,

in jedem besondern Falle, wo man die Vertheilung des Winddruckes über den Meridian einer Rotationsfläche studiren will, den Mitwind zu finden.

11. Uebrigens gibt es auch noch ein anderes sehr einfaches Verfahren, sich von der Anwendbarkeit der vereinfachten Gleichung: $$P_1 - P = \tfrac{1}{2} m v_0^2$$ zur Berechnung des centralen Druckes einer Luftströmung von kleiner Geschwindigkeit zu überzeugen.

Hinter der Einströmungsöffnung eines Kamins, in welchem sich aus ruhiger Luft von der Dichtigkeit $s = mg$ ein Luftstrom von v_0 m Geschwindigkeit entwickelt, ist die Spannung der Luft vermöge geringerer Dichtigkeit um:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2$$

kleiner als vor der Einströmungsöffnung.

Dieser Satz ist eine Form des Toricelli'schen Theorems der Ausflussgeschwindigkeit und gilt, wie die mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie geführten Untersuchungen dargethan haben, zwar nicht allgemein, allein innerhalb des gleichen Bezirkes der Geschwindigkeiten, in welchem der centrale Widerstand durch $\frac{1}{2} m v_0^2$ ausgedrückt werden kann, mit grosser Annäherung.[1]) Stellt man nun hinter der Einströmungsöffnung ein rundes Plättchen so auf, dass es von dem Luftstrome senkrecht getroffen wird, so ist vermöge der geringern Dichtigkeit der dasselbe umgebenden Luft die Intensität des Druckes gegen seine Mitte um

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2$$

kleiner als die Spannung der äussern ruhenden Luft von der specifischen Masse m. Da aber Luft mit der Geschwindigkeit v_0 gegen die Vorderseite des Plättchens strömt, so ist dem Widerstandsgesetze gemäss der Druck gegen die Mitte der Vorderseite um

$$\tfrac{1}{2} m' v_0^2$$

grösser als der Druck ruhender Luft von gleicher specifischer Masse m'. Da nun die specifischen Massen m und m' bei kleinen Geschwindigkeiten (v_0) nur sehr wenig differiren (m' ist, wenn $v_0 = 4$ m, ungefähr um $\frac{1}{1000}$ kleiner als m, wenn für

1) Vgl. u. a. Grashof, theoret. Maschinenlehre, **1.** p. 552 ff.

letzteres der grösste Werth angenommen wird, den es während der Entwickelung der Geschwindigkeit v_0 besitzt), so kann mit grosser Annäherung $m = m'$ und demnach:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m' v_0^2$$

gesetzt werden, d. h. durch den Ueberdruck der Strömung wird der bestehende Minderdruck eben ausgeglichen, und es ist der Gesammtdruck der innern strömenden Luft auf die Mitte des Plättchens mit grosser Annäherung ebenso gross als der Druck der äussern ruhenden Luft.

12. Ist in die durchbohrte Mitte des Plättchens von hinten her ein Röhrchen gesteckt, welches, in einen Kautschukschlauch fortgesetzt, die daselbst befindliche Luft auf ein empfindliches Differentialmanometer wirken lässt, so gibt das Manometer keinen Ausschlag, wenn die Mitte des Plättchens der im Querschnitt grössten Geschwindigkeit des Luftstromes ausgesetzt ist. Hingegen zeigen sich Ueberdrucke der äussern ruhenden Luft über die innere, wenn die Mitte des Plättchens weiter an den Rand des Querschnitts gerückt wird, wo die Geschwindigkeit geringer ist.

Ich bediene mich zu diesen Versuchen eines verticalen eisernen Rohres von 0,20 m Weite und 2 bis 4 m Höhe, in welchem vier Gasbrenner angebracht sind. Unterhalb dieser Heizvorrichtung ist ein Kniestutzen angesetzt, welcher dem Beobachter ein horizontales Rohrstück zuwendet. In dem horizontalen Canale lassen sich mit Hülfe des Manometers sehr bequem der erwähnte Versuch und andere ausführen, welche zur Untersuchung der Vertheilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt dienen können.

Kaiserslautern im April 1880.

XIII. *Ueber die Wirkung hohler Stahlmagnete im Vergleich zu derjenigen massiver; von W. Holtz.*

Bei Versuchen über die Magnetisirung des Stahls während seiner Härtung war ich zu der Ansicht gelangt, dass

massive Stahlstäbe im allgemeinen keine guten permanenten Magnete lieferten, weil einerseits bereits während der Magnetisirung der Kern viel von der magnetisirenden Kraft absorbire, dann weil der Kern überhaupt als ein beide Pole verbindender Anker zu betrachten sei.[1]) Ich hatte infolge dessen einige weitere Versuche mit Stahlröhren angestellt, welche jene Ansicht im ganzen zu bestätigen schienen.

Da nun die Anfertigung solcher Stahlröhren durchaus keine Schwierigkeit bietet, sie sich vielmehr in grösseren Stücken noch bedeutend billiger als massive Stäbe stellen (die Röhren brauchen nämlich nicht gebohrt zu sein, sondern man kann sie aus Stahlblech schmieden lassen, da es gleichgültig ist, ob die Wand vollkommen geschlossen ist oder nicht), so schien es mir nicht überflüssig, im Hinblick auf die Möglichkeit einer praktischen Verwerthung noch einen genaueren Vergleich zwischen der Wirkung solcher und gewöhnlicher massiver Magnete zu ziehen.

Inzwischen habe ich nun freilich erfahren, dass bereits Nobili constatirte, dass eine kleine Stahlröhre permanent viel stärker magnetisch wurde, als ein massiver Stab von äusserlich gleichen Dimensionen. Nach dem kurzen Referat in Pogg. Ann. **34.** p. 270. 1835. — die Originalarbeit ist mir leider nicht zugänglich — wog der Stab 28,5 und die Röhre 16 g. Trotzdem bewirkte diese eine Ablenkung von 19°, jene nur eine solche von 9,5° an einer Bussole. Immerhin steht dieser Versuch, abgesehen davon, dass die Dimensionen der Stücke verhältnissmässig klein waren und auch eine genauere Bestimmung der Magnetismen fehlt, bisher vereinzelt da. Ich möchte daher gleichwohl meine eignen Versuchsergebnisse in wenigen Worten beschreiben.

Zuerst wandte ich einen Stab und eine Röhre von $12^1/_2$ cm Länge und 13 mm äusserem Durchmesser an. Die Wandstärke der Röhre betrug $1^3/_4$ mm. Beide Stücke wurden bis zur Sättigung magnetisirt. Die Prüfung der Magnetismen geschah nach der Schwingungsmethode, wobei ich die Röhre ihrer ganzen Länge nach mit Kupfer beschwerte. Der Magnetismus des Stabes verhielt sich zu jenem der Röhre wie 1 : 1,6.

Dann benutzte ich einen Stab und eine Röhre von 32 cm Länge und 35 mm äusserem Durchmesser, während die Wandstärke der Röhre dieselbe war wie oben. Auch hier glaube ich, dass beide Stücke bis zur Sättigung magnetisirt waren, da mir eine aussergewöhnlich grosse magnetisirende Kraft zur Verfügung stand. Der Magnetismus des

1) Holtz, Wied. Ann. **7.** p. 71. 1879.

Stabes (die Prüfung erfolgte wie oben) verhielt sich zu jenem der Röhre wie 1 : 1,5.

Ich hatte im letztern Falle eigentlich einen grösseren Unterschied erwartet, als im ersteren, weil der Kern ja so viel dicker war, und dies nothwendig von grossem Einflusse sein musste, aber ich bedachte bald, dass auch die Länge des Kerns, des vermeintlichen Ankers eine wesentliche Rolle spielen musste. Hätte ich im zweiten Falle bei derselben Stabdicke auch nur eine Länge von $12^1/_2$ cm benutzt, so würde ich aller Wahrscheinlichkeit nach auch einen viel grösseren Unterschied gefunden haben.

Endlich versuchte ich noch, wie sehr der Magnetismus der Röhren abnehmen würde, wenn ich einen wirklichen Anker in Anwendung brachte, d. h. wenn ich sie ihrer ganzen Länge nach mit weichem Eisen füllte. Es ergab sich, dass die Röhren unter so bewandten Umständen kaum noch der Richtkraft der Erde gehorchten. Vielleicht beweist dieser letztere Versuch am schlagendsten, wie nachtheilig für permanente Stahlmagnete die innere Masse ist.

Nachtrag. Nachdem gedachter Vergleich schon vor einem halben Jahre, d. h. kurz nach Magnetisirung der betreffenden Stücke ausgeführt und obige Mittheilung bereits der Redaction dieser Blätter übergeben war, fiel es mir vor kurzem ein, noch einmal dieselben Stücke mit einander zu vergleichen, da es wohl wahrscheinlich war, dass hohle Magnete ihren Magnetismus besser zurückhalten würden, als massive. Das Ergebniss war aber der Art, dass es meine Erwartungen noch bei weitem übertraf. Es ergab sich nämlich, dass sich nunmehr bei jenen grösseren Magneten der Magnetismus des massiven zu demjenigen des hohlen Stückes wie 1 : 2,5, und bei jenen kleineren Magneten der Magnetismus des massiven zu demjenigen des hohlen Stückes sogar wie 1 : 2,9 verhielt.

Da man hiernach der Anfertigung hohler permanenter Magnete für den praktischen Gebrauch wohl in Zukunft eine grössere Aufmerksamkeit schenken dürfte, so habe ich mich entschlossen, diesem Gegenstande eine längere Versuchsreihe zu widmen, und werde mir seiner Zeit erlauben, die Resultate derselben mitzutheilen.

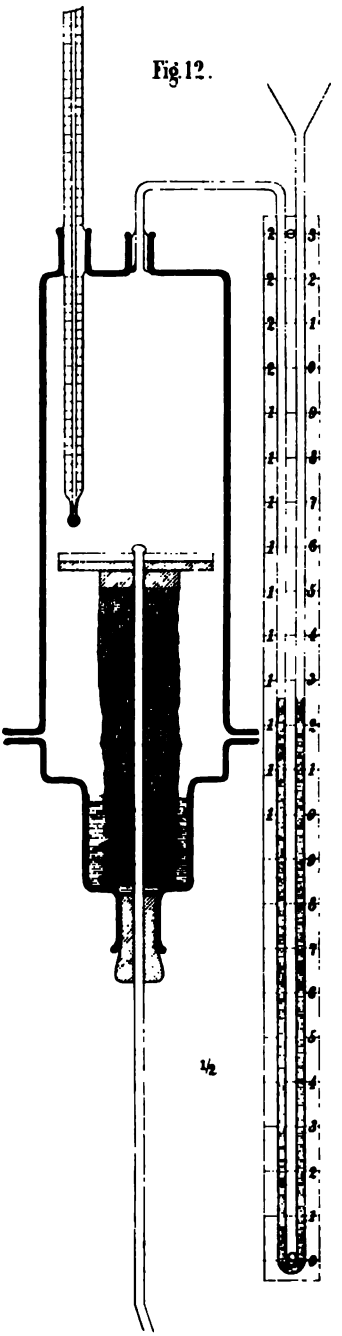
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 11.

Fig. 12.



B

10-11. Dez. 1879.

Fig. 1.

Fig. 2.

20. Jan. 1880.

Fig. 3

Fig. 4.

3.

Fig 12.

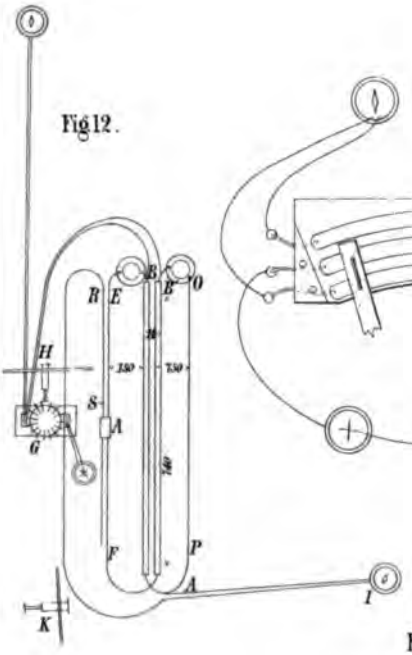
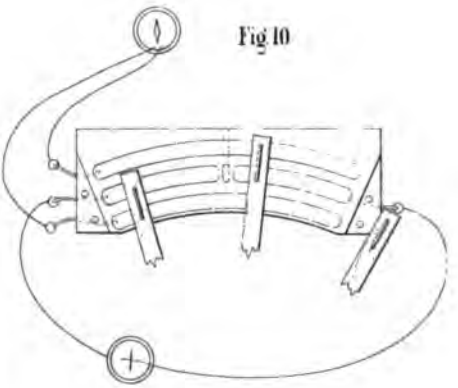
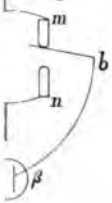


Fig 10



E

Fig 5.



g 7.

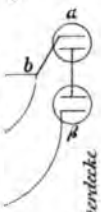


Fig 9.

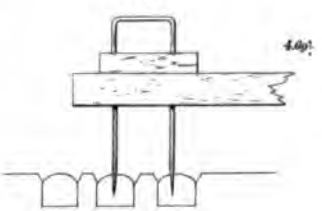


Fig 11.

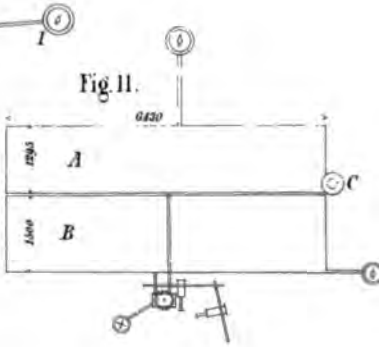
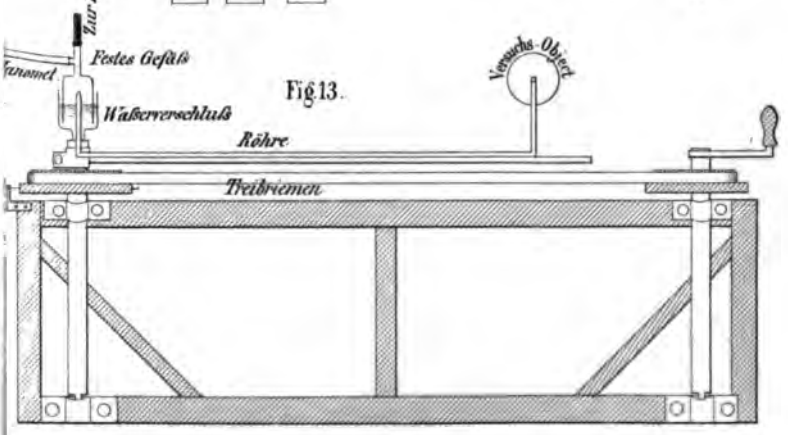


Fig 13.



PHYSICS

530.5
A613
N.E.
V.10

14+05

PHYSICS

530.3
A613
N.Y.
V.10